



Identification de système en mécanique

J. Morlier 2009

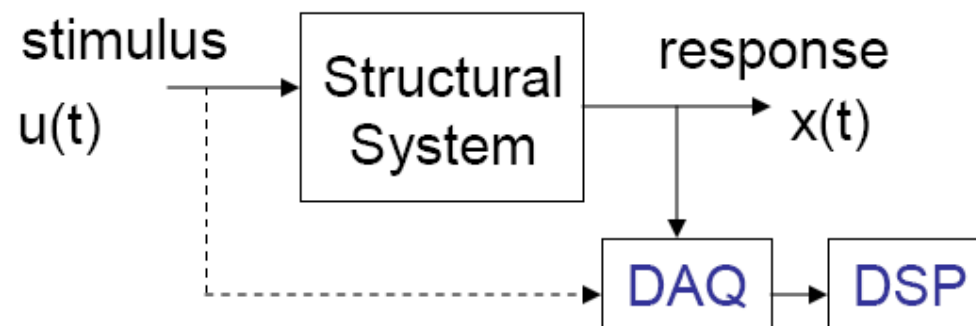


- Introduction



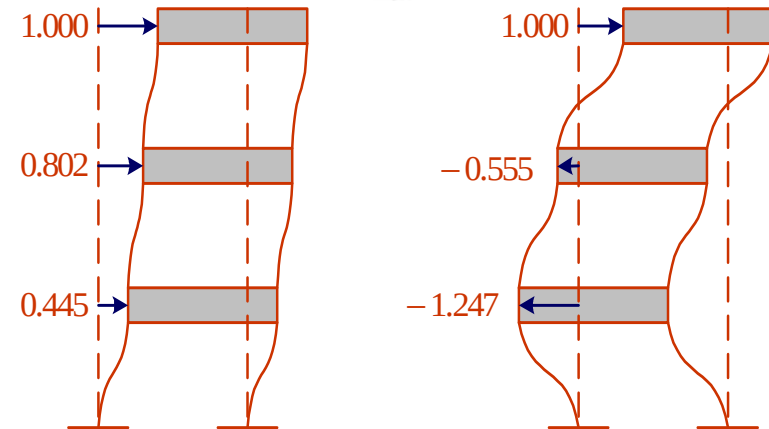
Pourquoi tester dynamiquement une structure?

- Performance en fatigue (accéléré)
- Identification de système (paramètres modaux)
- Vérification de la conception (placement en fréquences)
- Détection d'endommagement (// CND)
- Détection de Flutter
- Analyse modale en opération



DAQ = data acquisition
DSP = digital signal processing

- Analyse Modale Expérimentale (AME)
- Utilisation de la Transformée de Fourier pour estimer 3 paramètres: F_i , A_i , D_i
- Intérêt de la déformée D_i qui est un paramètre local

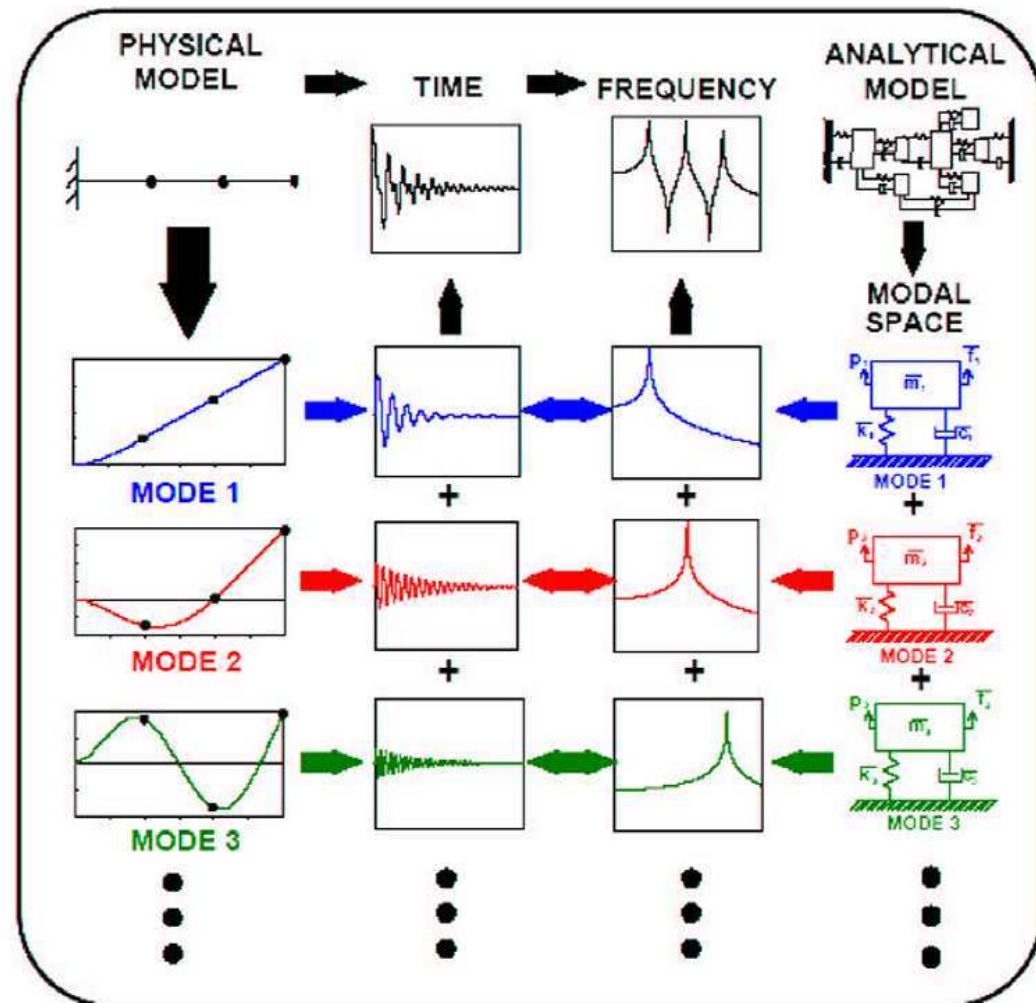


Définition

1. Le système est linéaire dans la gamme des amplitudes étudiées
2. L'amortissement est supposé proportionnel
3. Le principe de superposition modale
4. Réciprocité



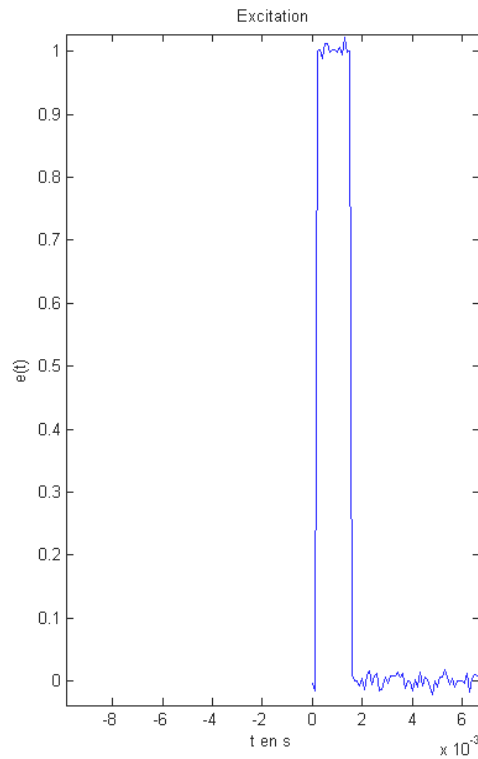
$$H_{A2F1} = H_{A1F2}$$





Identification de système

Force



Système
 $H(j\omega)$

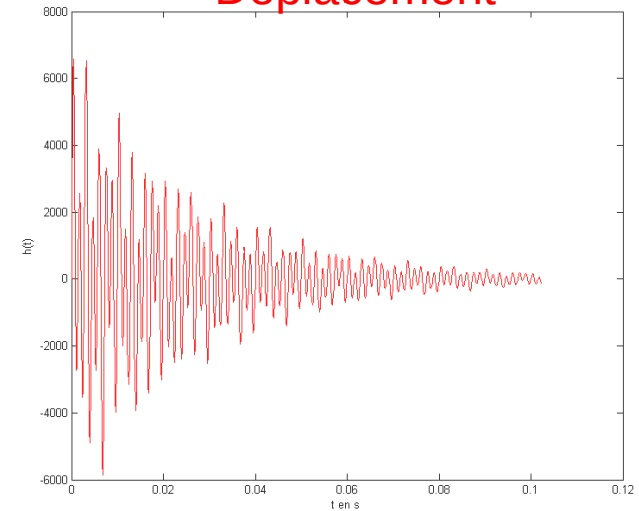
$E(t)$

$S(t)$

$$H(\omega) = S(\omega) / E(\omega)$$

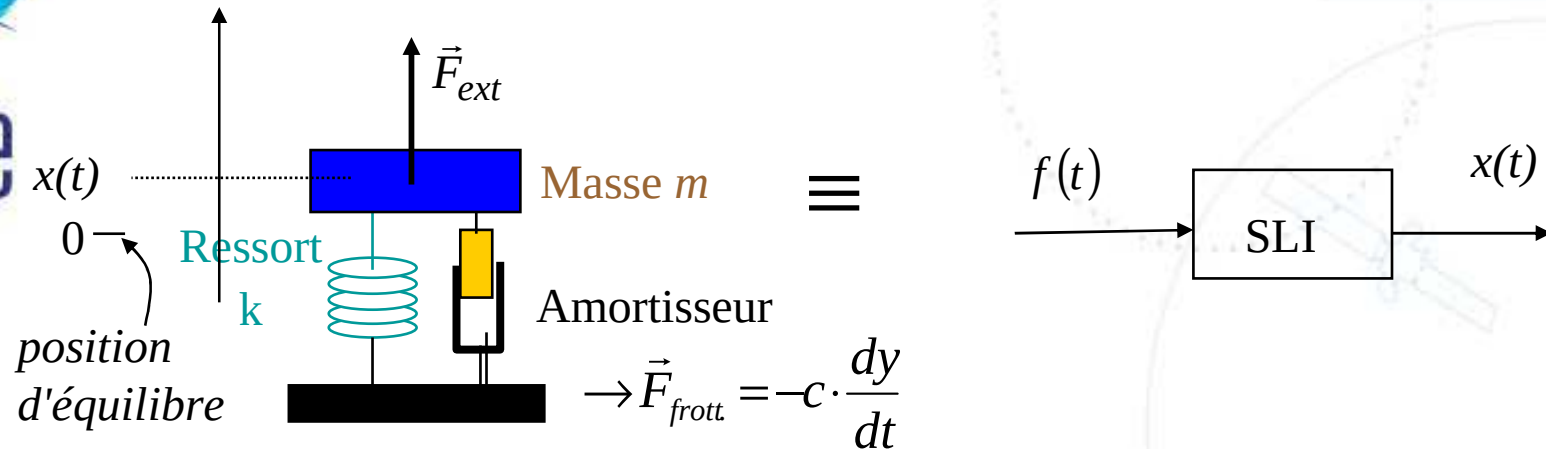
Accélération=
 $X''(t)$

Avec $X(t)$
Déplacement





La base en mécanique est l'Amortisseur à 1DDL



Equation différentielle:

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + c \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = F(t)$$

$$H(p) = \frac{X(p)}{F(p)} = \frac{1/M}{p^2 + (C/M)p + (K/M)} = \frac{1/M}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2}$$

En posant $p = j\omega$

$$H(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{1/M}{-\omega^2 + (C/M)j\omega + (K/M)} = \frac{1/M}{-\omega^2 + 2\xi\omega_n j\omega + \omega_n^2}$$

H est une fonction complexe qui décrit le rapport déplacement sur force en fonction de la fréquence



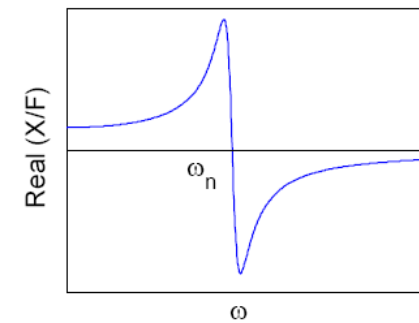
La transformée de Fourier permet d'avoir
une vision « système » des équations différentielles,
et de mieux comprendre leur effet sur un signal d'entrée

Resonance ?

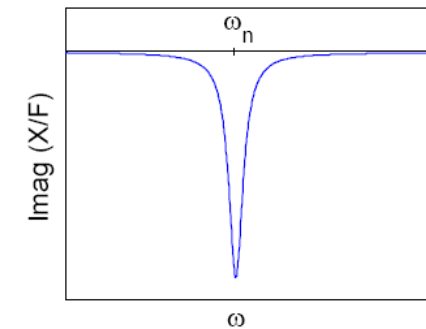
- L'amplitude de la FRF atteint un maximum (déphasage de 180°).
- La partie réelle de la FRF passe par 0.
- La partie imaginaire de la FRF atteint un minima (or maxima) local.

Ecriture d'un SDOF

$$Re\left[\frac{X}{F}(\omega)\right] = \frac{1}{k} \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right)^2}$$



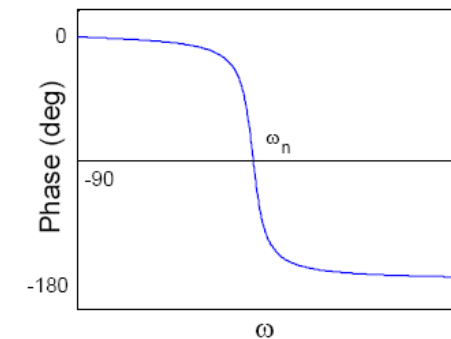
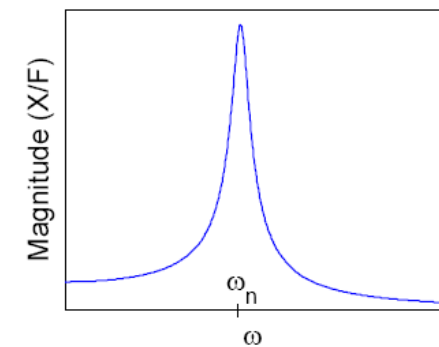
$$Im\left[\frac{X}{F}(\omega)\right] = \frac{1}{k} \frac{-2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right)^2}$$



Ecriture d'un SDOF

$$\left| \frac{X}{F}(\omega) \right| = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right)^2 + \left(2\zeta \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right) \right)^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\phi \left[\frac{X}{F}(\omega) \right] = \tan^{-1} \left(\frac{-2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \right)$$



Lecture de M, K?

displacement/force = compliance [m/N]
velocity/force = mobility [(m/s)/N]
acceleration/force = accelerance [(m/s²)/N]

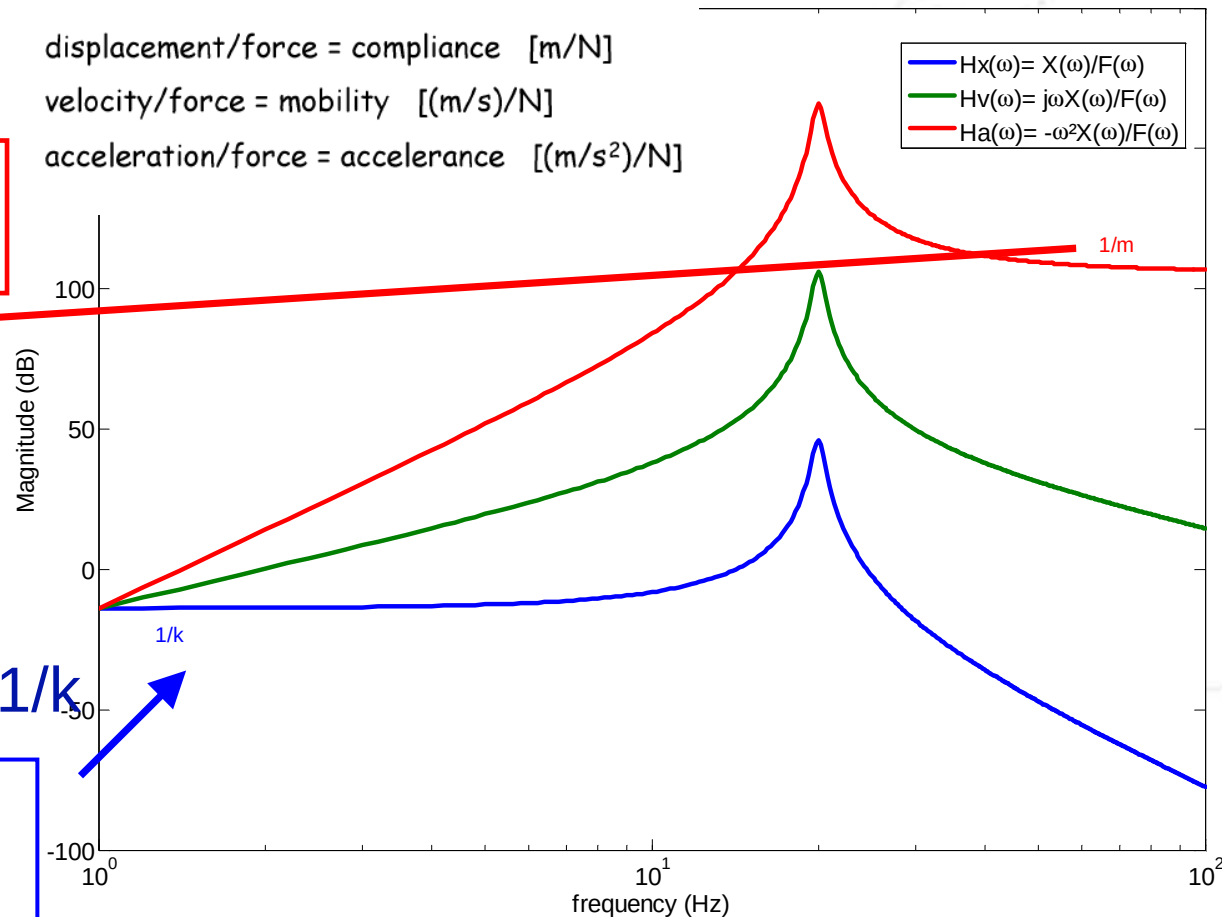
$$H(j\omega) = \frac{1/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2\zeta\omega_0}$$

Let's $\omega \rightarrow \infty$

$$Ha(\omega) = -\omega^2 H(\omega) \rightarrow 1/m$$

Let's $\omega \rightarrow 0$ $H(0) = 1/k$

$$H(f) = \frac{1/k}{1 - \left(\frac{f}{f_0}\right)^2 + j2\zeta\left(\frac{f}{f_0}\right)}$$





- Les bases « SYSTEME »

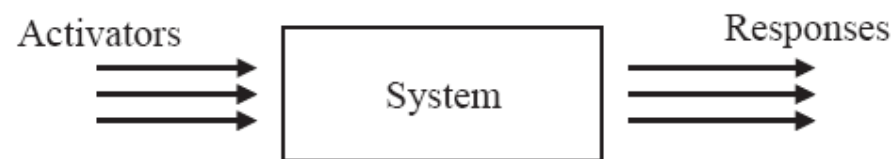
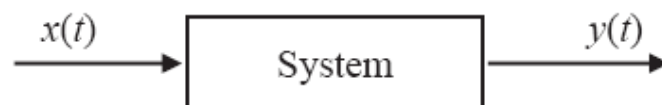


Figure 1.1 Conceptual diagram of a simplified system



$$y(t) = h(t) * x(t)$$

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

Figure 1.2 A single activator and a single response system

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(t - t_1)x(t_1)dt_1 = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau$$

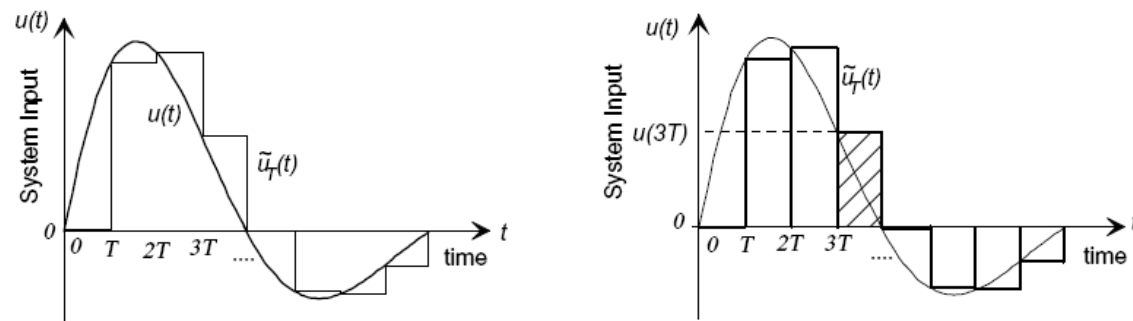


Figure 3: Staircase approximation to a continuous input function $u(t)$.

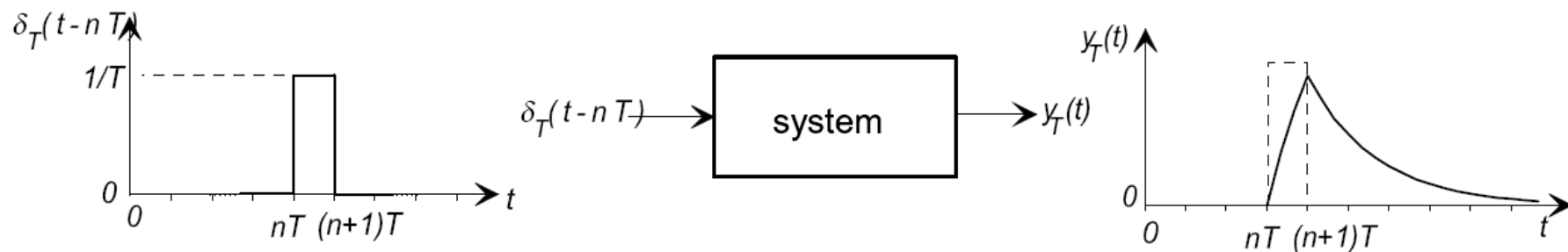


Figure 4: System response to a unit pulse of duration T .

When an impulse appears in a product within an integrand, it has the property of "sifting" out the value of the integrand at the point of its occurrence:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a) \quad (5)$$

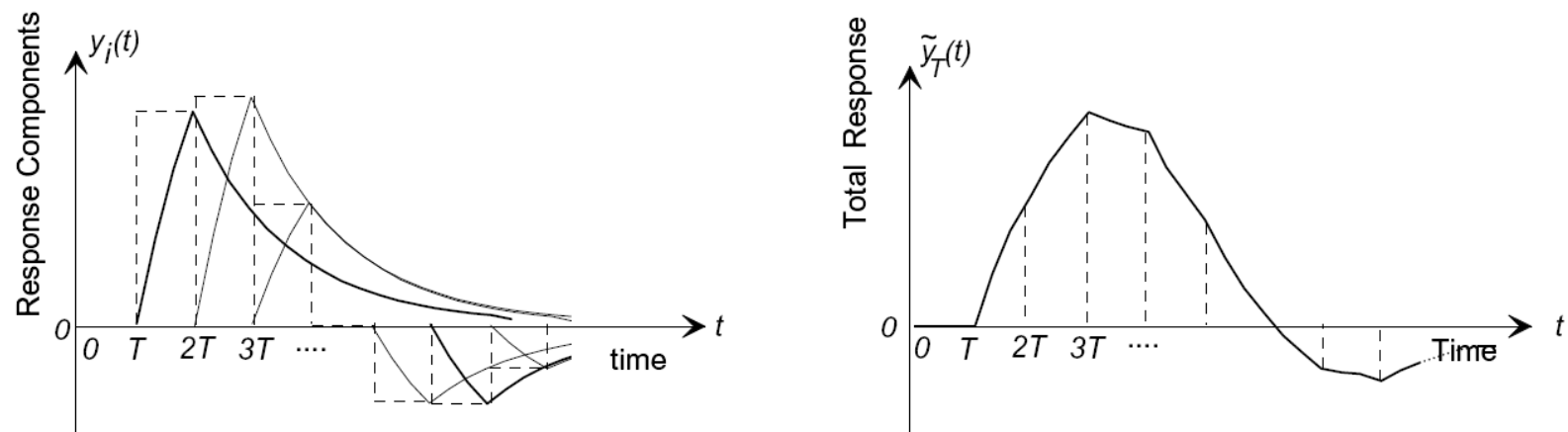


Figure 5: System response to individual pulses in the staircase approximation to $u(t)$.

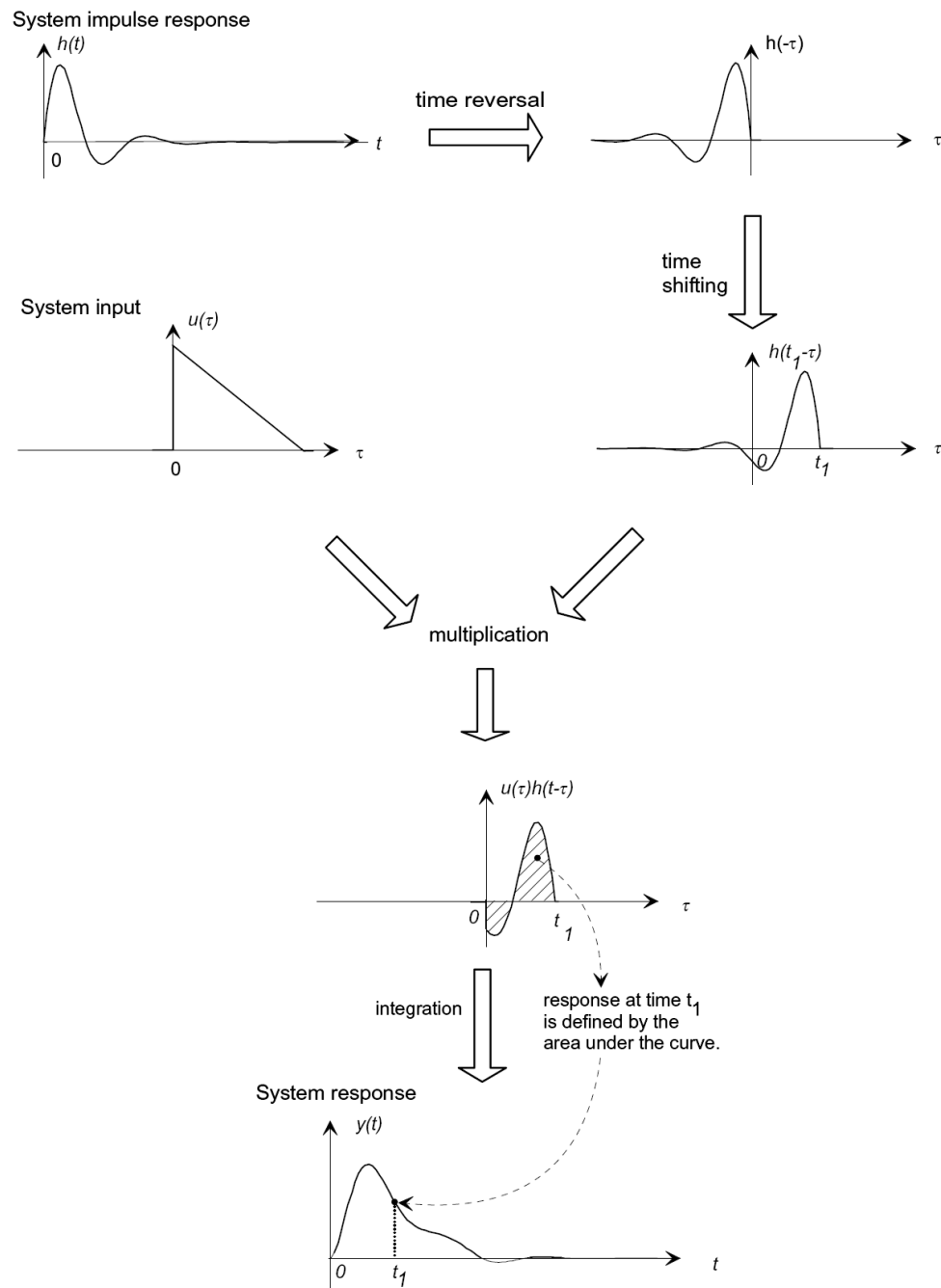
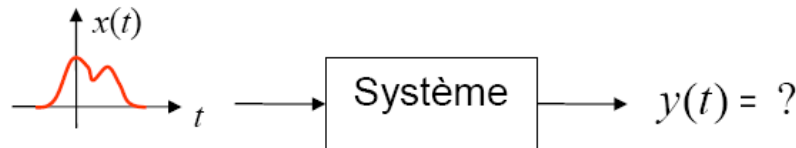


Figure 6: Graphical demonstration of the convolution integral.



□ Application de la notion de convolution



Réponse du système
on cherche $y(t) = S[x(t)]$

Élément neutre
de la convolution

$$x(t) = x(t) * \delta(t) \Rightarrow x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

$$\Rightarrow y(t) = S\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau\right]$$

Propriété de linéarité du système : $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) S[\delta(t - \tau)] d\tau$ (Voir diapo 5)

Propriété d'invariance temporelle du système : $S[\delta(t - \tau)] = h(t - \tau)$
(réponse impulsionnelle décalée,
voir diapos 5 et 8)

On en déduit $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \Rightarrow y(t) = x(t) * h(t)$

La réponse du système à une entrée quelconque x est la convolution de x avec la réponse impulsionnelle h du système. h caractérise entièrement le système.



- Les bases « SIGNAL »



Data Transformation

- Functions that modify data are also termed *operations* or *transformations*.
- Since most signal processing operations are implemented using digital electronics, functions are represented in discrete form as a sequence of numbers:
 - $x(n) = [x(1), x(2), x(3), \dots, x(N)]$
 - A *transform* can be thought of as a re-mapping of the original data into a function that provides more information than the original.*



Fourier Transform

- The Fourier Transform is a classic example as it converts the original time data into frequency information which often provides greater insight into the nature and/or origin of the signal.
- Many of the transforms are achieved by comparing the signal of interest with some sort of probing function. This comparison takes the form of a correlation (produced by multiplication) that is averaged (or integrated) over the duration of the waveform, or some portion of the waveform:

$$X(m) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) f_m(t) dt$$

- where $x(t)$ is the waveform being analyzed, $f_m(t)$ is the probing function and m is some variable of the probing function, often specifying a particular member in a family of similar functions. For example, in the Fourier Transform $f_m(t)$ is a family of harmonically related sinusoids and m specifies the frequency of an individual sinusoid in that family (e.g., $\sin(mft)$).



$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

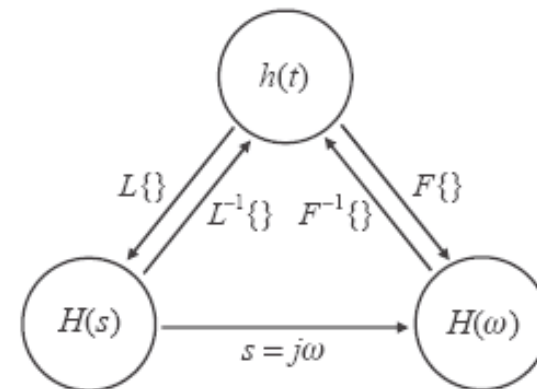


Figure 4.24 Relationship between $h(t)$, $H(\omega)$ and $H(s)$

Interpretation and appearance of the Fourier transform: $X(f)$ is a (*complex*) amplitude density. From the representation $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$, we see that $|X(f)| df$ represents the contribution in magnitude (to $x(t)$) of the frequency components in a narrow band near frequency f . Since $X(f)$ is complex, we may write

$$X(f) = X_{\text{Re}}(f) + jX_{\text{Im}}(f) = |X(f)| e^{j\phi(f)} \quad (4.9)$$

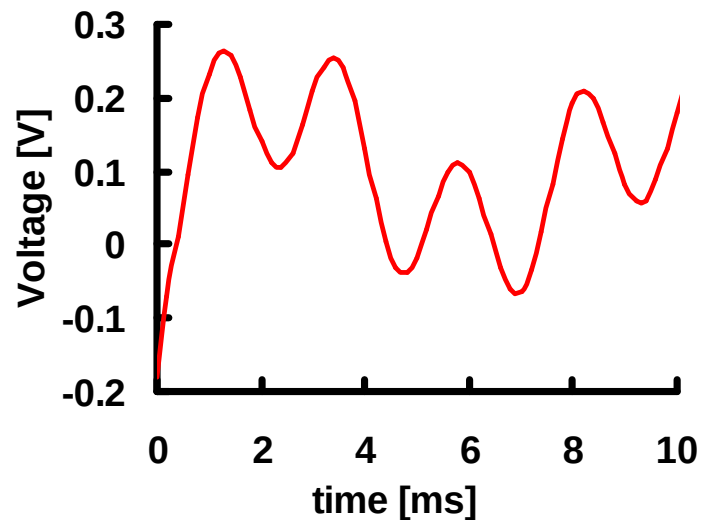
where $|X(f)|$ is the magnitude (or amplitude) spectrum and $\phi(f)$ is the phase spectrum. When $x(t)$ is in volts, $|X(f)|$ is in volts/Hz.



Signaux A/N

Analogique

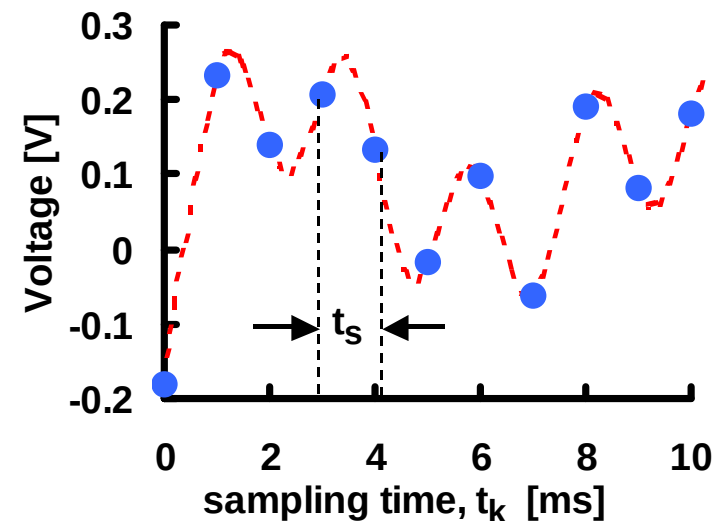
Fonction continue V d'une variable continue t (temps, ... etc) : $V(t)$.



Fréquence d'échantillonnage
 $f_s = 1/t_s$

Numérique

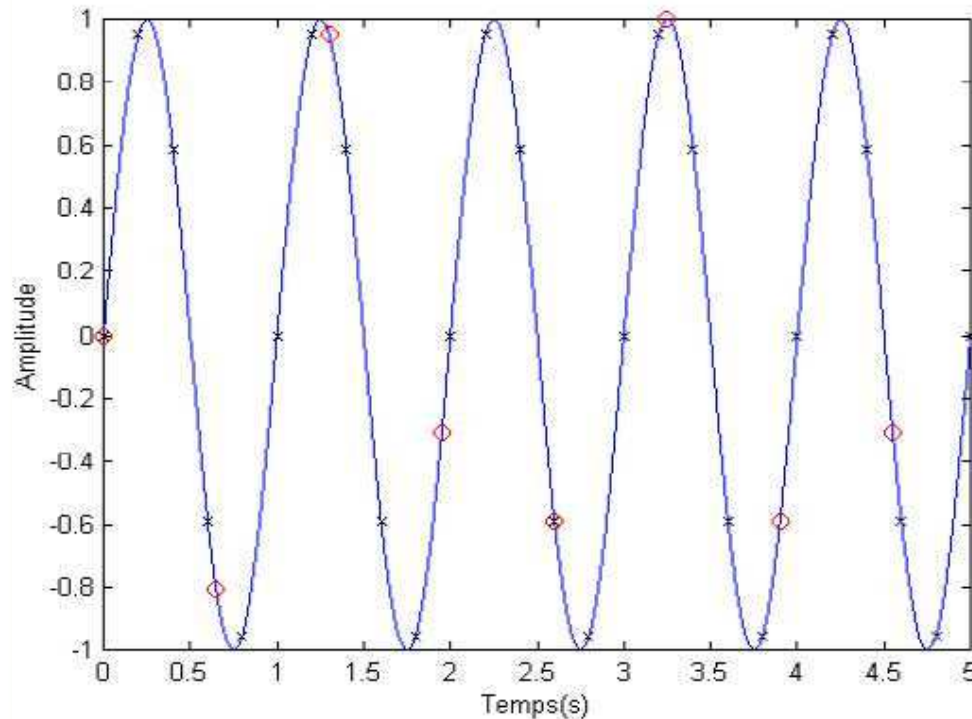
Fonction discrete V_k d'une variable discrete t_k , avec $k =$ entier: $V_k = V(t_k)$.



Durée d'enregistrement
 $t = N/f_s$



Echantillonnage



$$x(t) = \sin(2\pi t)$$

$$F_{\max} = 1$$

$$T_e = 0.2 \text{ s} \Rightarrow F_e = 5 > 2 \cdot F_{\max} \Rightarrow \text{OK}$$

$$T_e = 0.65 \text{ s} \Rightarrow F_e = 1/0.65 < 2 \cdot F_{\max}$$

Soit un "La" dont la Fréquence est 440Hz. Ce signal s'écrit : $x(t) = \sin(2\pi \cdot 440t)$
Sous matlab, on est en numérique, donc le temps est discret = échantillonnage à F_e . Echantillonnage d'un "La" à une fréquence F_e donnée :
(essayer avec $F_e = 10000, 5000, 2000, 1000, 881, 600$, etc)

$F_e = \text{????};$

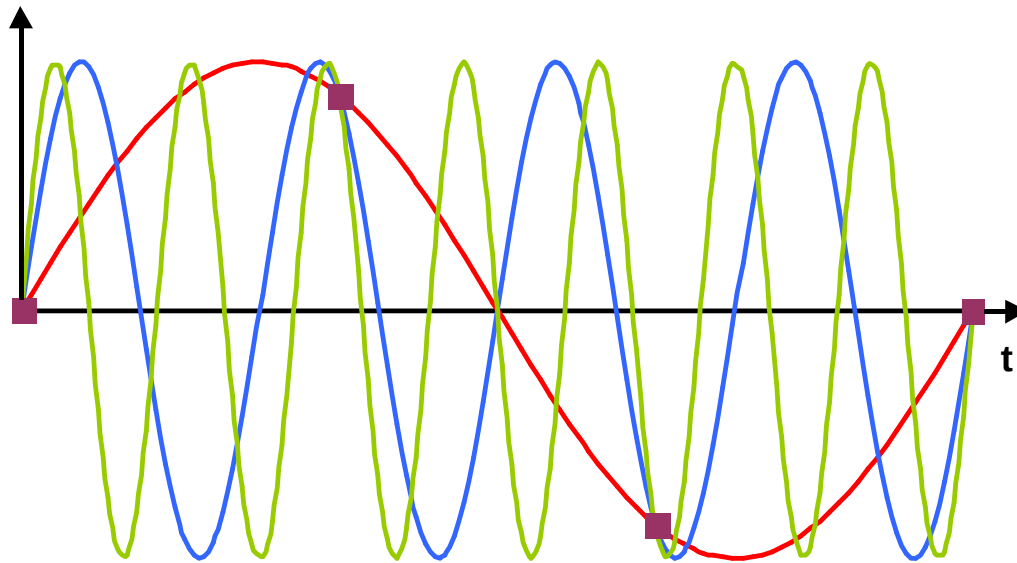
$t = 0:1/F_e:2;$

$x = \sin(2 \cdot \pi \cdot 440 \cdot t);$

$\text{sound}(x, F_e);$



Repliement : aliasing



— $s(t) = \sin(2\pi f_0 t)$

■ $s(t) @ f_s$

$f_0 = 1 \text{ Hz}, f_s = 3 \text{ Hz}$

— $s_1(t) = \sin(8\pi f_0 t)$

— $s_2(t) = \sin(14\pi f_0 t)$

$s(t) @ f_s$ représente exactement toutes les sinusoides $s_k(t)$:

$$s_k(t) = \sin(2\pi(f_0 + k f_s)t), \quad |k| \in \mathbb{N}$$



Le théorème !!

Théorème*

la fréquence d'échantillonnage F_s d'un signal doit être égale ou supérieure à 2 fois la fréquence maximale contenue dans ce signal $f_s > 2 f_{MAX}$.

* : Whittaker(s), Nyquist, Shannon, Kotel'nikov.

Exemple

$$s(t) = 3 \cdot \underbrace{\cos(50 \pi t)}_{F_1} + 10 \cdot \underbrace{\sin(300 \pi t)}_{F_2} - \underbrace{\cos(100 \pi t)}_{F_3}$$

Condition sur f_s ?

$$F_1 = 25 \text{ Hz}, F_2 = 150 \text{ Hz}, F_3 = 50 \text{ Hz}$$

f_{MAX}

$$f_s > 300 \text{ Hz}$$



Calcul de spectre

- Utilisation de la commande `fft`

Exemple

Complexe →

```
tfsignal = fft(signal);  
tfsignal_dB = 20*log10(abs(tfsignal))*Te;  
axe_f = (0:N-1)*Fe/N;
```

- **Attention:** FFT: $N=2^x$, sinon TFD classique
- $Y = \text{fft}(X, n)$ n-point DFT.

Si la longueur de X est $< n$, X est complété par des zéros jusqu'à n .

Si la longueur de X est $> n$, X est tronqué



Calcul de spectre

- Utilisation de la commande `fft`

Exemple

```
tic;for fi=1:length(f)
```

```
    Yc(1,fi)=y*cos(-2*pi*f(1,fi)*t'/(Npts));
```

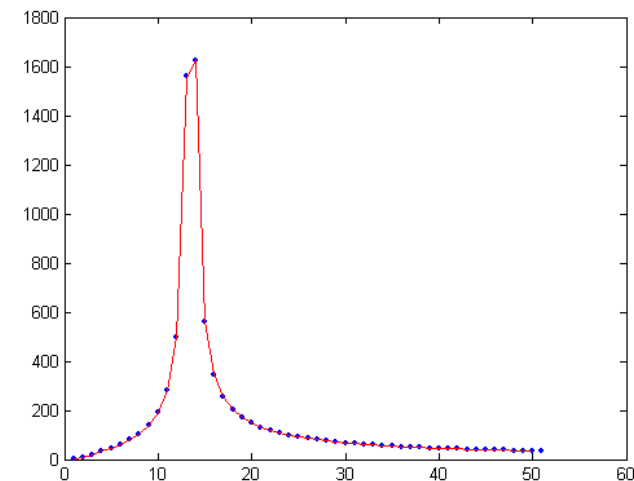
```
    Ys(1,fi)=y*sin(-2*pi*f(1,fi)*t'/(Npts));
```

```
end YFI=Yc+i*Ys; toc;
```

```
tic;Uc=fft(y);toc;
```

Sur cet exemple: cosinus a 100 pts

La fft est ~15 fois plus rapide ...





Fourier Transform

- A family of probing functions is also termed a *basis*. For discrete functions, a probing function consists of a sequence of values, or vector, and the integral becomes summation over a finite range:

$$X(m) = \sum_{n=1}^N x(n) f_m(n)$$

where $x(n)$ is the discrete waveform and $f_m(n)$ is a discrete version of the family of probing functions. This equation assumes the probe and waveform functions are the same length.



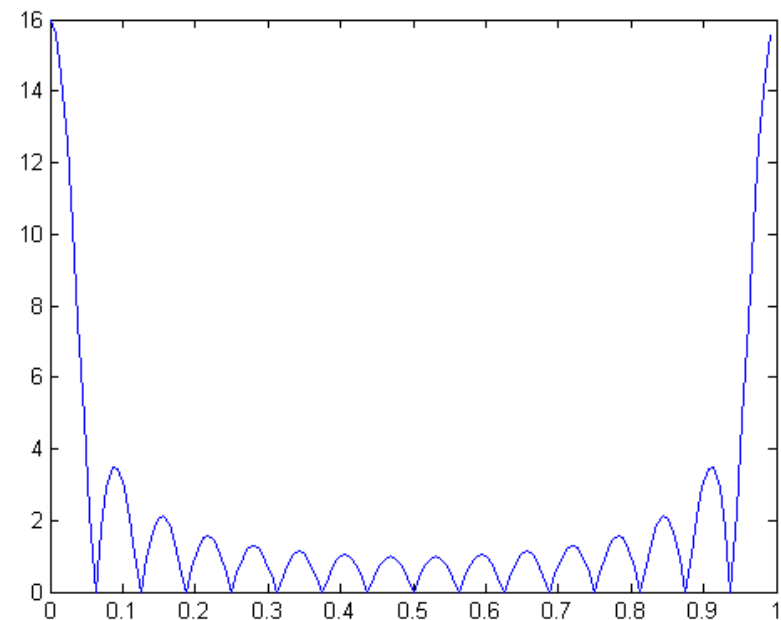
Les fenêtres d'apodisation

- Conserver N échantillons revient à multiplier le signal par une fenêtre rectangulaire

```
x=ones(1,16);
```

```
plot((0:127)/128,abs(fft(x,128))
```

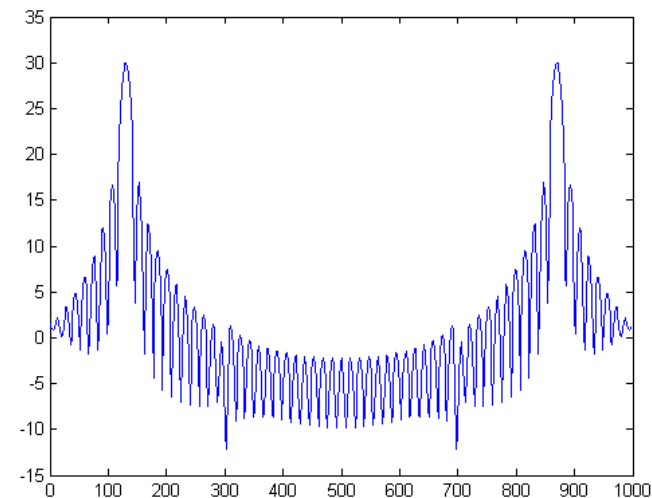
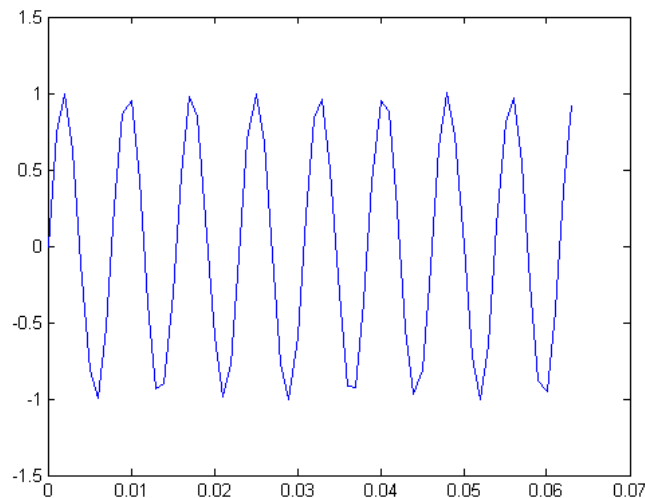
- Certains pics peuvent donc disparaître ou être atténués...





Exemple fenêtrage

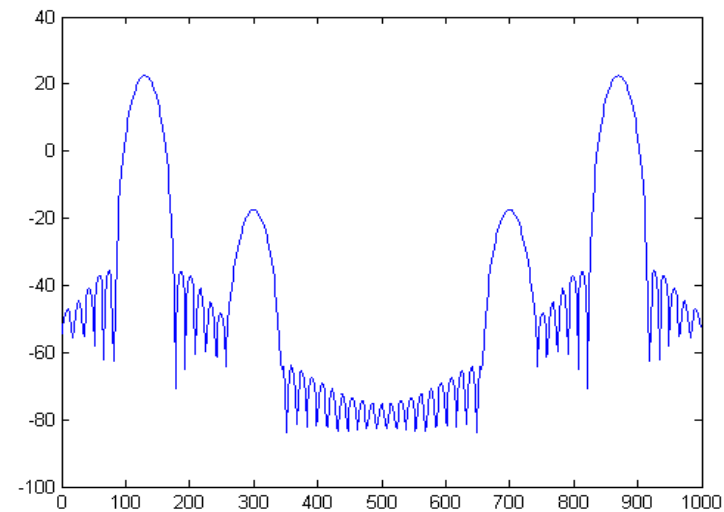
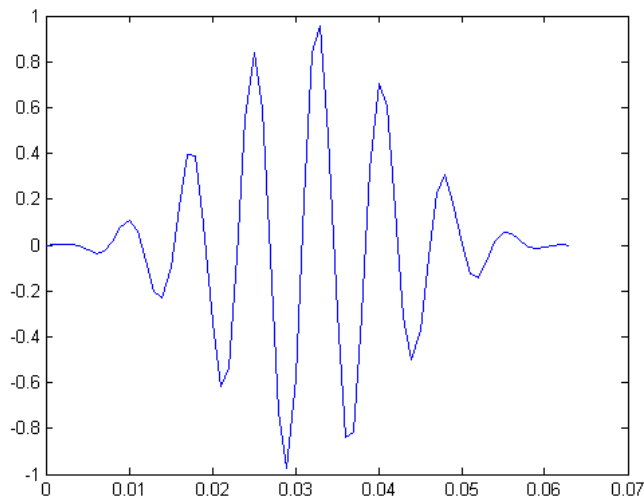
```
x=sin(2*pi*130*(0:63)/1000)+0.01*sin(2*pi*300*(0:63)/1000);  
plot((0:63)/1000,x)  
plot((0:511)/512*1000,20*log10(abs(fft(x,512))))
```





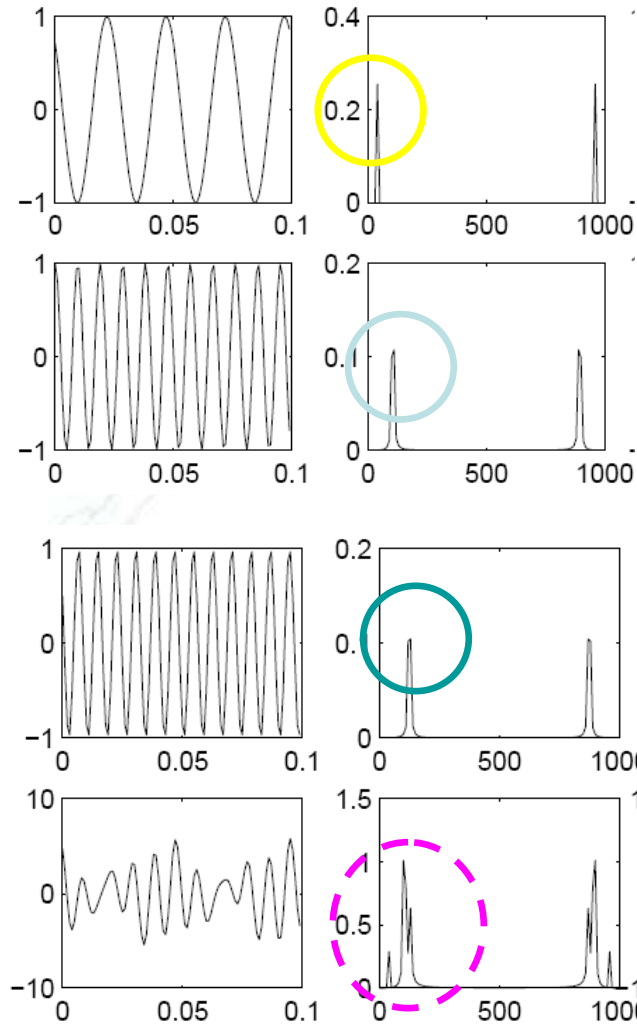
Solution

```
x=x'.*blackman(64);  
plot((0:511)/512*1000,20*log10(abs(fft(x,512))))
```





Exemple 2



On considère les quatre signaux suivant :

$$x_1(t) = \cos(2\pi f_1 t + p_1) \quad (1)$$

$$x_2(t) = \cos(2\pi f_2 t) \quad (2)$$

$$x_3(t) = \cos(2\pi f_3 t + p_3) \quad (3)$$

$$x_4(t) = x_1(t) + 3x_2(t) + 2x_3(t) \quad (4)$$

avec $f_1 = 40 \text{ Hz}$, $f_2 = 105 \text{ Hz}$, $f_3 = 125 \text{ Hz}$, $p_1 = \pi/4$ et $p_3 = \pi/3$.

1. tracer les $x_i(t)$, ($i = 1, 4$) entre $t = 0 \text{ s}$ et $t = 0.1 \text{ s}$ avec une fréquence d'échantillonnage $f_e = 1000 \text{ Hz}$.

$t = [0:1/f_e:t_{\max}-1/f_e];$

$N = t_{\max} \cdot f_e - 1$

$\text{freq} = [0:1/t_{\max}:N/t_{\max}];$



Ex2 Limitation 1

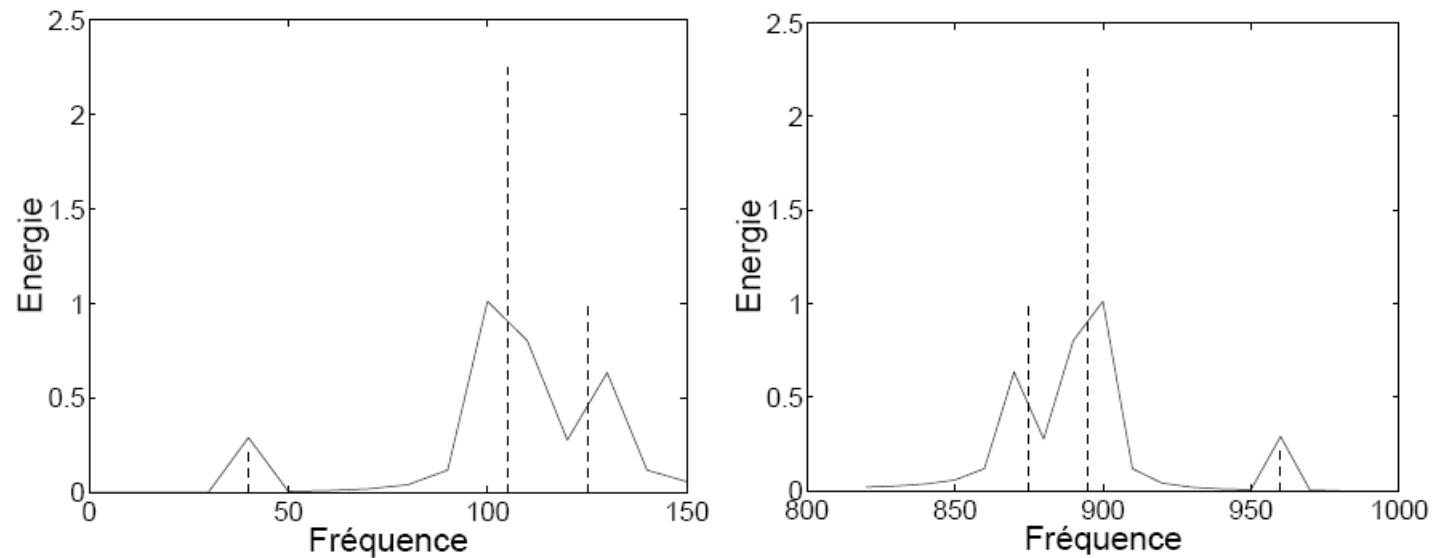


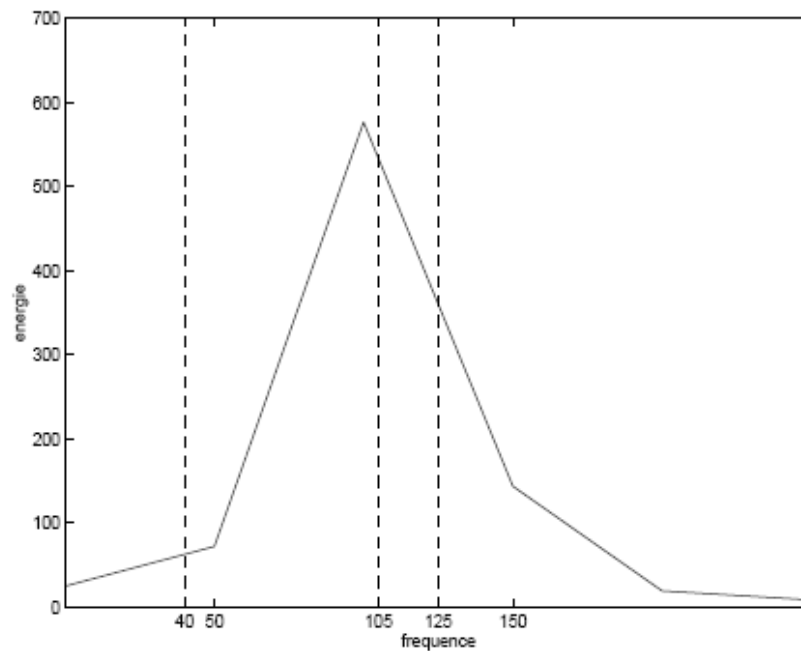
FIG. 2 – Spectre d'énergie du signal x_4 après agrandissement autour des zones intéressantes.

Echantillonnage trop grand $df=1/t_{max}=10$ ne permet pas de retrouver la valeur exacte du pic 3 = 125 Hz



Ex2 Limitation 2

Si on diminue la durée de l'enregistrement: de 0.1 à 0.05s ($N=100 \gg N=50$), on divise la résolution fréquentielle par 2: $\Delta f=20\text{Hz} \gg$ Un seul pic !!



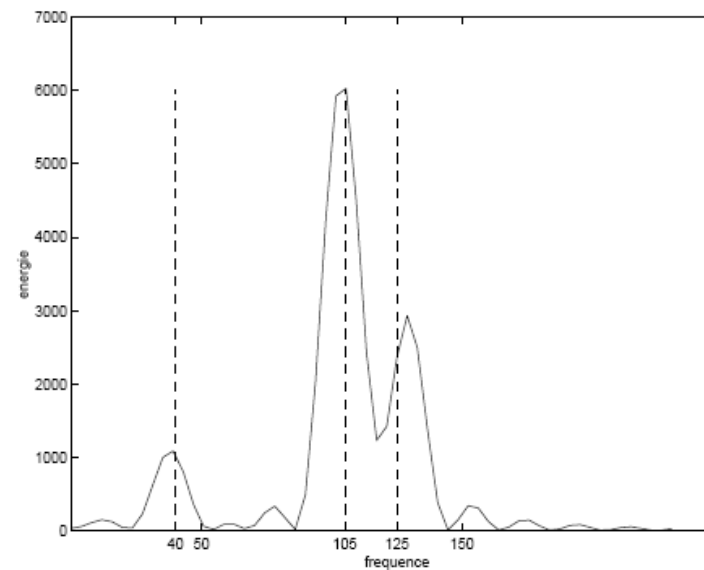
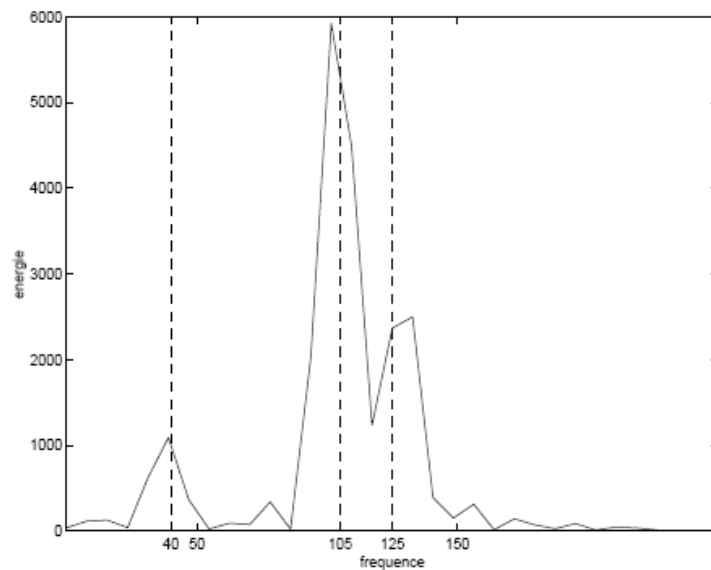


Ex2 solution 1

Une solution: on rajoute des zéros

Pour $N=50$ échantillons ($t=0.05s$)

On rajoute 78 zéros $N=128$ ou plus (256)





Conclusion

Lors d'un calcul de spectre il faut:

- Echantillonner de façon suffisamment fine pour éviter le repliement du spectre
- Avoir une durée d'enregistrement suffisamment longue pour avoir une bonne résolution spectrale



- Les bases « IDENTIFICATION »



Linéarité



Invariance



✚ **SLI** $\Leftrightarrow$ $y(t)$ et $x(t)$ sont reliés par une équation différentielle **linéaire** à **coefficients constants**

✚ nous supposons par la suite que le système **S** est linéaire et invariant.



□ Systèmes LTI

- Systèmes régis par une équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_m x^{(m)}(t) + \dots + b_1 x^{(1)}(t) + b_0 x(t) \quad \text{avec } m \leq n$$

On suppose les conditions initiales nulles i.e. $y^{(n-1)}(0) = \dots = y^{(1)}(0) = y(0) = 0$

$$x^{(m-1)}(0) = \dots = x^{(1)}(0) = x(0) = 0$$

En utilisant la TL, on a :

$$a_n s^n Y(s) + \dots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_m s^m X(s) + \dots + b_1 s X(s) + b_0 X(s)$$

$$(a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0) Y(s) = (b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0) X(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}$$

La fonction de transfert a la forme d'une fraction rationnelle : $H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$

$N(s)$ et $D(s)$: polynômes en s de degrés respectifs m et n



Exemple

Soit le système caractérisé par : $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = x(t)$

- Le système est-il stable ? Calculer la réponse impulsionnelle du système $h(t)$
- la réponse indicielle (réponse à l'échelon). Dans ce cas, préciser la valeur de la sortie y_∞ .

Solution :

On passe tout en Laplace : $s^2 Y(s) + s Y(s) + 6 Y(s) = X(s)$ donc $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 + s + 6}$

Calcul des pôles du système : $\Delta = b^2 - 4ac = -23 < 0$ $s_1, s_2 = \frac{-1 \pm i\sqrt{23}}{2}$

Les deux pôles sont à partie réelle négative; le système est donc stable.

La réponse indicielle $h(t)$ s'obtient à partir de $H(s)$ grâce à la décomposition en éléments simples :

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + s + 6} = \frac{A}{s - s_1} + \frac{B}{s - s_2} \quad \text{Après calcul, on trouve : } A = \frac{1}{s_1 - s_2}; B = \frac{1}{s_2 - s_1}$$

$$\text{Finalement : } h(t) = A e^{s_1 t} \Gamma(t) + B e^{s_2 t} \Gamma(t)$$

Réponse indicielle : $x(t) = \Gamma(t)$ donc $X(s) = 1/s \Rightarrow Y(s)(s^2 + s + 6) = 1/s$ Puis Laplace inverse ...

$$y_\infty : \text{Il faut utiliser le théorème de la valeur finale : } y_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} \frac{1}{s^2 + s + 6} = \frac{1}{6}$$



Rappels sur la décomposition en éléments simples

□ La marche à suivre :

Soit la fraction $S(p)$ suivante à décomposer :
$$S(p) = \frac{p^m + a_{m-1}p^{m-1} + \dots + a_2p^2 + a_1p + a_0}{p^n + b_{n-1}p^{n-1} + \dots + b_2p^2 + b_1p + b_0} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

1ère étape : Si $m > n$, il faut extraire la valeur entière : quotient des polynômes

On obtient alors $S(p) = C_0 + \frac{N_1(p)}{D_1(p)}$, et la valeur entière donne une impulsion de Dirac.

2ème étape : Calculer les pôles du système, cad les zéros du dénominateur.

- ◆ Si $n < 3$: facile
- ◆ Sinon, essayer des valeurs simples -1, 0, 1, 2, etc. et espérer ...

Rmq. : nous ne traiterons que les pôles simples de type $(p - p_1)$

3ème étape : Mettre sous la forme
$$S(p) = C_0 + \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} + \dots + \frac{A_n}{p - p_n}$$

On trouve les A_n en multipliant par $(p - p_n)$ et en prenant $p = p_n$:
$$A_n = \lim_{p \rightarrow p_n} \frac{N_1(p)}{D_1(p)}$$

Une fois les A_n trouvés, le laplacien inverse devient très facile !



Exemple

Soit le système caractérisé par : $\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = \ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) - x(t)$
Donner la réponse impulsionnelle $h(t)$ du système.

Solution

On passe en Laplace : $s^2 Y(s) + 3s Y(s) + 2Y(s) = s^2 X(s) + 2s X(s) - X(s)$

$$\text{D'où : } H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2 + 2s - 1}{s^2 + 3s + 2}$$

Degré num = degré den donc Valeur entière : $H(s) = \frac{(s^2 + 3s) + 2 - s - 3}{s^2 + 3s + 2} = 1 + \frac{-s - 3}{s^2 + 3s + 2}$

Calcul des pôles : $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \cdot 2 = 1 > 0$ donc $s_1, s_2 = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2} = -1, -2$

Partie réelle < 0 , Donc le système est stable. $H(s)$ peut s'écrire : $H(s) = 1 + \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$

Par identification et en multipliant par $(s+1)$ pris en $s=-1$, on trouve $A = -2$, puis $B = 1$

Finalement $H(s) = 1 + \frac{-2}{s+1} + \frac{1}{s+2}$ et grâce aux tables, on repasse en temporel :

$$h(t) = \delta(t) - 2u(t)e^{-t} + u(t)e^{-2t}$$



■ Example

A linear system is described by the differential equation

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 6y = 2\frac{du}{dt} + 1.$$

Find the system poles and zeros.

Solution: From the differential equation the transfer function is

$$H(s) = \frac{2s + 1}{s^2 + 5s + 6}. \quad (5)$$

which may be written in factored form

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{2} \frac{s + 1/2}{(s + 3)(s + 2)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{s - (-1/2)}{(s - (-3))(s - (-2))}. \end{aligned} \quad (6)$$

The system therefore has a single real zero at $s = -1/2$, and a pair of real poles at $s = -3$ and $s = -2$.

■ Example

A system has a pair of complex conjugate poles $p_1, p_2 = -1 \pm j2$, a single real zero $z_1 = -4$, and a gain factor $K = 3$. Find the differential equation representing the system.

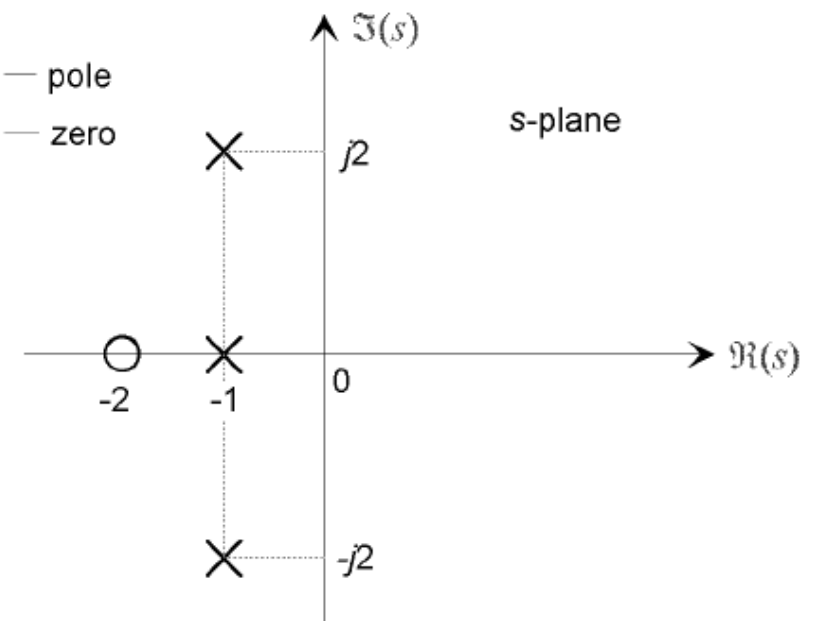
Solution: The transfer function is

$$\begin{aligned} H(s) &= K \frac{s - z}{(s - p_1)(s - p_2)} \\ &= 3 \frac{s - (-4)}{(s - (-1 + j2))(s - (-1 - j2))} \\ &= 3 \frac{(s + 4)}{s^2 + 2s + 5} \end{aligned} \quad (7)$$

and the differential equation is

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + 5y = 3 \frac{du}{dt} + 12u$$

× — pole
○ — zero



■ Example

Comment on the expected form of the response of a system with a pole-zero plot shown in Fig. 3 to an arbitrary set of initial conditions.

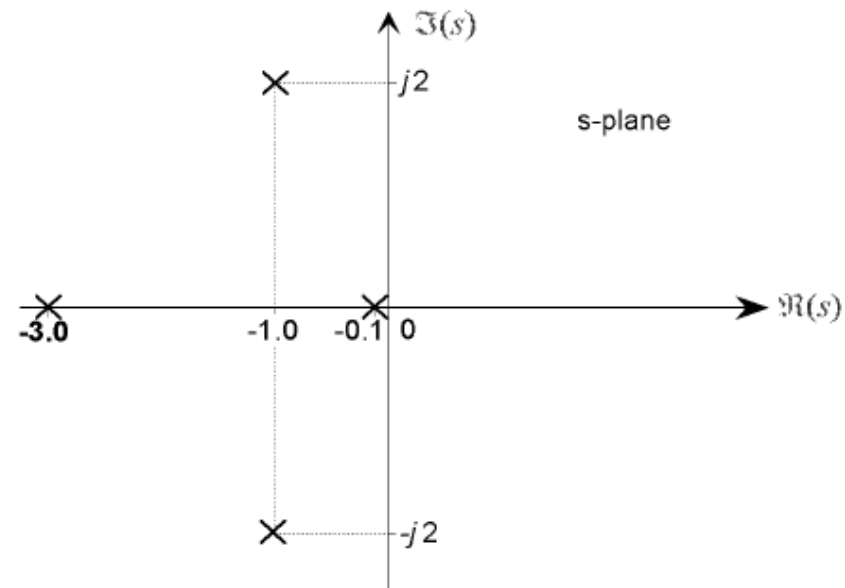


Figure 3: Pole-zero plot of a fourth-order system with two real and two complex conjugate poles.

Solution: The system has four poles and no zeros. The two real poles correspond to decaying exponential terms $C_1 e^{-3t}$ and $C_2 e^{-0.1t}$, and the complex conjugate pole pair introduce an oscillatory component $A e^{-t} \sin(2t + \phi)$, so that the total homogeneous response is

$$y_h(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-0.1t} + A e^{-t} \sin(2t + \phi) \quad (12)$$

Although the relative strengths of these components in any given situation is determined by the set of initial conditions, the following general observations may be made:

1. The term e^{-3t} , with a time-constant τ of 0.33 seconds, decays rapidly and is significant only for approximately 4τ or 1.33 seconds.
2. The response has an oscillatory component $A e^{-t} \sin(2t + \phi)$ defined by the complex conjugate pair, and exhibits some overshoot. The oscillation will decay in approximately four seconds because of the e^{-t} damping term.
3. The term $e^{-0.1t}$, with a time-constant $\tau = 10$ seconds, persists for approximately 40 seconds. It is therefore the *dominant* long term response component in the overall homogeneous response.

Représentation en pôle d'une fonction de transfert

The corresponding frequency response function and transfer function are

$$H(\omega) = \frac{1/m}{\omega_n^2 - \omega^2 + j2\zeta\omega_n\omega}$$

$$H(s) = \frac{1/m}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Note that there are only poles in the s -plane for this case as shown in Figure 4.30.

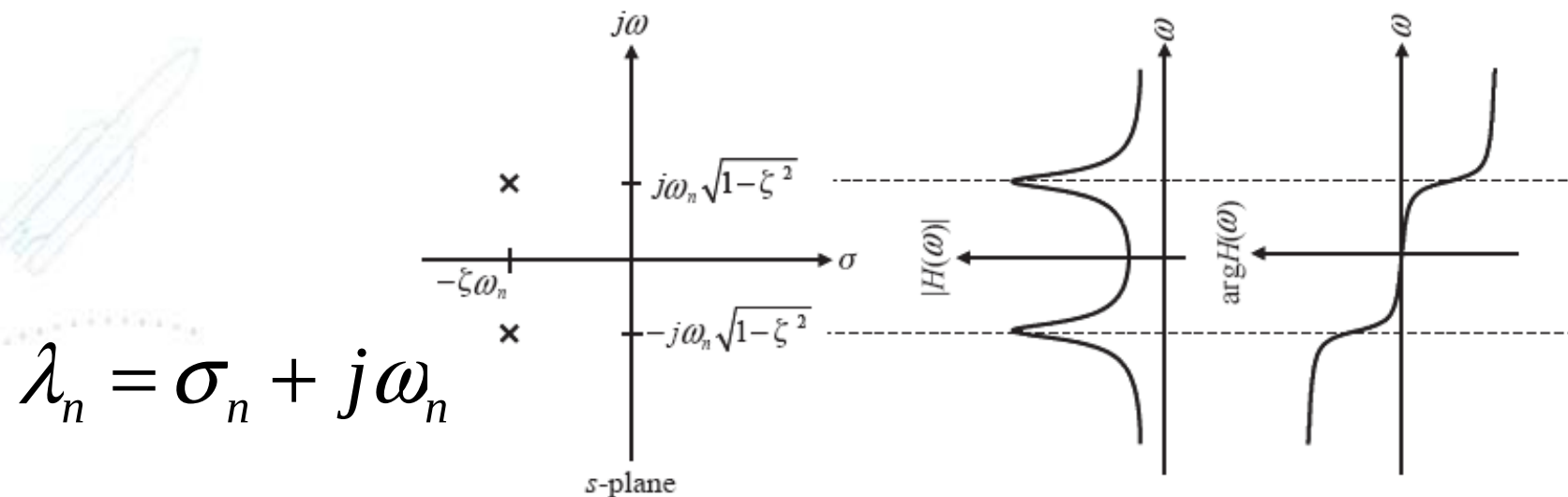
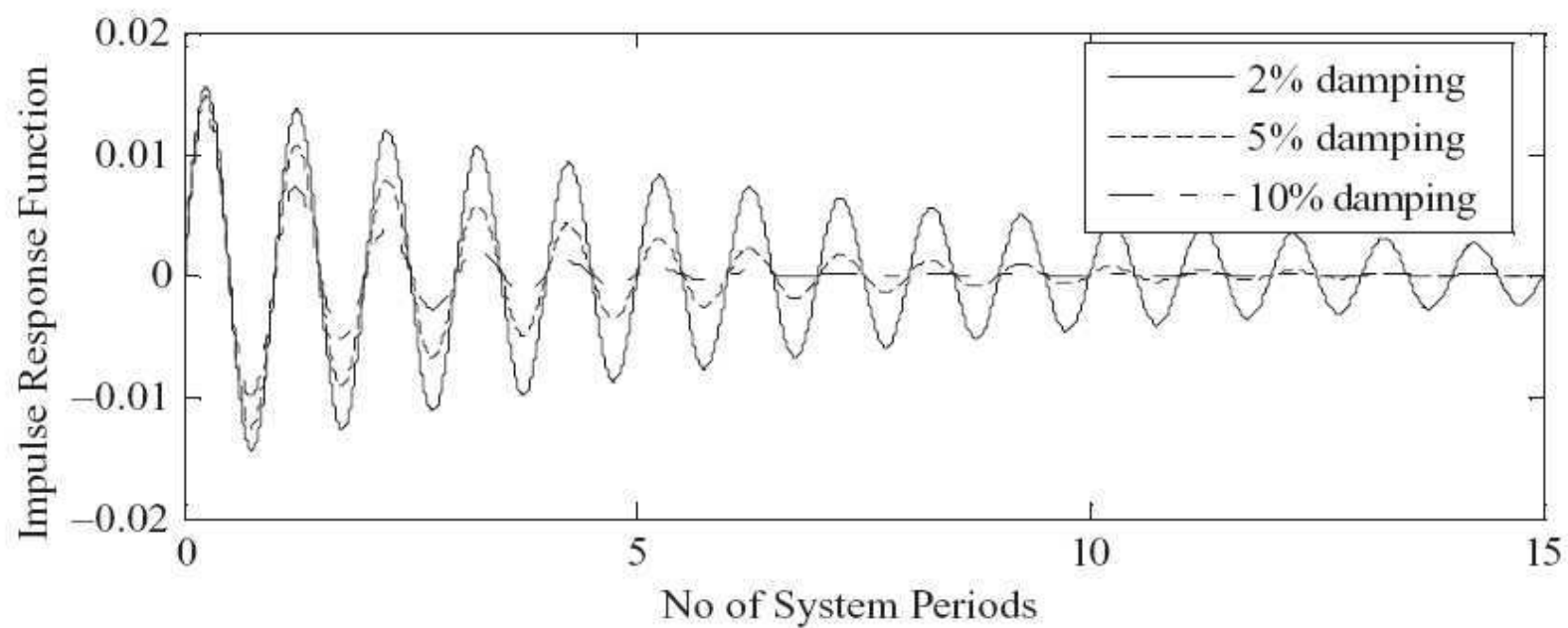


Figure 4.30 Representation in the s -plane and its corresponding $H(\omega)$ for Example 2

2 approches d'identification: temporelle ou fréquentielle

$$h(t) = x_{\text{IRF}}(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin\omega_d t.$$





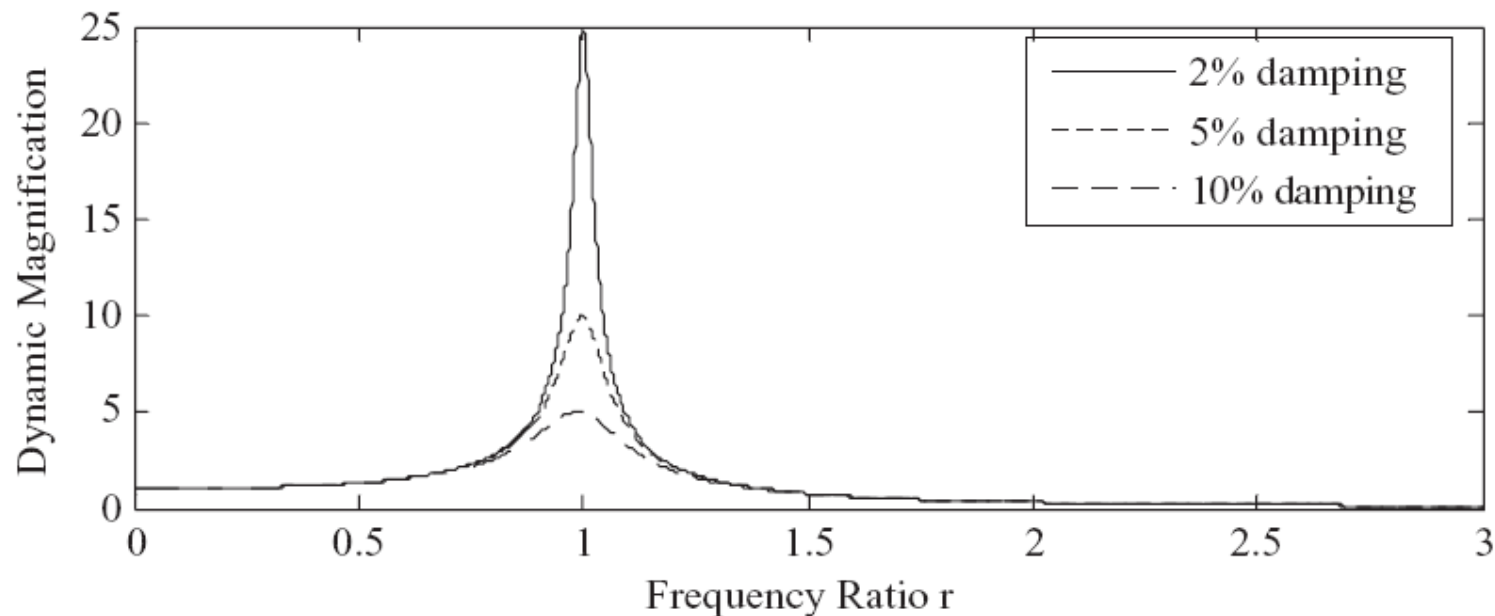
2 approches d'identification: temporelle ou fréquentielle

$$H(p) = \frac{X(p)}{F(p)} = \frac{1}{Mp^2 + Cp + K}$$

$$H_D(\omega) = \frac{\tilde{X}}{F} = \frac{1}{k - \omega^2 m + i\omega c}$$

or in nondimensional form

$$H_D(\omega) = \frac{1/k}{1 - (\omega/\omega_n)^2 + i2\zeta (\omega/\omega_n)} = \frac{1/k}{1 - r^2 + i2\zeta r} \quad \text{where } r = \frac{\omega}{\omega_n}.$$



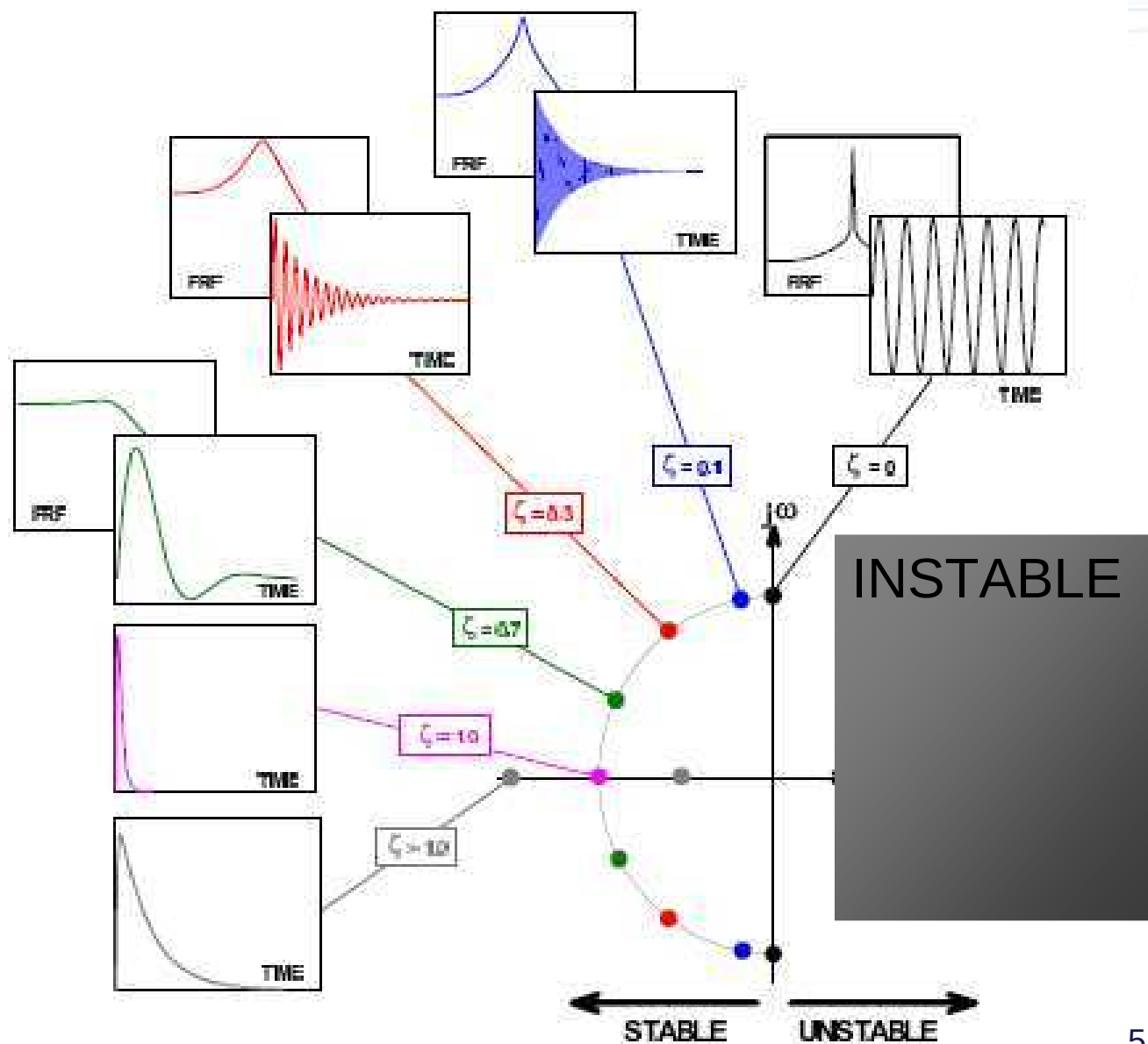


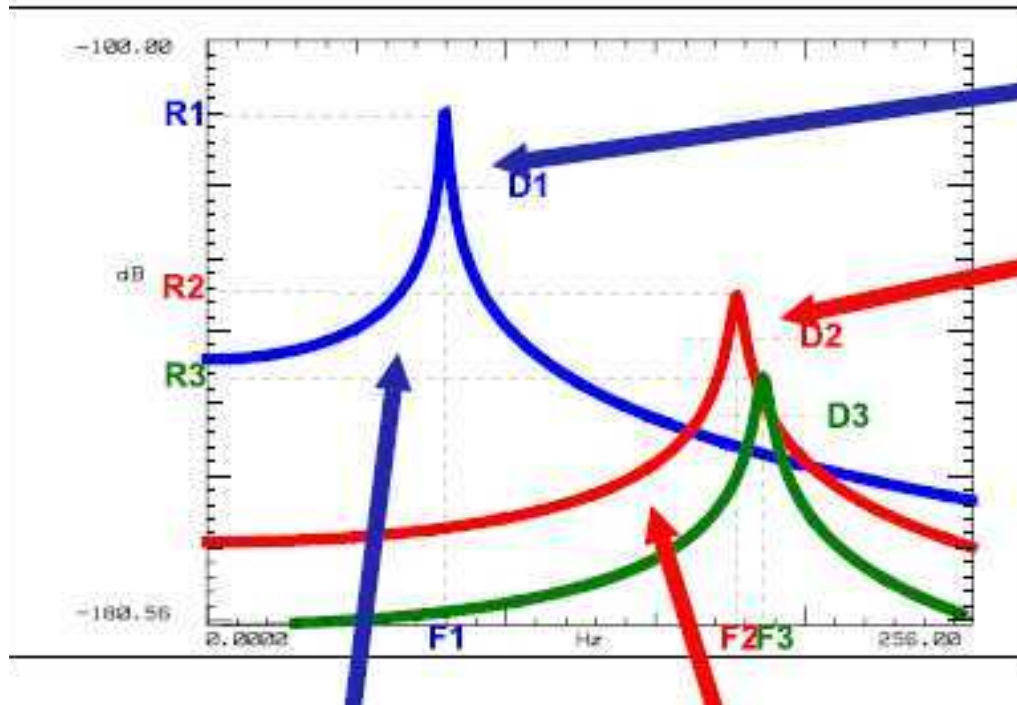
2 approches : locale (**SDOF**) ou globale (**MDOF**)

Une approche SDOF estime f_k et ξ_k
Pour chaque resonance séparément
Puis on moyenne sur toutes les FRFs

Critère semi globale pour une FRF
mais tous les modes sur une certaine bande passante

Une approche MDOF estime Globalement (en
terme de moindre carrés) f_k et ξ_k





$$H1(p) = \frac{1/M}{(p - \lambda_1)(p - \lambda_1^*)} = \frac{c_{11}}{(p - \lambda_1)} + \frac{c_{12}}{(p - \lambda_1^*)}$$

$$H2(p) = \frac{1/M}{(p - \lambda_2)(p - \lambda_2^*)} = \frac{c_{21}}{(p - \lambda_2)} + \frac{c_{22}}{(p - \lambda_2^*)}$$

Decomposition: chaque resonance est isolé
et on reconstruit un résonateur à 1DDL puis
on somme

$$[H(\omega)] = \sum_{k=1}^N \left[\frac{A(k)}{(j\omega(k) - \lambda(k))} + \frac{A(k)^*}{(j\omega(k) - \lambda(k)^*)} \right]$$

Justification des résidus

$$H_1(p) = \frac{1/M}{(p - \lambda_1)(p - \lambda_1^*)} = \frac{c_{11}}{(p - \lambda_1)} + \frac{c_{12}}{(p - \lambda_1^*)}$$

$$H_1^*(s - \lambda_1)$$

$$\left. \frac{1/M}{(s - \lambda_1^*)} \right|_{s=\lambda_1} = c_1 + \left[\frac{c_2(s - \lambda_1)}{(s - \lambda_1^*)} \right]_{s=\lambda_1}$$

$$\frac{1/M}{(\lambda_1 - \lambda_1^*)} = c_1 \quad \longrightarrow \quad c_1 = \frac{1/M}{(\sigma_1 + j\omega_1) - (\sigma_1 - j\omega_1)} = \frac{1/M}{j2\omega_1} = A_1$$

$$c_2 = \frac{1/M}{-j2\omega_1} = A_1^*$$

In general, for a multiple degree of freedom system, the residue A_1 can be a complex quantity.

But, as shown for a single degree of freedom system A_1 is purely imaginary (represent modeshapes).

Therefore:

$$H(s) = \frac{A_1}{(s - \lambda_1)} + \frac{A_1^*}{(s - \lambda_1^*)}$$



Hypothèse AME

- Incertitudes Bruits entrée/Sortie
- Effet moyenne pour des excitations Random
- Fenêtrage
- Résolution Fréquentielle

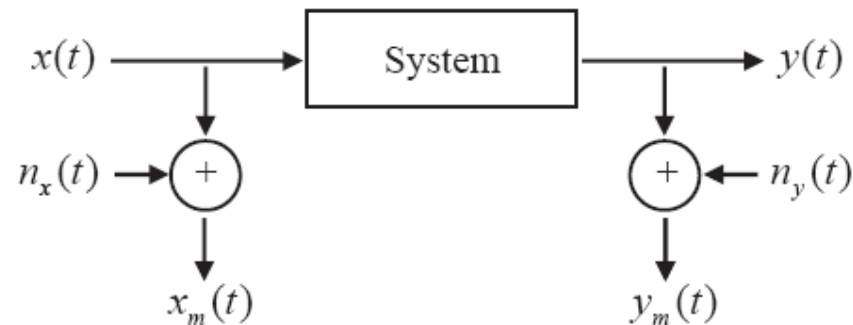


Figure 1.3 A single activator/response model with additive noise on measurements



- Les bases « STOCHASTIQUE »



Signaux aléatoires

- Exemple 1 sous matlab
- Compréhension d'un système sous excitation aléatoire

Signal aléatoire = signal dont on ne sait pas à priori la valeur qu'il va prendre

On peut observer une REALISATION d'un signal aléatoire, on ne pouvait pas deviner quelle réalisation on allait observer

On a observé ça

ç 'aurait pu être ça





Power Spectral Density (PSD)

The Auto- or Power Spectral Density (PSD), $S_{xx}(\omega)$, of a signal $x(t)$ is defined as the Fourier Transform of the Autocorrelation Function i.e.

$$S_{xx}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

The Auto-Spectral Density is a real and even function of frequency, and does in fact provide a description of the frequency composition of the original signal. For an acceleration signal for example, it has units of $(m/s^2)^2/(rad/s)$.

The inverse transformation gives:

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega$$

Thus, it comes: $R_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) d\omega = \bar{X}^2$

A similar concept can be applied to a pair of functions such as $x(t)$ and $f(t)$ to produce cross correlation and cross spectral density functions.

The cross correlation function, $R_{xf}(t)$, is defined as:

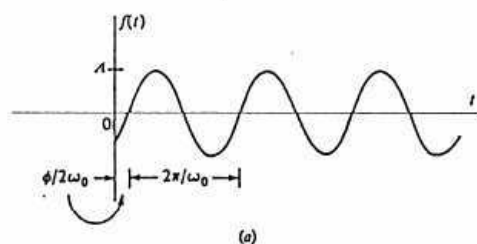
$$R_{xf}(\tau) = E[x(t) \cdot f(t + \tau)]$$

and the cross spectral density is defined as its Fourier Transform:

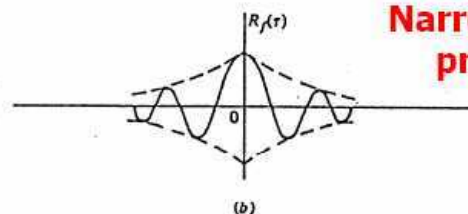
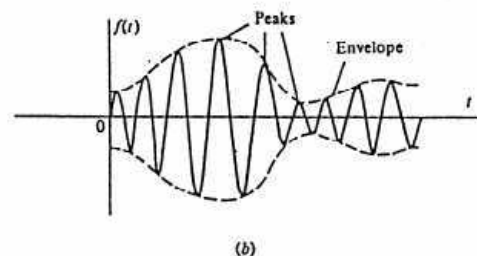
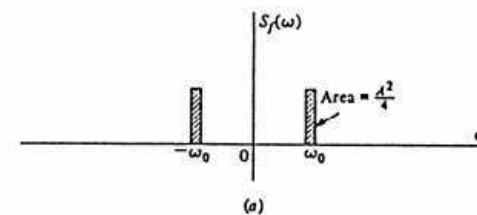
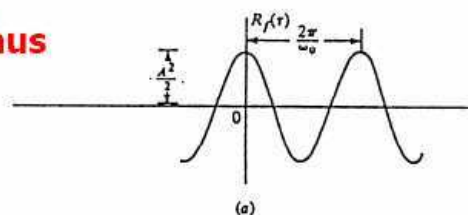
$$S_{xf}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xf}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

Time Domain

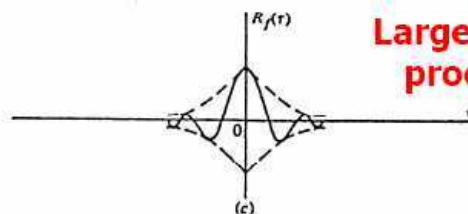
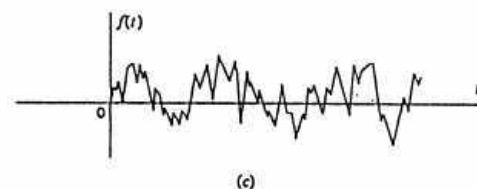
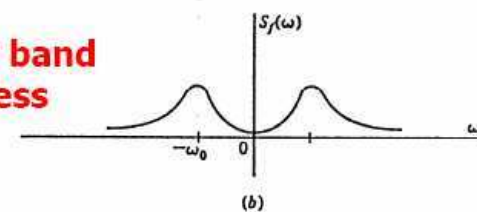
Autocorrelation function Power Spectral Density



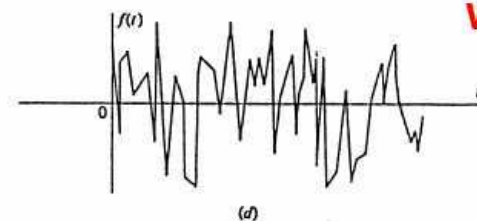
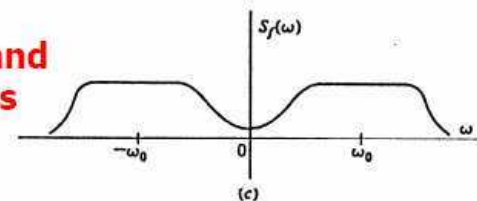
sinus



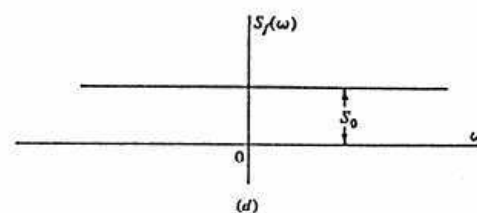
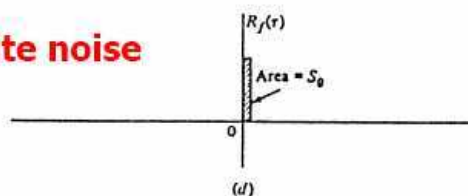
Narrow band process

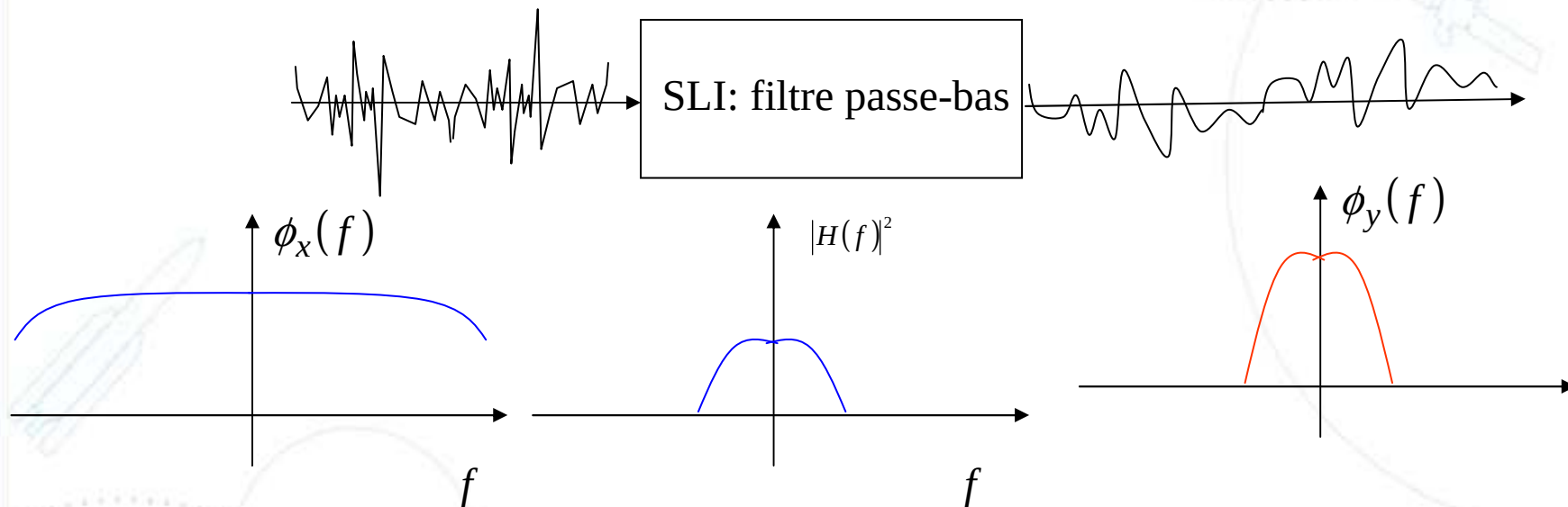


Large band process



White noise





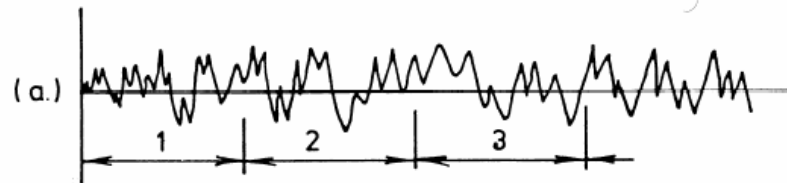
➡ possibilité de *mesurer* $|H(f)|$ par la réponse d'un système à un bruit blanc!



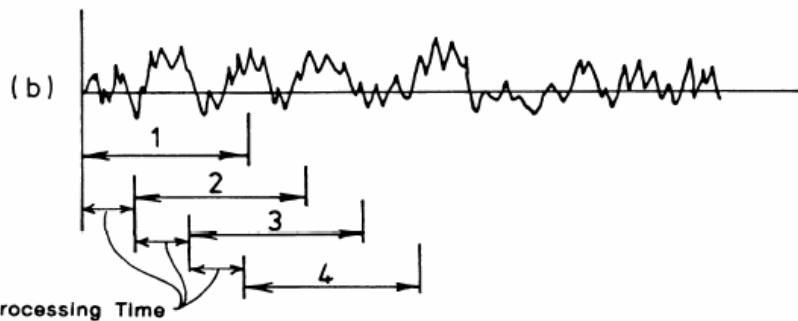
Averaging

Need to enhance the quality of the measurements in terms of reliability and accuracy. A high number of samples allows to remove spurious random noise from the signals.

There are several options which can be selected when setting an analyser into average mode (exponential, linear).



Different interpretations
of multi-sample averaging



(a) Sequential

(b) Overlap