

Notes sur l'identification modale

Prof. Joseph Morlier, ISAE/SUPAERO

Cette note de cours est issue de mes travaux de recherche en identification modale (introduction de mon mémoire de HDR). C'est une version β . Merci de me faire un retour lors du cours SM310 Aeroelasticite. Elle peut vous aider notamment lors du BE3 identification d'un système SISO. Very preliminary lecture note on modal identification

Table des matières

1	Problème inverse, Mapping, Échantillonnage	2
1.1	Problème inverse	2
1.2	Mapping de données	10
1.3	Echantillonnage	13
2	Techniques d'analyse modale (spectrale)	16
2.1	Traitement du signal (Analyse de <i>Fourier</i>)	16
2.2	Système Linéaire Invariant	18
2.3	Des signaux déterministes aux signaux aléatoires	24
2.4	Des systèmes dynamiques aux vibrations	30
2.5	Modélisation unificatrice sous forme d'équations d'état	43
3	Techniques d'identification modale (système)	52
3.1	Etat de l'art	52
3.2	Liens entre l'identification et l'analyse modale expérimentale	59

1 Problème inverse, Mapping, Échantillonnage

1.1 Problème inverse

La formulation la plus générale d'un problème inverse peut se définir par l'évaluation d'une certaine grandeur physique \mathbf{p} inaccessible à l'expérience à partir de la mesure d'une autre grandeur \mathbf{d} directement accessible à l'expérience, connaissant un modèle mathématique du problème direct qui donne explicitement \mathbf{d} à partir de \mathbf{p} ; ce que l'on note symboliquement $\mathbf{d} = \mathbf{g}(\mathbf{p})$ ou implicitement $\mathbf{g}(\mathbf{p}, \mathbf{d}) = \mathbf{0}$. Les notions de problème direct et de problème inverse peuvent se reformuler à l'aide de l'artifice de présentation assez commode utilisant la notion de système (figure 1). La résolution d'un problème mécanique ou thermique peut être vu sous l'angle du calcul de la réponse \mathbf{d} (déplacement, contrainte, température,...) à des sollicitations \mathbf{X} (forces, conditions aux limites, sources, conditions initiales...).

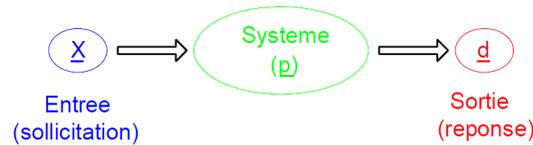


Fig. 1: Approche système [Bonnet, 2009]

L'inversion est souvent reformulée comme une minimisation d'une fonction coût J (et donc un problème d'optimisation en norme l_2 car différentiable)

$$p^* = \operatorname{argmin}(J(p)), J(p) = \|d(p; X) - d^{obs}\|$$

Le **problème inverse** se définit comme la recherche d'une grandeur décrite par une fonction (champs de modules, forces ou sources dépendant du temps, forme ou topologie du domaine...) : on a donc un grand nombre d'inconnues et une très forte sensibilité aux incertitudes (régularisation nécessaire). Le **problème d'identification** lui, peut se définir par la recherche d'une grandeur décrite par un ensemble fini de paramètres (par exemple associés à des modèles de comportement) : on a donc un nombre d'inconnues restreint et une faible sensibilité aux incertitudes. L'analyse des problèmes inverses a mis en évidence deux considérations importantes. Premièrement, il n'est pas possible d'attaquer un problème inverse si l'on n'a pas préalablement une connaissance approfondie du problème direct, c'est-à-dire de la manière dont le système répond aux sollicitations qu'on lui impose. Deuxièmement, le caractère mal posé du problème mathématique (au sens de *Hadamard*) entraîne qu'une mesure, en tenant compte de la plage d'incertitude qui l'accompagne, peut correspondre à un grand nombre de solutions possibles, pouvant être fort éloignées les unes des autres. L'ouvrage [Bui et Bui, 1994] constitue une excellente introduction aux problèmes inverses en mécanique des matériaux.

En vibration de structures, nous nous retrouvons souvent face à des problèmes inverses. Connaissant *a priori* beaucoup d'informations sur la structure (géométrie, matériaux, conditions aux limites), il est aisé de calculer le comportement dynamique de celle-ci à partir de l'équation 1. Nous obtenons donc les données modales (sortie du système) à partir d'un modèle continu ou discrétisé (données surabondantes).

$$[K] \{X\} - \omega^2 [M] \{X\} = 0 \rightarrow \omega, \{X\} \quad (1)$$

Réciproquement, les données modales expérimentales $\omega, \{X\}$ permettent de compenser un certain degré d'ignorance sur le système et peuvent donc être utilisées généralement, pour recalibrer des modèles (endommagement, dégradation au cours du fonctionnement) : $[K]$ et $[M]$ dépendent des paramètres $E(x)$, $I(x)$, etc...

Pour illustrer ce concept, on va s'attacher à décrire un premier exemple issu du cours de l'école Polytechnique [Bonnet, 2009] sur la sensibilité aux données imparfaites. Nous allons considérer un exemple obtenu par simulation numérique (sain) et "simuler" les données expérimentales en ajoutant un bruit blanc gaussien : $(noisydata) = (truedata) \times (1 + r)$ où r est une variable aléatoire uniforme de moyenne nulle et d'écart-type 10^{-3} .

Les données sont les vibrations en flexion d'une poutre d'*Euler-Bernoulli* droite encastree-libre discrétisée en 26 éléments finis (figure 2). Les n_f premières fréquences propres $f_i (1 \leq i \leq n_f)$ sont données, ainsi que les valeurs en n_c capteurs des déplacements verticaux modaux $u_{ij} (1 \leq j \leq n_c)$ correspondants (figure 2).

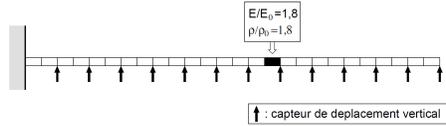


Fig. 2: Reconstruction de la rigidité de flexion EI et la masse linéique ρ d'une poutre EF [Bonnet, 2009]

Ces données sont utilisées pour la reconstruction de la rigidité de flexion EI et la masse linéique ρ , inconnues et supposées constantes par élément. On réécrit donc un problème d'optimisation (minimisation d'un écart quadratique) :

$$\min_{EI, \rho} \sum_{i=1}^{n_f} \left([f_i^{mes} - f_i(EI, \rho)]^2 + \sum_{j=1}^{n_c} [u_{ij}^{mes} - u_{ij}(EI, \rho)]^2 \right)$$

Dans cet exemple, 10 modes sont mesurés en 13 capteurs, soit au total 140 données (en comptant les fréquences mesurées). Des données synthétiques ont été créées pour $EI(x) = EI_0$ et $\rho(x) = \rho_0$, uniformes à l'exception de l'élément 16, sur lequel $EI(x) = 1.8EI_0$ et $\rho(x) = 1.8\rho_0$. L'identification des paramètres de raideurs est donnée en figure 3.

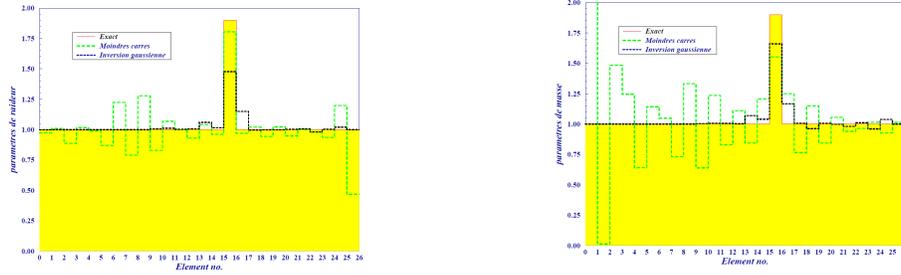


Fig. 3: Reconstruction de rigidité et de masse linéique d’une poutre : simulation avec données exactes et bruitées. [Bonnet, 2009]

Tandis que l’inversion des données exactes conduit à un résultat parfait, on voit que le bruit, pourtant faible, dégrade la qualité de la reconstruction (notamment en ce qui concerne la masse volumique). Cette forte dépendance aux données imprécises peut être mathématiquement mise en évidence d’une manière plus générale. La notion d’incertitudes sur les mesures fait appel directement à la notion de robustesse bien connue des automaticiens [Gu *et al.*, 2005, Benaroya, 2004] ou mécaniciens [Puel, 2007, Vayssade, 2004].

Un autre exemple numérique [Morlier, 2004] porte sur l’identification des conditions aux limites à partir de mesures de fréquences de résonance. Une des principales hypothèses de l’analyse de structure classique est que les liaisons (ou assemblages) sont parfaitement rigides ou parfaitement charnières. Cependant, dans les structures réelles, ces connections ne se comportent pas de manière parfaite mais plutôt comme un spectre large de connections allant de supportées (charnières), semi-rigides (ou flexibles) à encastées.

On peut ainsi modéliser une liaison semi-rigide par une raideur (ressort) de rotation, caractérisée par une droite Moment en fonction de l’angle de rotation, où la valeur k de la raideur est égale à la pente de cette courbe. L’amplitude de la valeur de k ne détermine pas le comportement de la liaison, c’est plutôt le rapport : rigidité du ressort sur rigidité de flexion de la poutre EI/L . Ce rapport peut se définir comme la rigidité de liaison (joint stiffness en anglais [McGuire, 1995, Olgac et Jalili, 1998]).

On peut tout d’abord réécrire la formulation des déformées sous la forme :

$$Y_i(x) = D_1(\cos(\lambda_i x) + \cosh(\lambda_i x)) + D_2(\cos(\lambda_i x) - \cosh(\lambda_i x)) \\ + D_3(\sin(\lambda_i x) + \sinh(\lambda_i x)) + D_4(\sin(\lambda_i x) - \sinh(\lambda_i x)) \quad (2)$$

Les combinaisons de D_i peuvent représenter toutes les conditions limites classiques. Pour prendre en compte les imperfections d’encastrement dans la modélisation, on peut étudier la poutre flexible avec des conditions limites élastiques (figure 4).

Pour notre exemple, nous étudierons un poutre discrétisée en 60 éléments finis ayant les caractéristiques suivantes :

$L=1200 \text{ mm}$, $h=b=200 \text{ mm}$, $E=10000 \text{ MPa}$, $\rho = 500 \text{ kg/m}^3$, $k_{TL} = k_{TR} = \text{raideur infinie}$, numériquement $5e20 \text{ N/m}$. La variable de notre problème est la rigidité de rotation $k = k_{\theta R} = k_{\theta L}$.

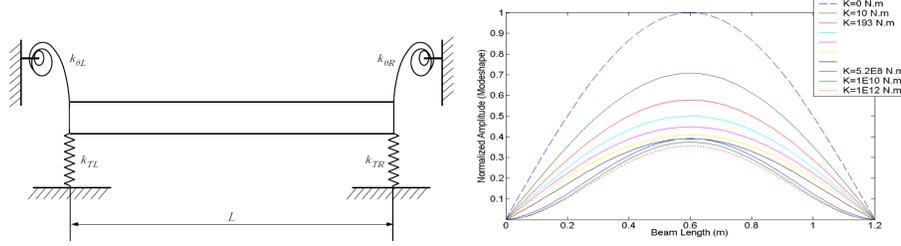


Fig. 4: poutre avec des conditions limites élastiques modélisée avec 60 EF, et évolution de la déformée en fonction de la rigidité de liaison k

En traçant la déformée normalisée du premier mode en fonction de la rigidité k , on peut s'apercevoir que le comportement de la poutre varie bien de **Supportée-Supportée SS** ($k=0 \text{ N.m}$ en bleu) à **Encastrée-Encastrée EE** ($k=1e12 \text{ N.m}$).

On voit sur la figure 4 que la déformée du premier mode est symétrique. Le comportement de la poutre met en évidence les 3 conditions limites : **SS**, **EE** et **Semi-Rigide SR**.

k_{TR} et $k_{\theta R}$, k_{TL} et $k_{\theta L}$ sont les raideurs linéaires et de rotation respectivement à gauche et à droite de la poutre. Quand ces ressorts sont constants et paramétrés comme une combinaison de zéro et d'infini, il en résulte les conditions initiales idéales (ou classiques).

Pour des raisons de simplification symbolique, on définit les rigidités adimensionnelles :

$$\beta_1 = \frac{k_{\theta L} L}{EI}, \beta_2 = \frac{k_{TL} L^3}{EI}, \beta_3 = \frac{k_{\theta R} L}{EI}, \beta_4 = \frac{k_{TR} L^3}{EI} \quad (3)$$

Les équations de la dynamique exprimant les conditions limites générales s'écrivent donc :

$$\begin{cases} x = 0 & x = L \\ Y''(x) - \frac{\beta_1}{L} Y'(x) = 0 & Y''(x) + \frac{\beta_3}{L} Y'(x) = 0 \\ Y'''(x) + \frac{\beta_2}{L^3} Y(x) = 0 & Y'''(x) - \frac{\beta_4}{L^3} Y(x) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

En insérant l'équation 3 dans ces conditions limites, on obtient un système de 4 équations homogènes pour le matrice D $[D_1, D_2, D_3, D_4]$ donné par $A.D = 0$ avec A :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{\beta_1}{\lambda L} & 0 \\ \frac{\beta_2}{(\lambda L)^3} & 0 & 0 & -1 \\ -C+Ch-\frac{\beta_3}{\lambda L}(S-Sh) & -C-Ch-\frac{\beta_3}{\lambda L}(C+Ch) & -S+Sh-\frac{\beta_3}{\lambda L}(C+Ch) & -S-Sh-\frac{\beta_3}{\lambda L}(C-Ch) \\ S+Sh-\frac{\beta_4}{(\lambda L)^3}(C+Ch) & S-Sh-\frac{\beta_4}{(\lambda L)^3}(C-Ch) & -C+Ch-\frac{\beta_4}{(\lambda L)^3}(S+Sh) & -C-Ch-\frac{\beta_4}{(\lambda L)^3}(S+Sh) \end{bmatrix}$$

où λL est la fréquence adimensionnelle et $C = \cos(\lambda L)$, $Ch = \cosh(\lambda L)$, $S = \sin(\lambda L)$, $Sh = \sinh(\lambda L)$.

On obtient l'équation caractéristique en posant $\det(A) = 0$, celle-ci étant très compliquée, on la réécrit comme :

$$\begin{aligned} & \tilde{a}\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4 + \tilde{b}\beta_1\beta_3(\beta_2 + \beta_4) + \tilde{c}\beta_2\beta_4(\beta_1 + \beta_3) + \tilde{d}(\beta_1\beta_2 + \beta_3\beta_4) \\ & + \tilde{e}(\beta_1\beta_4 + \beta_2\beta_3) + \tilde{f}(\beta_1\beta_3) + \tilde{g}(\beta_2\beta_4) + \tilde{h}(\beta_1 + \beta_3) + \tilde{k}(\beta_2 + \beta_4) + \tilde{l} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

où \tilde{a}, \dots sont des fonctions trigonométriques de la fréquence adimensionnelle donné ci dessous :

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= 1 - CCh & \tilde{b} &= (\lambda L)^3(SCh + CSh) \\ \tilde{c} &= \lambda L(SCh - CSh) & \tilde{d} &= (\lambda L)^4(1 + CCh) \\ \tilde{e} &= 2(\lambda L)^4CCh & \tilde{f} &= -2(\lambda L)^6SSh \\ \tilde{g} &= 2(\lambda L)^2SSh & \tilde{h} &= -(\lambda L)^7(SCh + CSh) \\ \tilde{k} &= (\lambda L)^5(CSh - SCh) & \tilde{l} &= (\lambda L)^8(1 - CCh) \end{aligned}$$

L'équation 5 représente une forme générale de l'équation caractéristique pour une poutre d'*Euler-Bernoulli*. Comme nous l'avons déjà dit, une combinaison des β_i de valeur zéro ou infini correspond à des conditions limites classiques. Par exemple, reprenons la poutre doublement encastree : les β_i sont ici infini et l'équation 5 est réduite à* :

$$\tilde{a} = 1 - CCh = 0 \quad (6)$$

Olgac et al [Olgac et Jalili, 1998] proposent une solution pour identifier les conditions limites à savoir estimer les coefficients β_i à partir des fréquences

*. Cette équation est celle classiquement utilisée pour l'équation caractéristique d'une poutre encastree-encastree.

modales. Cette analyse inverse impose en fait les 4 premières fréquences dans l'équation caractéristique générale, ce qui induit un système d'équation non linéaire de variables β_i . On peut poser le problème par :

$$f(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = 0 \quad (7)$$

L'équation 7 exprime le fait que l'on peut estimer les 4 rigidités de liaisons d'une poutre flexible à partir des 4 premiers modes de vibrations. Or on sait que plus le degrés des modes augmentent plus les déformées sont sensibles au bruit, et donc reflètent moins la réalité. Ainsi on a choisit d'expliquer pas à pas le problème d'une poutre **SS** avec rigidités de rotation variables. Sur le schéma d'*Olgac* (Figure 4), $k_{\theta R}$ et $k_{\theta L}$ sont donc variables (de 0 à $+\infty$).

L'équation 7 devient $f(\beta) = 0$ en posant :

$$\beta_1 = \beta_3 = \beta = \frac{kL}{EI} \quad (8)$$

$$\beta_2 = \beta_4 = 5e20(N/m) \gg \beta \quad (9)$$

L'équation caractéristique du système devient donc une équation du second degré avec a, b, ...,l, fonctions trigonométrique de λL et $\tilde{K} = \frac{EI}{L^3}$:

$$(a\tilde{K}^2 + b\tilde{K})\beta^2 + (2c\tilde{K}^2 + (d+e)\tilde{K} + 2h)\beta + (g\tilde{K}^2 + 2k\tilde{K} + l) = 0 \quad (10)$$

La méthode de *Newton-Raphson* est un algorithme permettant de trouver les racines de ce type d'équation (composée de fonctions trigonométriques et hyperboliques).

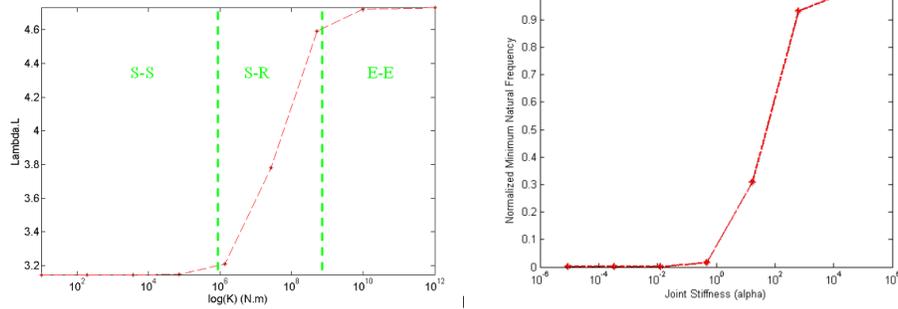


Fig. 5: Evolution de la pseudo fréquence en fonction de la rigidité de liaison k (a), et Evolution de la fréquence normalisée en fonction de la rigidité d'assemblage normalisée (b)

La condition limite **SS** débute à $k = 0$ pour $\lambda L = \pi$ et s'arrête à la rigidité moyenne ($1e6$ N.m). La zone de transition semi rigide s'étend jusqu'à $1e9$ N.m où débute la zone **EE** avec la condition classique $\lambda L = 4.73$ (Figure 5).

On peut aussi représenter, comme [McGuire, 1995], la valeur de la rigidité de liaison en fonction de la fréquence normalisée (Figure 5). L'avantage est que la valeur est indépendante du terme $\frac{EI}{L}$. On pourrait ainsi proposer une modélisation de ce comportement en tenant compte de l'amplitude de la fréquence normalisée 1.59(4.73 – 3.14) et des zones à 10 % et 90 % comme une fonction sigmoïde.

La procédure d'identification par l'algorithme de Newton-Raphson passé par une étape d'initialisation : on cherche la valeur β^* qui annule la fonction $f(\beta)$. On utilise une méthode itérative suivant la relation : $\beta_{n+1} = \beta_n - \frac{f(\beta_n)}{f'(\beta_n)}$. Pour que la solution ne diverge pas, on doit avoir une idée assez précise de la valeur d'initialisation. On va obtenir cette valeur β_0 graphiquement ($k = 7.2e8$ N.m).

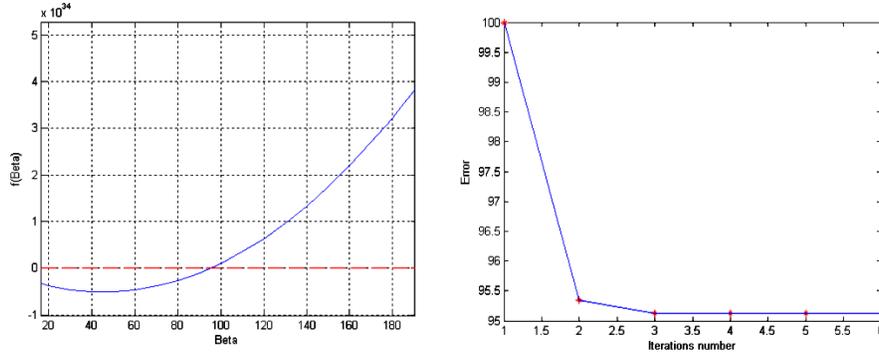


Fig. 6: Solution graphique (a), et convergence de la solution (b)

En donnant une solution initiale $\beta_0 = 100$, l'algorithme converge en peu d'itérations vers $\beta = 95.12$, on obtient donc une rigidité identifiée $k_i = 1.06e8N.m$ pour une valeur désirée de $k_i = 7.2e8N.m$.

En réitérant cette méthode pour chaque donnée modale (λL), on obtient les valeurs de chaque rigidité identifiée qui couvrent tous les exemples de notre problème. Les valeurs (λL) sont obtenues par le lissage non linéaire entre les déformées et le modèle analytique.

Les valeurs identifiées (Figure 7) ne sont pas très précises (erreur entre 50 et 80%). Cela nous donne juste une tendance de la variation en rigidité. On voit ici clairement que de petites erreurs sur l'estimation de la pseudo fréquence introduit une erreur plus large sur k_i .

Essayons maintenant de trouver le terme correcteur ϵ qui donne une estimation précise de la rigidité. En posant $\lambda_{real} = \lambda_{Id} + \epsilon$, on obtient une identification fiable (erreur $< 1e-2$). La figure 7 montre que l'erreur ressemble à une gaussienne centrée sur le milieu de la non linéarité (zone semi-rigide). En modélisant cette erreur pour chaque condition limite, on pourrait réduire l'erreur d'estimation d'une manière significative. On voit ici qu'identifier toutes les rigidités de liaisons est un problème très complexe : un système de degré 4 non linéaire à 4 équations. De plus, l'ajout de bruit de mesure influence de manière évidente

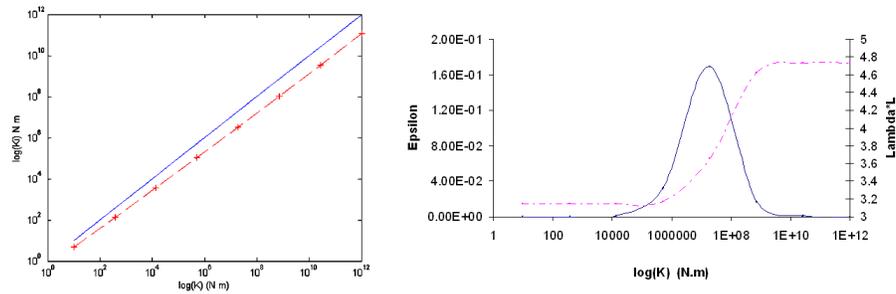


Fig. 7: Identification biaisée de la rigidité de liaison (Log-Log), et identification du maximum d'erreur, ϵ qui est centré sur la zone semi-rigide, où l'algorithme de lissage a une plus grande erreur

l'identification. Voilà pourquoi les chercheurs visent à développer des méthodes d'identification robuste. Les méthodes de type " model updating " [Tarazaga, 2004, Da Silva *et al.*, 2008, Fritzen *et al.*, 1998, Friswell et Mottershead, 1995, Mottershead et Friswell, 1993] complètent celles basées sur l'apprentissage (réseau de neurones) [Chung-Bang Yun et Bahng, 2001] et sont en lien direct avec le chapitre 2 (paragraphe ??).

1.2 Mapping de données

Génériquement, une transformation intégrale peut être vue comme un mapping des données originales (temporelles souvent issues de capteurs ou simulation) vers une autre fonction apportant plus d'information que l'originale. Comme ce mapping est inversible (par exemple Transformée de *Fourier* inverse), on peut reconstruire (et donc compresser) avec peu de coefficients (les plus énergétiques en norme l_2 , les "meilleurs" en norme l_1 si approximation parcimonieuse voir la section ?? de ce chapitre).

La transformée de *Fourier* est un des exemples les plus connues qui permet d'obtenir les composantes fréquentielles (mode en vibration) aisément. Ces transformations sont basées sur la comparaison du signal $x(t)$ avec une base de test $f_m(t)$ (base d'exponentielles complexes pour *Fourier*). Cette comparaison prend la forme d'une corrélation (produite par multiplication) moyennée (ou intégrée) sur la durée du signal (ou une portion du signal).

$$X(m) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)f_m(t)dt$$

Plus en détail, pour la transformée de *Fourier*, $f_m(t)$ est une famille de fonctions harmoniques (par exemple sinusoïdes) et m spécifie la fréquence d'une sinusoïde à $\omega = mf$. Cette intégrale devient une somme pour l'analyse du processus discret $x(n)$ (issues en mécanique des capteurs et donc de la conversion analogique digitale).

$$X(m) = \sum_{n=1}^N x(n)f_m(n)$$

Classiquement on se heurte à des problèmes de passage d'un support infini à fini et souvent on associe une fonction fenêtre W (Figure 8).

$$X(m) = \sum_{n=1}^N x(n)f_m(n)W(n)$$

Si $W(n)$ ne possède que des 1, on a donc une fonction porte de transformée de *Fourier* sinus cardinale (attention au passage par zéro du spectre 8).

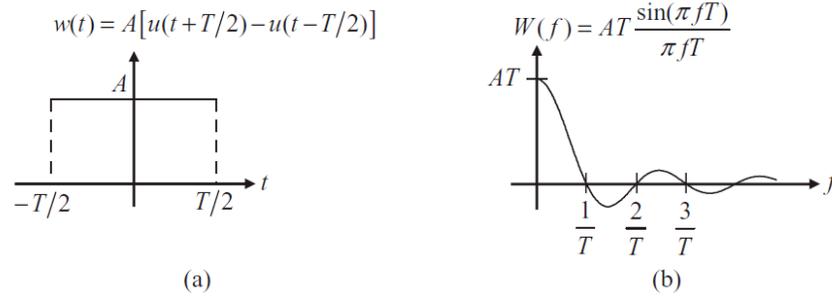


Fig. 8: Fonction porte de largeur T et sa transformée de *Fourier* : sinus cardinal qui s'annule tous les $1/T$ [Shin et Hammond, 2008]

Expérimentalement on se heurte donc à des problèmes d'étalement et de fuite spectrale (Figure 9) que l'on peut tenter de résoudre avec des fenêtres d'apodisation (*Hanning*, *Hamming*, etc...).

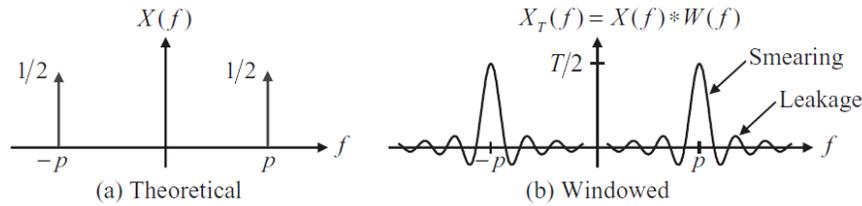


Fig. 9: Spectre avec 2 résonances pures infinies (a) et spectre du signal fenêtré [Shin et Hammond, 2008] : effet d'étalement du spectre (**smearing**) et de fuite spectrale (**leakage**)

On peut aller plus loin et proposer une étude glissante en comparant localement pour plusieurs valeurs de k la ressemblance du signal et de la fonction de test (pour l'instant on ne parlera pas de fonction d'auto-corrélation que l'on verra dans le chapitre 2.3). D'après les propriétés des produits de convolution, il est équivalent de décaler k sur x ou sur f .

$$X(m, k) = \sum_{n=1}^N x(n) f_m(n - k)$$

C'est la base des approches fréquentielles locales (Transformée de *Fourier* à court terme, ondelettes ...) qui permettent de ne plus se limiter à un contenu fréquentiel *global* (*Fourier*) mais un contenu local du comportement du spectre. C'est aussi à la base de méthode d'analyse de régularité et de détection de singularité que l'on met en avant dans le chapitre 2 pour localiser des endom-

magements sur les déformées (Théorie en Annexe A ??).

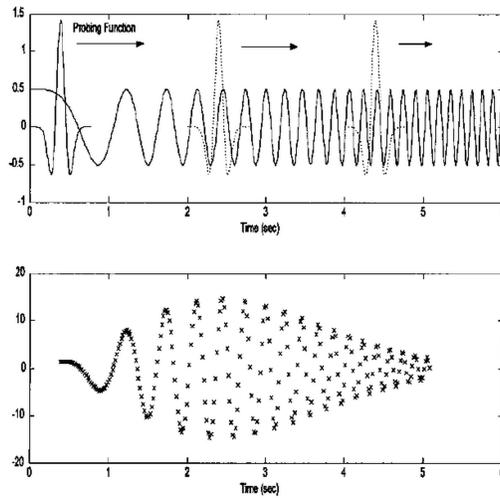


Fig. 10: Mesure de la corrélation (produit scalaire) d'un signal *Chirp* (dont la fréquence augmente au cours du temps) avec une fonction de base d'ondelettes (*Morlet*). Le maximum correspond au temps 2.5 s , où la partie locale du signal correspond le mieux avec l'ondelette sous étude [Semmlow, 2004]

1.3 Échantillonnage

On va s'intéresser dans ce mémoire au traitement de signaux issus de la mécanique (vibratoire) ayant 1 ou 2 dimensions. Il existe de nombreux ouvrages de théorie du signal, en français comme en anglais. Ce paragraphe s'est inspiré de plusieurs de ces ouvrages, et en particulier des références suivantes [Blanchet et Prado, 1990, Max et Berthier, 1981, Duvaut, 1991, de Coulon, 1984, Peyre, 2010, Mallat, 2000]. Dans un formalisme mathématique, le mapping, correspond à une fonctionnelle f_0 qui permet de traiter des signaux multi-dimensions.

$$f_0 : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]^s$$

où d est la dimensionnalité de l'espace d'entrée et s est la dimensionnalité du domaine des caractéristiques (**features** en anglais). Une image en niveaux de gris correspond à $d = 2$ et $s = 1$ alors qu'une image RVB correspond à $d = 2$ et $s = 3$.

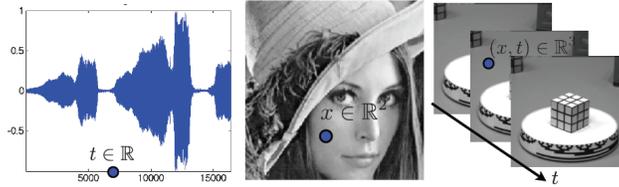


Fig. 11: Exemples de signaux, son ($d=1$), image ($d=2$) et vidéos ($d=3$) ([Peyre, 2009])

Ainsi dans chaque traitement est précédé d'une étape d'acquisition et d'échantillonnage des données (capteurs laser, accéléromètres, caméra) ou de synthèse de données discrétisées (simulation EF, EDO, EDP). On passe donc d'un domaine continu à un vecteur de dimension N (échantillons).

$$f_0 \in L^2([0, 1]^d) \mapsto f \in C^N$$

En fait le processus d'échantillonnage revient à faire un produit scalaire entre le signal continu f_0 et une réponse impulsionnelle constante h traduite à chaque localisation de l'échantillon :

$$f_n = \int_{-S/2}^{S/2} f_0(x)h(n/N - x)dx = f_0 * h(n/N)$$

$h(x)$ dépend de l'échantillonneur, la taille de S détermine la précision et l'ordre de $1/N$ la capacité à éviter le repliement de spectre (si S trop petit).

Pour introduire une notion importante en analyse modale (Détection/séparation de modes), on va d'abord introduire la notion de résolution spectrale par

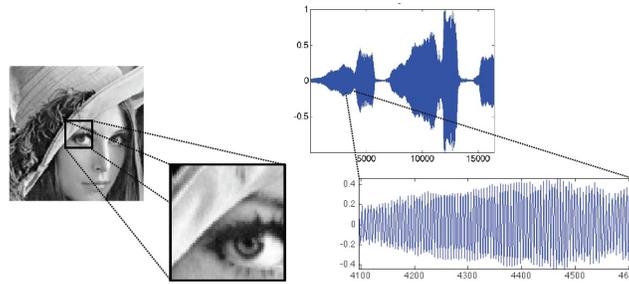


Fig. 12: Processus de discrétisation par échantillonnage ([Peyre, 2009])

l'intermédiaire de la définition de la transformée de *Fourier* discrète (TFD)[†]. Sa définition mathématique pour un signal x de N échantillons est la suivante :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-2i\pi k \frac{n}{N}} \text{ pour } k < N$$

La transformée inverse est donnée par :

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot e^{2i\pi n \frac{k}{N}}$$

La *TFD* permet seulement d'évaluer une représentation spectrale discrète (spectre échantillonné) d'un signal discret (signal échantillonné) sur une fenêtre de temps finie (échantillonnage borné dans le temps). Supposons qu'on a enregistré N points, Si l'on calcule la *DFT* de ce signal, on obtient encore N points mais cette fois dans le domaine des fréquences. Si le signal a été échantillonné à la fréquence f_e (Hz), l'intervalle de temps entre deux points est donc :

$$\Delta_t = \frac{1}{f_e}$$

L'espacement en fréquence des composantes de *Fourier* est donné par :

$$\Delta_f = \frac{f_e}{N} = \frac{1}{N\Delta_t}$$

où Δ_f est aussi appelée la résolution en fréquence.

[†]. En anglais on parle de Discrete *Fourier* Transform (DFT) que l'on a tendance à confondre avec la Fast *Fourier* Transform (FFT), qui n'est pourtant qu'un algorithme rapide de calcul de la transformée de *Fourier* discrète

Pour diminuer la résolution en fréquence, on peut soit augmenter le nombre d'échantillons N (en gardant f_e constant) ou soit diminuer la fréquence d'échantillonnage f_e (en gardant N constant). L'ajout de zéros à des échantillons de données permet d'augmenter la résolution de la *TFD*. C'est le **zero-padding** ou bourrage de zéros. En effet, plus on ajoute de zéros au signal d'entrée, plus on augmente N et plus on diminue la résolution fréquentielle. Idem, pour la *TFD* inverse si l'on souhaite une reconstruction temporelle interpolée.

Le théorème de *Shannon* [Shannon, 1948] nous permet de reconstruire le signal au mieux par filtrage idéale (norme l_2) si l'on échantillonne suffisamment rapidement (au moins deux fois la fréquence maximale à observer, Figure 13).

$$f(t) = \sum_i f(i)h(t = i/N) \text{ avec } h(t) = \sin(\pi Nt)/\pi Nt$$

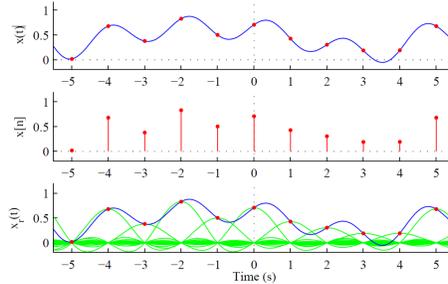


Fig. 13: Reconstruction $x_r(t)$ du signal continu $x(t)$ (en bleu) par filtre de *Shannon* (idéal) : interpolation par sinus cardinal (en vert) du signal échantillonné $x[n]$ (point rouge)

Pour la reconstruction de formes propres, on parle d'échantillonnage spatial. La contrainte est ici le nombre limité de capteurs et on se retrouve souvent confronté à du sous échantillonnage spatiale. Représentons par l'image de la figure 14 une déformée associée à une fréquence de résonance très élevée, la reconstruction classique ne sera pas parfaite (nombre limité de capteurs). Il faut donc trouver des techniques dites d'acquisition comprimée (Chapitre ??) permettant une reconstruction optimale avec peu de mesures placées aléatoirement.

L'exemple classique de repliement spatiale sur un maillage de mesures régulier est présenté sur la figure 15.

En analyse modale on parlera d'expansion modale (dont l'inverse est la réduction de modèle) s'appuyant sur un modèle de structures discrétisées (Figure 16). Ces techniques (*Guyan/Irons condensation*, *Dynamic condensation*, *Improved Reduced System*, *System Equivalent Reduction Expansion Process*) permettent de mettre à jour un modèle EF [Balmes, 2009].

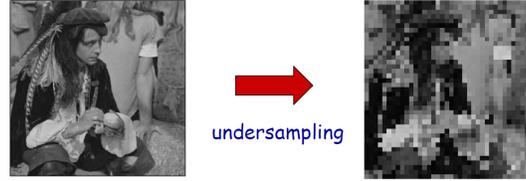


Fig. 14: Reconstruction de déformée par des techniques classiques d'interpolation : problème de sous-échantillonnage spatial et donc de repliement spatial.

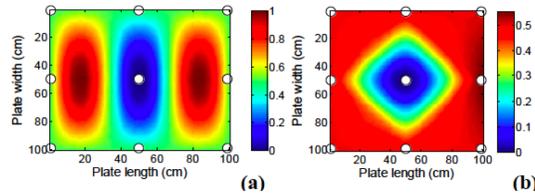


Fig. 15: Reconstruction de déformée par des techniques classiques d'interpolation : problème de sous-échantillonnage spatiale et donc de repliement spatiale : mode (3,1) théorique d'une plaque vibrante (a), l'interpolation cubique repose sur un maillage régulier (cercle blanc) et ne permet pas de reconstruire le mode théorique (b). Le mode reconstruit par 9 capteurs (3 * 3 lignes) ressemble au mode (1,1).

2 Techniques d'analyse modale (spectrale)

2.1 Traitement du signal (Analyse de *Fourier*)

Dans le cadre de la théorie du signal, le théorème de *Parseval-Plancherel* exprime la conservation de l'énergie du signal, qu'elle soit calculée à partir du signal temporel (énergie totale du signal temporel) ou à partir du spectre en fréquences (densité spectrale d'énergie du signal) et cette énergie s'exprime par :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

La transformée de *Fourier* discrète permet également de définir le concept d'énergie à partir de la norme des vecteurs. Mathématiquement, dans un espace où le contenu est riche, son espace inverse ne l'est plus, par exemple : un cosinus a pour transformée de *Fourier* un *Dirac*. Pratiquement en analyse modale, plus on veut se localiser sur une portion d'un signal moins on peut spécifier le contenu fréquentiel précisément. D'où l'intérêt des représentations conjointes type ondelettes (Théorie en Annexe A ??).

En utilisant l'*inégalité de Cauchy Schwartz* on peut facilement démontrer le

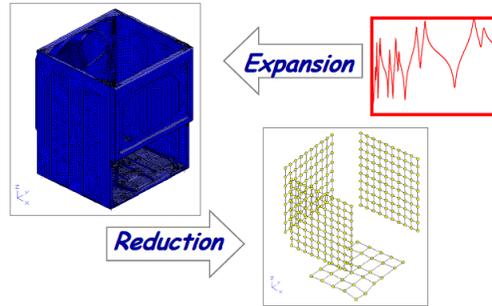


Fig. 16: Principe de réduction/expansion modale

compromis bande passante (en Hz) versus temps d'acquisition (en s) : $\Delta\omega \cdot \Delta t \geq \frac{1}{4}$. On ne peut donc pas localiser un signal simultanément en temps et en fréquence.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt \leq \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t) dt \right|^2$$

Plus un impact est court plus il permet d'étaler la bande passante excitée. De plus le signal de force issu d'un marteau d'impact est multiplié par une fenêtre de pondération (ou d'apodisation) pour éviter les lobes secondaires.

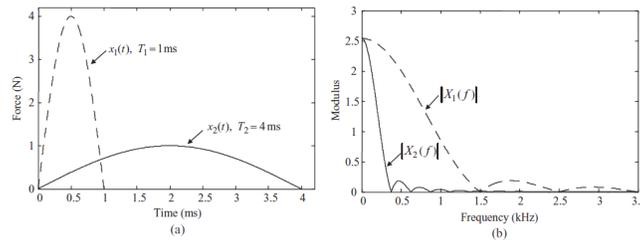


Fig. 17: Comparaison des représentations de deux impacts, dualité temps fréquence [Shin et Hammond, 2008]

En d'autres termes, on ne peut pas trouver de fenêtre possédant une bonne localisation en temps et en fréquence... Mais les gaussiennes réalisent l'optimum (Figure 18).

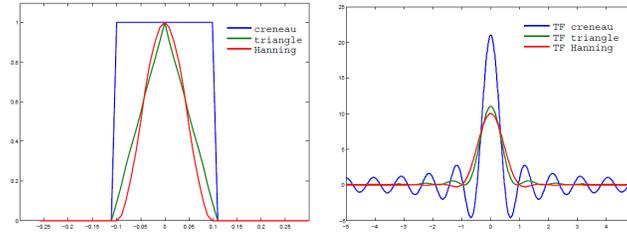


Fig. 18: Différentes fenêtres et leur représentation fréquentielle

2.2 Système Linéaire Invariant

Les modélisations classiques de vibration des structures se ramène souvent à l'analyse d'un **Système Linéaire et Invariant dans le temps (SLI)**. Mathématiquement la linéarité suppose que si on impose en entrée d'un SLI $h(t)$ une entrée continue

$$x(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$$

la sortie sera

$$y(t) = ay_1(t) + by_2(t)$$

On résume ainsi les propriétés d'additivité et de proportionnalité d'un système SLI.

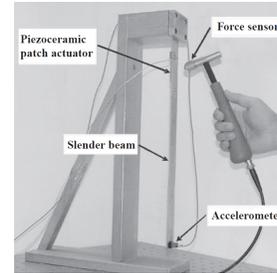


Fig. 19: Système SLI et exemple mécanique [Shin et Hammond, 2008]

L'invariance dans le temps est un autre aspect important dans l'analyse de système dynamique. Si l'on impose un retard à une entrée $x(t)$, la sortie sera elle même retardée comme :

$$y(t - t_0) = x(t - t_0) * h(t)$$

La sortie correspondant au produit de convolution entre l'entrée et la réponse impulsionnelle $h(t)$ du système. On peut prendre l'exemple d'une impulsion de *Dirac* en entrée : la sortie correspondra entièrement au système $h(t)$ (réponse impulsionnelle).

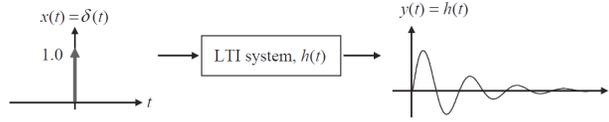


Fig. 20: Réponse impulsionnelle [Shin et Hammond, 2008]

En fait on peut décomposer n'importe quelle entrée $x(t)$ arbitraire en utilisant des impulsions de *Dirac* décalées (Figure 21). L'impulsion au temps t_1 est

$$x(t_1)\Delta t_1$$

Puisque le système est linéaire, la réponse à cette impulsion au temps t est

$$h(t - t_1)x(t_1)\Delta t_1$$

En faisant la somme de ces réponses aux impulsions il vient :

$$y(t) = \sum h(t - t_1)x(t_1)\Delta t_1$$

En prenant un intervalle tendant vers 0, il vient :

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(t - t_1)x(t_1)dt_1$$

En prenant la borne haute de l'intégrale comme t , on a défini un système causal. Intuitivement, la causalité signifie que *l'effet ne peut pas précéder la cause*. En physique, ce principe est fondamental. Le formalisme des systèmes que nous utilisons se prête bien à exprimer la causalité. Le signal d'entrée représente la cause, et la réponse représente l'effet. Ainsi on arrive à une première tentative de définition de système causal : *tant qu'il n'y a pas de signal d'entrée, il n'y pas de réponse ou tant que le signal d'entrée vaut zéro, la réponse a également la valeur nulle*.

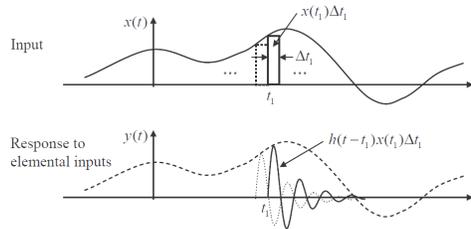


Fig. 21: Réponse du système aux impulsions élémentaires [Shin et Hammond, 2008]

En remplaçant $t - t_1$ par τ ($-dt_1 = d\tau$), il vient par commutativité

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(t - t_1)x(t_1)dt_1 = - \int_{-\infty}^0 h(\tau)x(t - \tau)d\tau = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau$$

ou

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

Le principe de convolution (dans le domaine temporel) est explicité graphiquement sur la Figure 22. Cet opérateur mathématique obéit aux propriétés d'associativité et de distributivité.

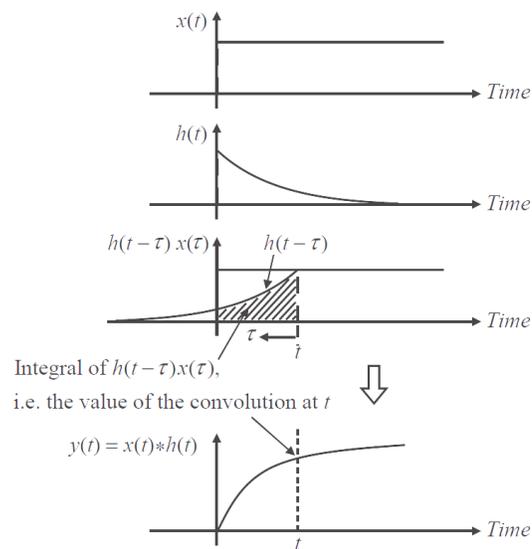


Fig. 22: Illustration de l'opération de convolution [Shin et Hammond, 2008]

Supposons maintenant que l'excitation $x(t)$ soit harmonique (régime permanent) soit $x(t) = e^{j2\pi ft}$, il vient :

$$y(t) = \int_0^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_0^{+\infty} h(\tau)e^{j2\pi f(t-\tau)}d\tau = e^{j2\pi ft} \underbrace{\int_0^{\infty} h(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau}_{H(f)}$$

On introduit ainsi, grâce au produit de convolution, la fonction de transfert ou Fonction de Réponse en Fréquences (FRF) ou transmittance $H(f)$.

L'opération de convolution se transforme en une opération beaucoup plus simple dès lors que l'on introduit la transformée de *Fourier* (ou *Laplace*) de $y(t)$. Il vient :

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)e^{j2\pi ft}d\tau dt$$

En posant $t - \tau = u$

$$Y(f) = \int_0^{+\infty} h(\tau)e^{j2\pi f\tau}d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{j2\pi fu}du$$

Soit

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

Pratiquement, on voit donc qu'en connaissant l'entrée et la sortie, on peut facilement caractériser le système dans le domaine fréquentiel (Figure 23), qui est simplement l'expression de la fonction de transfert (complexe) $H(f)$:

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$$

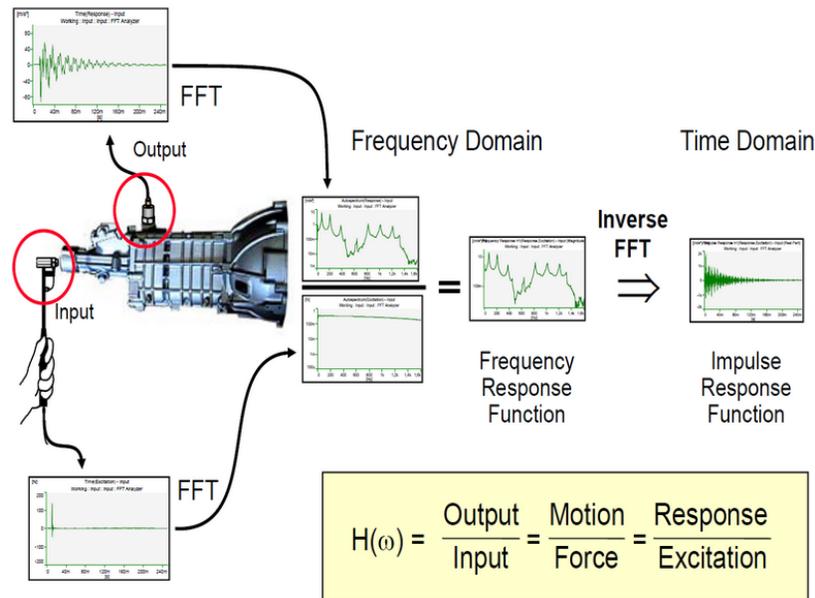


Fig. 23: Principe de la réponse en fréquence en analyse modale expérimentale

On voit aussi que l'on passe aisément du domaine temporel au fréquentiel et vice versa. Cependant même si ces représentations sont équivalentes, certaines informations sont plus facilement visualisables en temporel (par exemple estimation de amortissement transformée de *Hilbert* et estimation de l'enveloppe du signal) ou en fréquentiel (les pics représentant les modes de résonance).

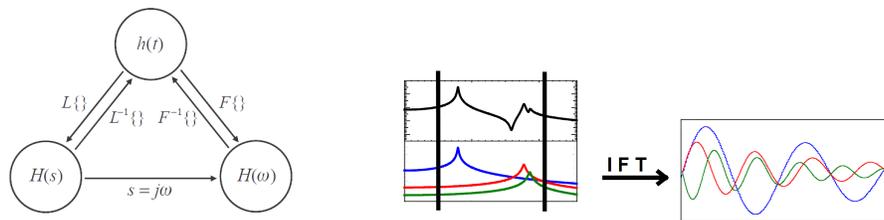


Fig. 24: Relation entre $h(t)$, $H(f)$ et $H(p)$ [Shin et Hammond, 2008] et équivalence des informations dans la représentation Fréquence/Temps [Avitabile, 2007]

Le balayage en fréquence peut se faire lentement (**stepped sine** ou **sine dwell**) ou rapidement (**sine sweep** ou **chirp**), l'intérêt n'est pas le même. Lentement, on obtient une réponse purement harmonique, on peut donc étudier les non-linéarités entre fréquences croissantes et descendantes. Rapidement, on obtient une réponse large bande fiable et ... sans moyennner.

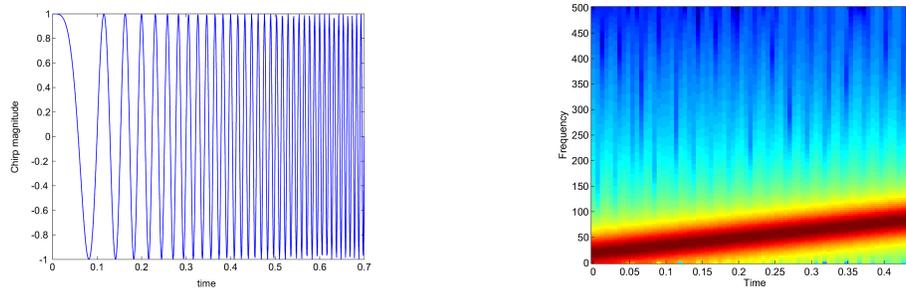


Fig. 25: Chirp : signal modulé en fréquences (croissantes) (a) et Représentation temps-fréquence du Chirp (b)

Une autre méthode consiste à moyennner les réponses à une excitation stochastique (Figure 27). Ces réponses sont elles mêmes stochastiques (cf paragraphe suivant). On peut aussi moyennner sur des fenêtres glissantes qui se recouvrent (**overlap**) : Périodogramme de Welch

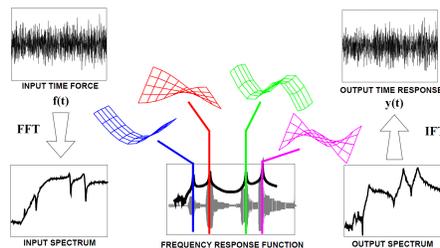


Fig. 26: Exemple d'identification modale, signaux d'excitation bruit blanc (random), de sortie et fonction de transfert [Avitabile, 2007]

2.3 Des signaux déterministes aux signaux aléatoires

En analyse modale, il est courant d'utiliser une excitation large bande aléatoire. Les FRF sont estimées par la méthode du périodogramme de *Welch* par exemple [Preumont, 1990, Newland, 1993, Shin et Hammond, 2008]. Ces méthodes reposent sur la notion de stationnarité et d'ergodicité[‡]. Les propriétés statistiques du modèle stochastique varie ou non avec le temps.

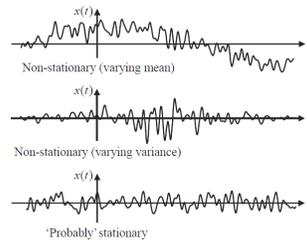


Fig. 27: exemple de signaux aléatoires stationnaires ou non stationnaires [Shin et Hammond, 2008]

Ainsi on peut voir que le signal 'probably' stationary de la figure 27 prend la même valeur 0 à certains instant précis t_i . Le distinguo entre signal déterministe et aléatoire se fait ici : si on peut prévoir la valeur du signal aux instants le signal $t_i + \Delta t$, alors le signal est déterministe (et donc on peut utiliser les outils de modélisation SLI du chapitre précédent), sinon le signal est stochastique et nous devons donc utiliser une autre théorie basée sur les fonctions d'auto-corrélation $R_{xx}(\tau)$ (définies à partir de la notion d'espérance mathématique E).

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T x(t)x(t+\tau)dt = E(x(t)x(t+\tau))$$

On parlera d'inter-corrélation si l'on compare un signal x à un signal y . De plus, la moyenne quadratique du signal x est $R_{xx}(0) = \overline{X}^2$ La figure 28 donne des exemples de fonction d'auto-corrélation (d'un sinus pur à du bruit blanc). En fait on calcule pour toutes les valeurs de τ l'intégrale du signal $x(t)$ multiplié par le signal retardé de $x(t - \tau)$. Ce qui donne en version discrète (non biaisé) $R_{xx}(j) = \sum_n x_n \bar{x}_{n-j}$.

[‡]. c'est-à-dire si les propriétés statistiques du signal caractérisées par des espérances mathématiques sont indépendantes du temps. Lorsque cette hypothèse est vraisemblable, le processus bâti autour du signal est rendu ergodique, les moyennes temporelles étant identiques aux moyennes d'ensemble.

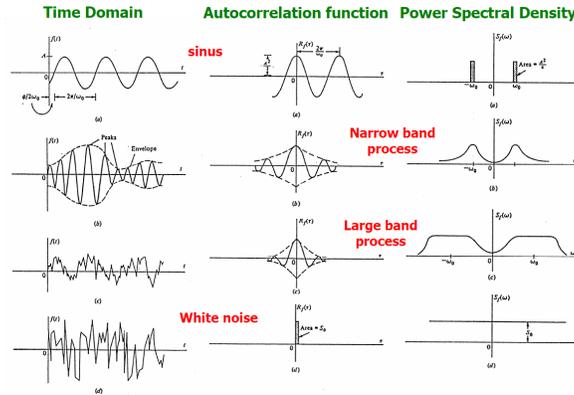


Fig. 28: Fonction d'auto corrélation de différents signaux d'un contenu spectrale simple à riche d'un bruit blanc gaussien

Si les valeurs prises aux instants $t_i + \Delta t$ sont indépendantes des valeurs prises aux instant t_i alors R_{xx} est nulle partout sauf évidemment pour $\tau = 0$ ou $R_{xx}(\tau = 0)$ est égale à la valeur quadratique moyenne du signal. Ainsi, pour un bruit blanc, la valeur de la fonction d'auto-corrélation est indépendante de la fréquence et est de valeur $\langle x^2 \rangle = \sigma^2$ si x est un processus aléatoire gaussien de moyenne nulle et de variance σ .

A partir de l'auto-corrélation, on peut définir le spectre d'auto-corrélation (réel et pair) qui fournit une description de la richesse spectrale du signal. Pour un signal d'accélération son unité est le $(m/s^2)^2/(rad/s)$

$$S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

On peut donc comparer un signal avec lui même mais aussi deux signaux quelconques (une entrée et une sortie?) et produire des inter-corrélations et spectres d'inter-corrélation associés.

$$R_{xf}(j) = \sum_n x_n \bar{f}_{n-j}$$

d'où le spectre d'inter-corrélation :

$$S_{xf}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xf}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = S_{fx}^*(f)$$

Compte tenu de la relation liant les signaux en entrée et sortie des systèmes linéaire, on déduit la relation entre leurs **Densité Spectrales d'Energie DSP** par le théorème de *Wiener-Khintchine* (à partir des auto-spectres et inter-spectres) :

$$\begin{cases} S_{xx}(f) = |H^2(f)| S_{ff}(f) & (1) \\ S_{fx}(f) = H(f) S_{ff}(f) & (2) \\ S_{xx}(f) = H(f) S_{xf}(f) & (3) \end{cases} \quad (11)$$

L'analyseur de spectre utilise le principe des densités spectrales de puissance pour estimer les FRF selon le schéma de la figure 29

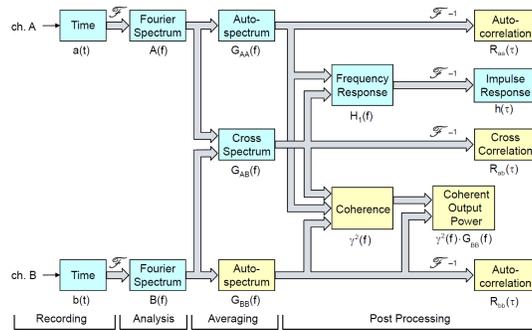


Fig. 29: Principe d'un analyseur de spectre

De la deuxième équation du système 11 nous tirons l'estimateur H_1 utilisé quand le bruit est contenu dans la réponse (meilleur indicateur près des antirésonances) :

$$H_1(f) = S_{fx}(f) / S_{ff}(f)$$

Et de la troisième nous tirons l'estimateur H_2 utilisé quand le bruit est contenu dans l'entrée (meilleur indicateur près des résonances) :

$$H_2(f) = S_{xx}(f) / S_{xf}(f)$$

On peut définir la cohérence (entre 0 et 1), un indicateur de la qualité de la mesure de FRF :

$$\gamma^2 = H_1(f) / H_2(f)$$

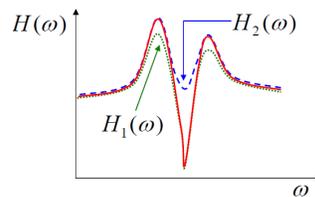


Fig. 30: Estimateurs de fonction de transfert

L'analyse modale expérimentale permet d'identifier les caractéristiques vi-

bratoires du système (**avec** ses conditions aux limites). En effet il arrive souvent de confondre différents types d'essai comme par exemple l'analyse modale expérimentale et surveillance (Figure 31). Le test de qualification (excitation par la base) simule lui les conditions de vols pour les structures spatiales.

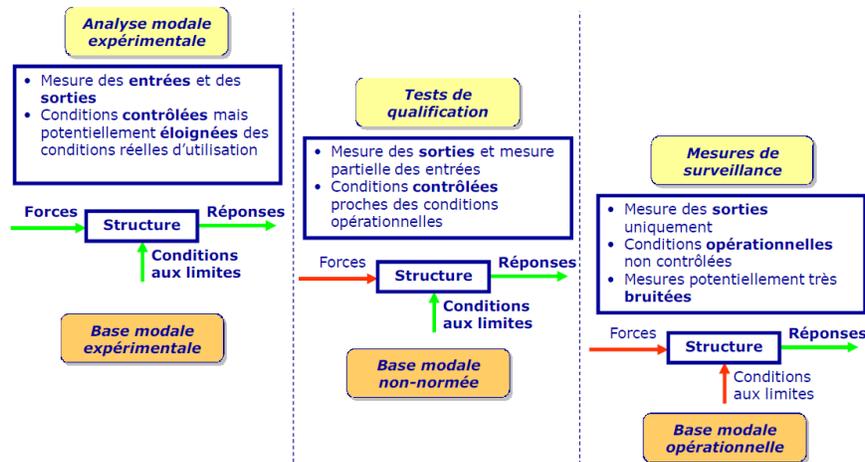


Fig. 31: Bilan des tests expérimentaux : analyse modale, test de qualification et mesure de surveillance [Foltete, 2011]

La prise en compte des rigidités/masses des systèmes d'excitation/capteurs ainsi que les conditions aux limites non parfaites peut être mis en place dans le processus de mise à jour de modèle [Avitabile, 2007, Ashory, 1999, Allemang et Brown, 1993].

On utilise plusieurs principes issus des systèmes LTI. Par exemple on illustrera dans la figure 32 les principes de linéarité et de réciprocité.

La linéarité : on excite la structure à plusieurs amplitudes en vérifiant que la fonction de transfert reste inchangée. La réciprocité : la FRF est équivalente si on décide d'exciter la structure au point i et de mesurer la réponse au point j ou inversement . (Figure 29).

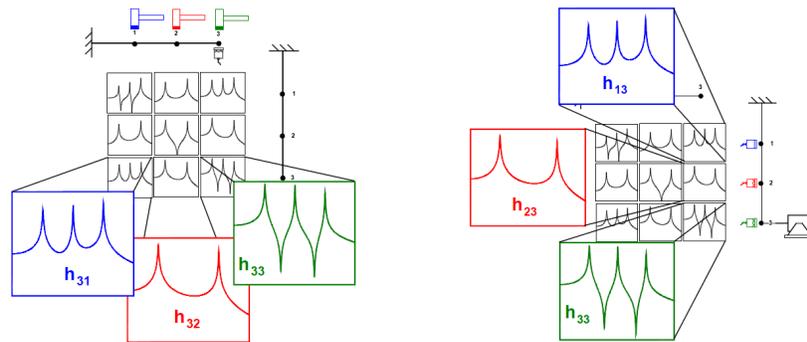


Fig. 32: Principe de réciprocité et types d'analyse modale : marteau ou shaker [Avitabile, 2007]. Pour l'essai type marteau ; le capteur d'effort peut se déplacer et le capteur de déplacement est fixe et pour l'essai type shaker : l'excitation est fixe et on déplace les capteurs (accéléromètres). On a toujours besoin d'une référence (Fonction de transfert colocalisée) pour donner un sens aux résidus modaux dans le calcul des déformées

La résolution fréquentielle affecte principalement les fréquences de résonance identifiées (détection de fréquences de résonances très proches (Figure 33), ainsi que l'amplitude du pic (donc le taux d'amortissement, cf Figure 33). Mais d'un point de vue plus "identification de système", une erreur sur l'estimation des pôles induit une erreur sur les taux d'amortissement ET sur les déformées modales.

Des problèmes associés à l'évaluation de la Fonction de Réponse en Fréquence (FRF) existent tels que : résolution fréquentielle, fuites (**leakage**). De même, la Fonction de Réponse Impulsionnelle (FRI) de la structure est souvent obtenue par la transformation de *Fourier* discrète inverse *ifft* ; ce qui provoque le problème de fuites sur les signaux de longueur finie.

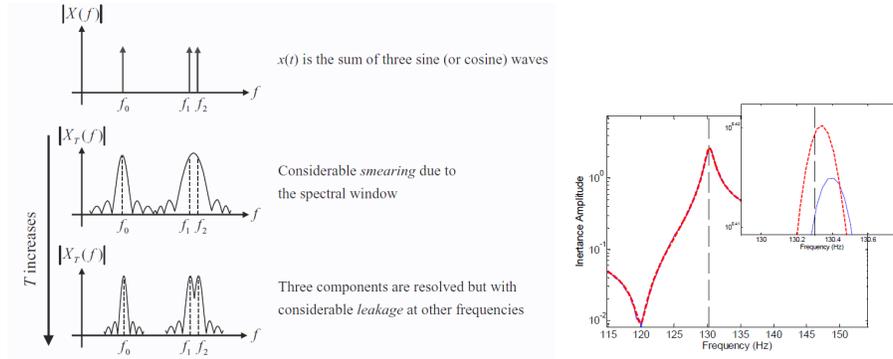


Fig. 33: Distinction de deux pics proches et phénomène de **leakage** en analyse spectrale [Shin et Hammond, 2008] et propagation de l'erreur sur l'estimation des pôles sur l'identification des paramètres modaux

Habituellement, on considère lors des essais de vibration que les erreurs introduites sur l'estimation de la FRF peuvent être modélisées par un bruit blanc (aléatoire ou Gaussien centré), mais en pratique les caractéristiques des erreurs de mesure ne sont pas aléatoires [Jung et Ewins, 1992]. Jung classe ces erreurs (systématiques) en plusieurs types (Figure 34).

Measurement errors	Signal processing errors	Modal analysis errors
nonlinearity of structure	leakage	circle fit modal analysis
mass loading effect, mounting effect, shaker/structure interaction	effect of window functions	System identification: Identify discrete-time filter parameters
useful frequency range of transducer	effect of averaging	Model order in stability diagram

Fig. 34: Erreurs classiques en analyse modale [Jung et Ewins, 1992]

Des travaux récents [Mitchell, 1994] permettent d'améliorer les méthodes expérimentales afin d'effectuer une mise à jour plus performantes des modèles numériques. Les méthodes d'essai modal sont affectées par la qualité des FRFs, le nombre de FRFs (DDL de la structure), la densité modale et ou le type d'amortissement (taux d'amortissement élevés). Pour finir, on peut voir que la qualité de nos estimations est dépendante non seulement des algorithmes, mais aussi (dans un processus global de corrélation expérimentale/numérique) des protocoles expérimentaux mis en place (Figure 35).

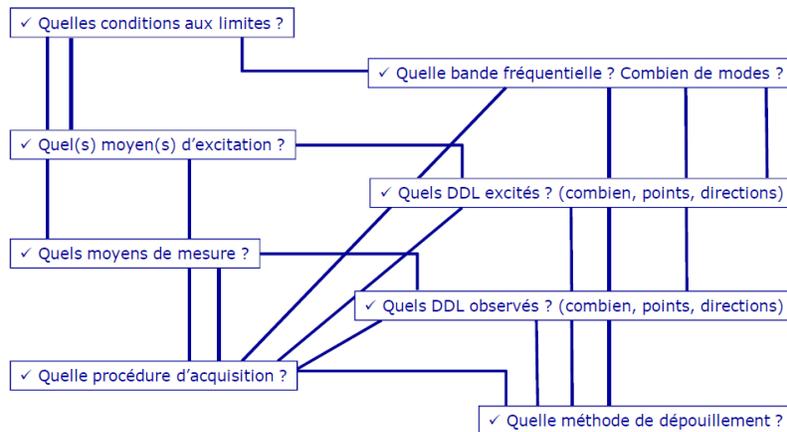


Fig. 35: Problème d'interdépendances entre mécanique et instrumentation dans la conception des essais d'identification modale [Foltete, 2011]

2.4 Des systèmes dynamiques aux vibrations

Les problèmes dynamiques (on parle aussi de vibrations en petites perturbations afin de linéariser les équations) sont basés sur des équations différentielles ordinaires, et donc peuvent être résolus de manières efficaces par une approche mécanicienne. A la base on trouve les équations de *D'Alembert*, Principes des Travaux Virtuels, *Newton* ou *Lagrange* (en formalisme matriciel), fonction de *Green*, l'analyse d'un système masse ressort à 1 DDL, et les outils de résolution pour l'ingénieur : Approche d'état et Transformée de *Fourier/Laplace*.

On utilisera les notations matricielles classiques ; $[]$ Pour une matrice quelconque (on pourra spécifier sa taille en indice), $\{ \}$ Pour un vecteur colonne, $\{ \}^T$ Pour un vecteur ligne.

Nous allons rappeler les concepts fondamentaux de la mécanique des vibrations en utilisant des modèles simples : un système à un degré de liberté et un système à plusieurs degrés de liberté. La passerelle avec l'analyse modale sera immédiate si l'on considère l'analyse modale d'un système à plusieurs DDLs comme une superposition de résonateur à 1 DDL (figure ci dessous) sous ces différentes représentations (physique, modale, spectrale, temporelle). L'application à l'analyse modale des principes de base des systèmes LTI (en plus de ceux déjà décrits) sont la description d'un mode par une équation différentielle d'un second ordre, le théorème de réciprocité (*Maxwell*), et l'hypothèse de taux d'amortissement sous amorti.

Un système à 1DDL peut être considéré comme un bloc élémentaire de construction et un système à plusieurs DDL comme un exemple d'assemblage des blocs, sachant qu'une structure complexe peut être représentée par un système à un grand nombre (fini ou infini) de degrés de liberté. Pour commencer, revenons aux bases et illustrons le principe du système **masse ressort amortisseur**

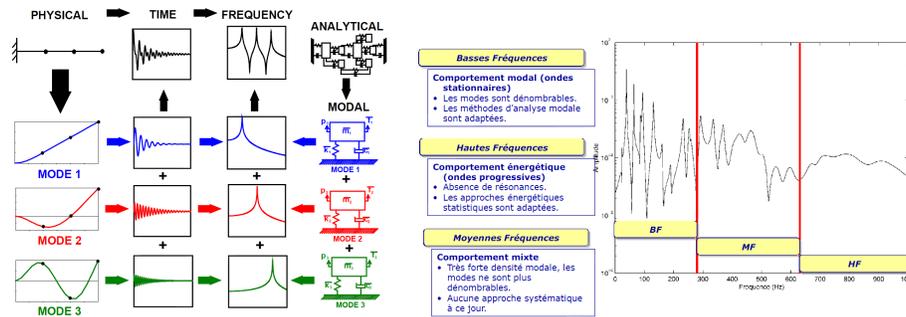


Fig. 36: Equivalence entre domaine physique et domaine modal : représentation des signaux fréquentiels et temporels [Avitabile, 2007] et les 3 domaines d'analyse modale [Foltete, 2011]. La décomposition en peut s'appliquer sur un problème donné en BF avec des modes découplés (faible densité modale)

(MKC) : augmenter la masse permet de diminuer la fréquence (figure 38), d'un autre côté augmenter l'amortissement permet de diminuer l'amplitude.

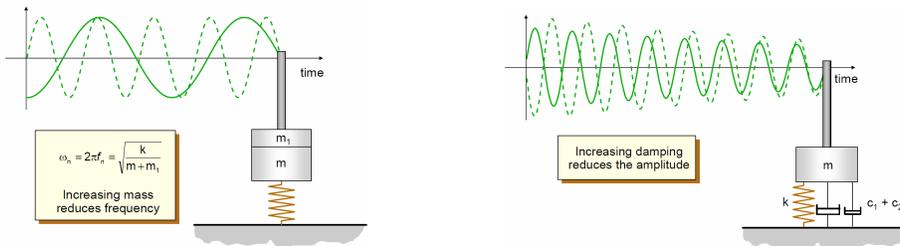


Fig. 37: Réponse temporelle d'un oscillateur à 1 DDL : effet de la masse augmentée (a), effet de l'augmentation d'amortissement

Pour construire le comportement dynamique d'un oscillateur 1 DDL, il suffit de balayer toutes les fréquences en entrée : on construit ensuite le ratio des spectres de sortie sur le spectre d'entrée (Fonction de transfert qui n'est rien d'autre qu'un filtre). Sur un système d'ordre 1 il devient facile à partir de l'amplitude des FRFs d'identifier les paramètres M,K,C ... L'équation du mouvement d'un système (sans effet gyroscopique) peut se résumer à

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

Pour comprendre les caractéristiques intrinsèques de la structure nous allons faire la résolution du système libre ($f(t)=0$). Elle permet de faire apparaître les paramètres modaux globaux (fréquence et taux d'amortissement), en résolvant l'équation caractéristique suivante :

$$mp^2 + cp + k = 0$$

On fait apparaître les racines (zéros de l'équation caractéristique) suivant :

$$p_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2m} \sqrt{c^2 - 4km}$$

Ceux ci peuvent s'exprimer comme des pôles complexes conjugués comme suit :

$$p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm i\sqrt{\xi\omega_n^2 - \omega_n^2} = -\xi\omega_n \pm i\sqrt{1 - \xi^2} = \sigma \pm i\omega_d$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = \xi\omega_n \hookrightarrow (\text{facteur d'amortissement}) \\ \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \hookrightarrow (\text{pulsation propre (rad/s)}) \\ \omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2} \hookrightarrow (\text{pseudo pulsation (rad/s)}) \\ c_0 = 2m\omega_n = 2\sqrt{km} \hookrightarrow (\text{amortissement critique}) \\ \xi = c/c_0 = c/(2m\omega_n) = c/(2\sqrt{km}) \hookrightarrow (\text{taux d'amortissement critique}) \end{array} \right.$$

On peut réécrire les solutions comme :

$$p_{1,2} = -\frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}$$

On voit que selon le signe de $c^2 - 4km$, on distingue trois types de mouvement (critique, sous amorti et sur amorti). Les solutions sont réelles lorsque le déterminant est positif ou nul (complexe sinon) et peuvent s'écrire :

$$x(t) = Ae^{p_1 t} + Be^{p_2 t}$$

avec A, et B s'explicitant en fonction des conditions initiales.

Dans le cas critique $c^2 = 4km$, on voit que celui ci ne dépend que de la conception structurale (et donc de la rigidité et de la masse de la structure).

Ainsi on peut formuler le taux d'amortissement ξ en pourcentage. Si $\xi \ll 1$ (induit $0 < p_{1,2} < 1$), on peut écrire :

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} (ae^{j\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t} + be^{j\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t})$$

que l'on peut réécrire comme une sinusoïde amortie en utilisant la formule d'Euler :

$$x(t) = Ce^{-\xi\omega_n t} \sin(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t + \Phi) = Ce^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t + \Phi)$$

avec C , et Φ s'explicitant en fonction des conditions initiales comme suit :

$$C = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + \xi\omega_n x_0}{\omega_d}\right)^2}$$

et

$$\Phi = \tan^{-1} \frac{x_0\omega_d}{v_0 + \xi\omega_n x_0}$$

Reprenons l'équation du départ et posons $f(t) = f \cos(\omega t)$ harmonique (et réel), il vient :

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

En faisant l'hypothèse des conditions initiales nulles, on obtient en utilisant la transformée de *Laplace* :

$$mp^2X(p) + cpX(p) + kX(p) = F(p)$$

D'où l'expression de la fonction de transfert

$$H(p) = \frac{X(p)}{F(p)} = \frac{1}{mp^2 + cp + k}$$

où en utilisant la transformée de *Fourier* ($p = j\omega$) :

$$H(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{1}{-m\omega^2 + cj\omega + k} = \frac{1}{(k - m\omega^2) + cj\omega} \quad (12)$$

En posant $c = 2\xi\sqrt{km}$ et $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ il vient :

$$H(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{1}{m(\omega_n^2 - \omega^2 + 2j\xi\omega_n\omega)} \quad (13)$$

L'amplitude et la phase de cette fonction de transfert est illustrée en figure 38. A basses fréquences l'asymptote (donnée par $1/k$) représente la flexibilité statique alors que l'asymptote en hautes fréquences (donnée par $1/m$) représente la contribution inertielle. Le maximum d'amplitude est obtenu pour une certaine fréquence accompagnée d'une rotation de phase de 90 degrés. Ce phénomène d'amplification est connu sous le nom de résonance et apparaît par définition quand $\omega = \omega_n$ (fréquence naturelle du système non amorti). En fait la réponse en régime stationnaire est maximale (dériver H par rapport à ω) à ($\omega_{max} = \omega_n\sqrt{1 - 2\xi^2} \approx \omega_n$) et a pour amplitude ($|H_{max}| = 1/2\omega_n^2\xi\sqrt{1 - 2\xi^2} \approx 1/c\omega$) : ce maximum est donc inversement proportionnel à ξ , taux d'amortissement (souvent proche de 1%).

On aurait pu résoudre ce système classiquement par intégration numérique (*Euler* explicite/implicite, *RungeKuta*, ou de second ordre type *Newmark*, α HHT) ou résolution dans l'espace d'état (conditions initiales non nulles).

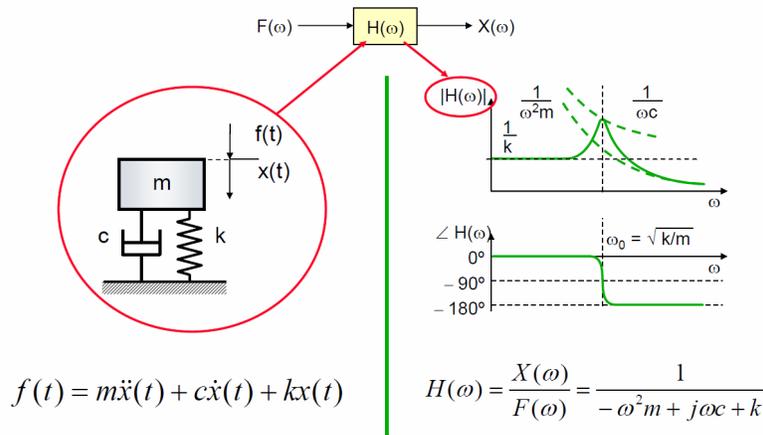


Fig. 38: Réponse d'un oscillateur à 1 DDL

Sur la figure suivante on voit que les pôles des fonctions de transfert contiennent les informations principales (fréquences, amortissement). La lecture de la partie imaginaire permet d'extraire la fréquence (si $\xi \ll 1$), et d'en tirer l'amortissement en lisant la partie réelle (Figure 39).

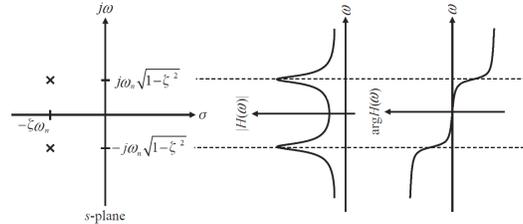


Fig. 39: L'information des pôles dans le plan complexe, et son équivalent en FRF [Shin et Hammond, 2008]

Dans notre simple cas à 1 DDL (sans couplage type **flutter** $m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(x(t), \dot{x}(t))$ [§]) les pôles sont stables et il est assez intéressant de voir pour la suite l'influence des décalage dans le plan réel imaginaire (l'amortissement diminue lorsqu'on se rapproche de l'axe imaginaire, le pic en fréquence se rétrécit, le signal temporel met du temps à s'annuler...) (Figure 40).

§. Le flottement classique concerne généralement les profils d'aile souples. Il résulte d'un couplage des mouvements de torsion et de flexion de l'aile dont les fréquences naturelles sont modifiées par les forces aérodynamiques. Si les fréquences de torsion et de flexion se rejoignent pour une vitesse de vent donnée, la dynamique du système devient instable dans le sens que le mouvement sera amplifié très rapidement et conduira généralement à la destruction de l'engin. Dans ce problème, l'écart de fréquence naturelle entre le mouvement de torsion et celui de flexion est fondamental : plus celui-ci est grand, plus la vitesse critique sera grande.

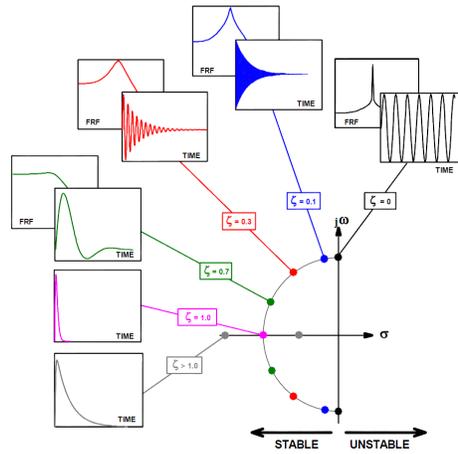


Fig. 40: information contenue dans les pôles des fonctions de transfert [Avitabile, 2007]

On peut faire apparaître les paramètres modaux simplement en divisant par m :

$$H(p) = \frac{X(p)}{F(p)} = \frac{(1/m)}{p^2 + (c/m)p + (k/m)} = \frac{(1/m)}{p^2 + \xi\omega_n p + \omega_n^2}$$

et simplement en utilisant un dictionnaire d'images [Hladik et Morand, 1969] on peut écrire la réponse impulsionnelle $h(t)$:

$$h(t) = \frac{(1/m)}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\omega_n \xi t} \sin(-\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t)$$

Remarque : $h(t) = x(t)$ si $x(t)$ est un *Dirac*.

Reprenons la formulation précédente pour faire apparaître les poles conjugués et décomposer la fonction de transfert en éléments simples.

$$H(p) = \frac{(1/m)}{p^2 + \xi \omega_n p + \omega_n^2} = \frac{(1/m)}{(p - p_1)(p - p_1^*)} = \frac{(1/m)}{(p - p_1)(p - p_2)}$$

en décomposant en fraction rationnelle, on voit apparaître les résidus (directement relié à l'amplitude de la réponse impulsionnelle) :

$$H(p) = \frac{R_1}{(p - p_1)} + \frac{R_2}{(p - p_2)}$$

En utilisant les tables d'inversion

$$h(t) = R_1 e^{p_1 t} + R_2 e^{p_2 t}$$

Pour identifier les résidus on multiplie $H(p)$ par $(p - p_1)$ (pour annuler R_2), il vient :

$$\lim_{p \rightarrow p_1} H(p)(p - p_1) = \frac{(1/m)}{(p_1 - p_1^*)} = R_1 = \frac{1/m}{2j\omega_1} = -R_2 = R_1^*$$

En général le résidu est purement imaginaire (en SDOF) et est proportionnel à la déformée modale ¶. Une des méthodes les plus "physique" ou "direct" est de s'appuyer sur ce modèle (en module ou en phase) du second ordre (Équation 12) et de proposer un ajustement avec les données expérimentales pour estimer les paramètres de la fonction de transfert et donc les paramètres modaux (exemple Matlab ci dessous).

```
% load experimental data
clear all; close all;
load H.mat; %chargement de la matrice data contenant f et H(jw) en colonnes
freq=data(1:1000,1);mag=abs(data(1:1000,2));
K = 10; % gain
zeta = 0.1; % damping ratio guess
fn=2; % natural frequency guess in Hz
% let's generate a frequency vector that has more components than the experimental ones
f_toplot = freq;%[0:0.1:7.0];
r = f_toplot/fn;
mag_init = K./sqrt((1-r.^2).^2+(2*zeta*r).^2);
plot(freq,mag,'o-',f_toplot,mag_init)
legend('experiment','theory - initial guess')
```

¶. Attention ce n'est pas vrai en MDOF à cause de l'hypothèse des modes réels/complexes

```
% not let's use fminsearch to minimize the difference between the exp/theo
x0 = [zeta fn K];
options=optimset(options,'Display','iter');
% run fminsearch to minimize a cost function J "lab3.m" and the outputs are coeff.
coeff=fminsearch(@lab3,x0,options)
zeta = coeff(1);
fn = coeff(2);
K = coeff(3);
r = f_toplot/fn;
Figure; mag_best = K./sqrt((1-r.^2).^2+(2*zeta*r).^2);
plot(freq,mag,'o-',f_toplot,mag_best);legend('experiment','theory - best fit')
```

```

function J = lab3(x)
load H.mat; %chargement de la matrice data contenant f et H(jw) en colonnes
freq=data(1:1000,1);
mag=abs(data(1:1000,2));
zeta = x(1);
fn = x(2);
K = x(3);
r = freq/fn;
mag_theory = K./sqrt((1-r.^2).^2+(2*zeta*r).^2);
J = norm(mag-mag_theory); % if comparing mag not in dB

```

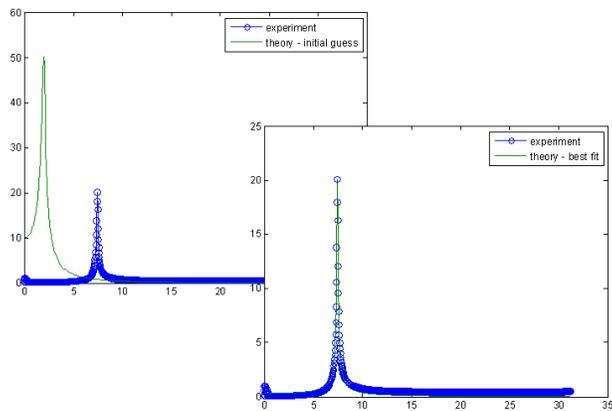


Fig. 41: Identification modale SDOF par optimisation (minimisation de l'erreur quadratique entre le modèle et les données)

En complexifiant un petit peu (2 DDLs) on voit apparaître 2 résonances et aussi une zone où chaque mode contribue (figure 42) avec une participation différente.

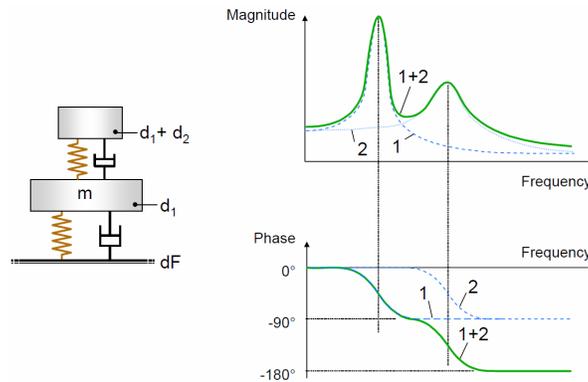


Fig. 42: Un système à 2 DDLs possède deux résonances : on peut séparer l'influence de chaque mode et donc décomposer un problème MDOF en somme de SDOF

Lorsque l'on traite des cas à plusieurs DDL (MDOF MIMO), nous avons à traiter des super matrices. Par exemple une matrice 2×2 , 2 entrées i , et deux sorties j s'écrit :

$$H\tilde{(p)} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}$$

Entre deux résonances, le spectre est composé de plusieurs modes (Figure 43), et pour faire participer un mode pur, on doit se trouver exactement à la résonance. Notamment on se doit de séparer l'influence de la masse résiduelle (basses fréquences) et l'influence de la rigidité résiduelle (hautes fréquences).

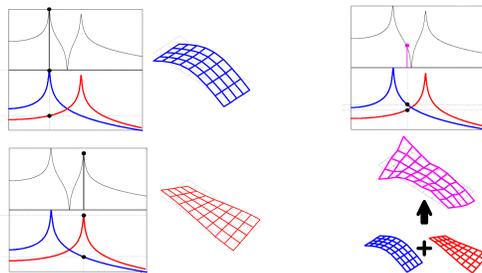


Fig. 43: Influence des modes voisins [Avitabile, 2007]

Chaque fonction de transfert H_{ij} peut se décomposer en N modes comme suit (base de la méthode RFP [Richardson et Formenti, 1985]) :

$$H_{ij}(p) = \sum_{k=1}^N \frac{R_{ij}(r)}{p - p_k} + \frac{R_{ij}^*(r)}{p - p_k^*}$$

En prenant en compte que les pôles sont des pôles complexes conjugués il vient l'équivalent en temporel (base de la méthode LSCE [Brown *et al.*, 1979]) :

$$h_{ij}(t) = \sum_{k=1}^N R_{ij} e^{p_k t} + R_{ij}^* e^{p_k^* t} = 2 \sum_{k=1}^N \text{Re}(R_{ij} e^{p_k t})$$

En généralisant à un système à N DDL discrétisé par les équations de la mécanique générale (équations de *Lagrange* par exemple), on peut écrire en fonction des coordonnées généralisés $q(t)$:

$$[M] \{\ddot{q}(t)\} + [C] \{\dot{q}(t)\} + [K] \{q(t)\} = F(t) \quad (14)$$

- avec la matrice de masse $[M]$, réelle, symétrique, définie positive ($M^* = M^T$)
- avec la matrice de raideur $[K]$, réelle, symétrique, positive
- avec la matrice $[C]$ d'amortissement visqueux
- et $F(t)$ les forces généralisées

On distinguera deux cas : les structures isostatique pour lesquels $[K]$ est définie positive et les structures hypostatiques pouvant subir un mouvement d'ensemble (corps rigides à fréquence nulle). Pour caractériser dynamiquement une structure, on procède généralement à l'analyse modale réelle du modèle (normal mode), correspondant à la détermination des valeurs propres et vecteurs propres réels du système conservatif.

Les modes propres correspondent aux solutions des équations en mouvement libre du système non amorti ($C=0$; système conservatif : les modes sont réels et sont appelés **modes normaux**) :

$$[M] \{\ddot{q}(t)\} + [K] \{q(t)\} = 0 \quad (15)$$

les solutions sont de la forme : $q(t) = \phi_i e^{j\omega_i t}$, il vient

$$-\omega_i^2 [M] \phi_i e^{j\omega_i t} + [K] \phi_i e^{j\omega_i t} = 0 \quad (16)$$

en évitant la solution non triviale :

$$([K] - \omega_i^2 [M]) \{\phi_i\} = 0 \quad (17)$$

Les pulsations propres ω_i sont réelles positives et les modes propres associés ϕ_i sont réels.

On obtient donc n équations que l'on peut mettre sous forme matricielle

$$([K] - \Omega [M])\Phi = 0 \quad (18)$$

avec $\Phi = \text{diag}(\omega_i^2)$ et $\Phi = [\phi_1, \dots, \phi_n]$

Les modes propres ont la propriété d'être orthogonaux entre eux par rapport à $[K]$ et $[M]$, si leurs fréquences sont différentes on a :

$$\{\phi_i\}^T [K] \{\phi_j\} = 0 \quad \text{si } \omega_i \neq \omega_j \quad (19)$$

$$\{\phi_i\}^T [M] \{\phi_j\} = 0 \quad \text{si } \omega_i \neq \omega_j \quad (20)$$

On peut aussi définir 2 matrices : la matrice des masses généralisées m_i et la matrice des raideurs généralisées k_i du mode i

$$\{\phi_i\}^T [M] \{\phi_i\} = m_i \quad (21)$$

$$\{\phi_i\}^T [K] \{\phi_i\} = k_i \quad (22)$$

Elles sont liées par la relation $k_i = \omega_i^2 m_i$

Les matrices $\{\Phi\}^T [M] \{\Phi\}$ et $\{\Phi\}^T [K] \{\Phi\}$ sont donc diagonales, il existe une infinité de matrices de modes propres Φ vérifiant l'équation précédente. On choisit en général de normer par rapport à $[M]$, tel que :

$$\{\Phi\}^T [M] \{\Phi\} = I_{n,n} \quad (23)$$

$$\{\Phi\}^T [K] \{\Phi\} = \Omega \quad (24)$$

En effectuant une projection des équations de la dynamique, en mouvement libre, dans la base modale :

$$[M] \{\ddot{q}(t)\} + [C] \{\dot{q}(t)\} + [K] \{q(t)\} = 0$$

$$q(t) = \Phi \tilde{q}(t) \quad (25)$$

$$\ddot{\tilde{q}}(t) + (\{\Phi\}^T [C] \{\Phi\}) \dot{\tilde{q}} + \text{diag}(\omega_i^2) \tilde{q}(t) = 0 \quad (26)$$

On voit que ces conditions sont couplées par l'amortissement... d'où l'hypothèse simplificatrice (certains dirons non physique) de *Basile* où l'on exprime la matrice d'amortissement comme proportionnelle à la matrice de masse et de rigidité (amortissement de *Rayleigh/Caughey*). Pour le système dissipatif si les vecteurs normaux Φ diagonalise $[M]$ et $[K]$ alors ils diagonalisent également $[C]$, les vecteurs propres sont donc inchangés (pas les fréquences propres) et c'est cette condition que l'on appelle condition de Basile. Si elle n'est pas vérifiée on peut projeter dans l'espace d'état et calculer des modes complexes. Pour un mode complexe, il existe des déphasages entre les points de la structure, les ondes sont donc propagatives (les noeuds des modes réels n'existent plus) et l'amortissement est quelconque. La résolution classique de l'équation 26 avec un second membre $f(t)$ pour obtenir une FRF est donnée en annexe B 3.2. Le paragraphe suivant donne le même résultat avec une approche système. Finalement, pour la synthèse modale et la qualification, les facteurs de participation modaux (Figure 44) sont important.

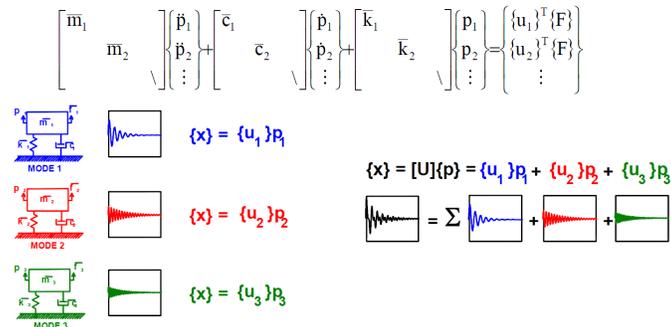


Fig. 44: Résoudre l'analyse en modes normaux pour un système à plusieurs DDL donne l'information sur la participation de chaque mode dans la réponse [Avitabile, 2007]

2.5 Modélisation unificatrice sous forme d'équations d'état

Aux équations de la dynamique, on peut ajouter les notions d'entrée et de sortie. En notant u le vecteur des entrées et b la matrice d'application de ces entrées sur les noeuds du modèle et y le vecteur des sorties composé de mesures de déplacements, vitesses, et accélérations des noeuds. On obtient un système

d'équations différentielles :

$$\begin{cases} [M] \{\ddot{q}(t)\} + [C] \{\dot{q}(t)\} + [K] \{q(t)\} = bu(t) \\ y(t) = c_d q(t) + c_v \dot{q}(t) + c_a \ddot{q}(t) \end{cases} \quad (27)$$

Sous la condition que $[M]$ soit non singulière, on peut écrire :

$$\begin{cases} \{\ddot{q}(t)\} = -[M]^{-1} [C] \{\dot{q}(t)\} - [M]^{-1} [K] \{q(t)\} + [M]^{-1} bu(t) \\ y(t) = (c_d - c_a [M]^{-1} [K])q(t) + (c_v - c_a [M]^{-1} [C])\dot{q}(t) + c_a [M]^{-1} bu(t) \end{cases} \quad (28)$$

Il vient naturellement sous compaction matricielle

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{q}(t) \\ q(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -[M]^{-1} [C] & [M]^{-1} [K] \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}(t) \\ q(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [M]^{-1} b \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} (c_v - c_a [M]^{-1} [C]) & (c_d - c_a [M]^{-1} [K]) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}(t) \\ q(t) \end{bmatrix} + c_a [M]^{-1} bu(t) \end{cases} \quad (29)$$

En identifiant les paramètres de la représentation d'état (classique en automatique) :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (30)$$

soit en notation matricielle :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \quad (31)$$

On obtient les paramètres gouvernant la dynamique du système :
le vecteur d'état

$$x(t) = \begin{bmatrix} \dot{q}(t) \\ q(t) \end{bmatrix} \quad (32)$$

la matrice dynamique du système (contient les informations des fréquences et amortissements

$$A = \begin{bmatrix} -[M]^{-1} [C] & [M]^{-1} [K] \\ I & 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

la matrice d'application de la commande (Forces extérieures)

$$B = \begin{bmatrix} [M]^{-1} b \\ 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

la matrice d'observation (contient l'information locale "déformées")

$$C = \begin{bmatrix} (c_v - c_a [M]^{-1} [C]) & (c_d - c_a [M]^{-1} [K]) \end{bmatrix} \quad (35)$$

la matrice d'application directe de la commande (relation directe entrée-sortie, souvent nul dans les systèmes mécaniques)

$$D = \begin{bmatrix} c_a [M]^{-1} b \end{bmatrix} \quad (36)$$

Le quadruplet (A, B, C, D) permet de résoudre l'équation d'état du système. Cette représentation n'est pas unique, il en existe une infinité qui sont équivalentes.

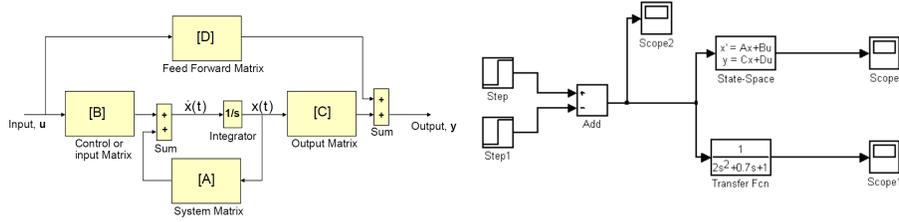


Fig. 45: Diagramme représentant un modèle d'état et modélisation matlab

Les vecteurs propres correspondent aux solutions de l'équation 30 en mouvement libre ($u(t) = 0$)

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad \dot{x}(t) - Ax(t) = 0 \quad (37)$$

En utilisant la transformée de *Laplace*, il vient

$$\mathcal{L}(\dot{x}(t)) = pX(p) - X(0) = pX(p), \text{ si } X(0) = 0 \quad (38)$$

soit en évitant la solution triviale $X(p) = 0$

$$pX(p) - AX(p) = 0 \Rightarrow (pI - A)X(p) = 0 \Rightarrow \det(pI - A) = 0 \quad (39)$$

Les valeurs propres du système sont donc les valeurs des λ_i de p qui annule le déterminant (on les observe pour conclure sur la stabilité du système). En posant $p = \lambda_i$ il vient :

$$(\lambda_i I - A)v_i = 0 \quad (40)$$

avec v_i vecteur propre correspondant à λ_i . Les vecteurs propres associés à une fréquence nulle caractérisent le comportement rigide du système.

On obtient donc $N = 2n$ équations que l'on assemble pour donner :

$$(\Lambda - A)V = 0 \quad (41)$$

Avec $\Lambda = \text{diag}(\lambda_i)$ et $V = [V_1, \dots, V_N]$

Les modes propres sont toujours orthogonaux entre eux :

$$V^{-1}V = I \Rightarrow \Lambda = V^{-1}AV \quad (42)$$

Chaque mode ω_i correspond donc à deux valeurs propres complexes conjugués λ_i

$$\lambda_i = -\xi_i \omega_i \pm j \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2} \quad (43)$$

Revenons au cas simple où il n'y a que des capteurs de déplacement ($C_d \neq 0, C_v = 0, C_a = 0$)

On peut utiliser la transformée de *Laplace* sur l'équation d'état 30 qui devient pour des conditions initiales nulles :

$$\begin{aligned} pX(p) &= AX(p) + BU(p) \\ Y(p) &= CX(p) + DU(p) \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} X(p) &= (pI - A)^{-1}BU(p) \\ Y(p) &= C(pI - A)^{-1}BU(p) + DU(p) \end{aligned}$$

On caractérise ainsi le système par une fonction de transfert :

$$H(p) = X(p)/Y(p) = C(pI - A)^{-1}B + D$$

qui relie les entrées/sorties par la relation

$$Y(p) = H(p)U(p)$$

On peut donc réécrire les équations d'évolution (Forces appliquées : $f(t) = bu(t)$) et d'observation (déplacements : $y(t) = cq(t)$) comme suit :

$$\begin{aligned} [Mp^2 + Cp + K]Q(p) &= bU(p) \\ Y(p) &= CQ(p) \end{aligned}$$

$$Y(p) = c[Mp^2 + Cp + K]^{-1}bU(p) \quad (44)$$

Si on néglige l'amortissement C et que l'on intègre la condition d'orthogonalité 22 :

$$\{\Phi\}^T [K] \{\Phi\} = [diag(\mu_j \omega_j^2)] \quad (45)$$

On peut exprimer les inverses des matrices de masses et de raideurs :

$$[K]^{-1} = \{\Phi\} [diag(\mu_j \omega_j^2)]^{-1} \{\Phi\}^T \quad (46)$$

$$[M]^{-1} = \{\Phi\} [diag(\mu_j)]^{-1} \{\Phi\}^T \quad (47)$$

On peut donc maintenant exprimer directement la matrice de flexibilité dynamique (et donc de faire un lien entre modélisation mécanique et hypothèses expérimentales) :

$$[K - \omega M]^{-1} = \{\Phi\} [diag(\mu_j(\omega_j^2 - \omega^2))^{-1}] \{\Phi\}^T = \sum_{j=1}^N \frac{\{\Phi\} \{\Phi\}^T}{\mu_j(\omega_j^2 - \omega^2)} \quad (48)$$

On peut alors calculer la FRF pour un chargement donné (capteur) à un point particulier de réponses (capteurs) en prenant en compte les coordonnées généralisées $q = [\phi]p$. On parle de synthèse de FRF par une somme de contribution modale individuelle en exprimant la relation 44 :

$$H(\omega) = c[K - \omega M]^{-1}b \approx \sum_{j=1}^N \frac{c\{\Phi\}\{\Phi\}^T b}{\mu_j(\omega_j^2 - \omega^2)} \quad (49)$$

Une approximation exacte considérerait tous les modes, mais dans la plupart des cas on fait une troncature modale, i.e. une approximation sur une certaine bande passante. (Figure 46) avec une correction statique par exemple (ajout d'une constante).

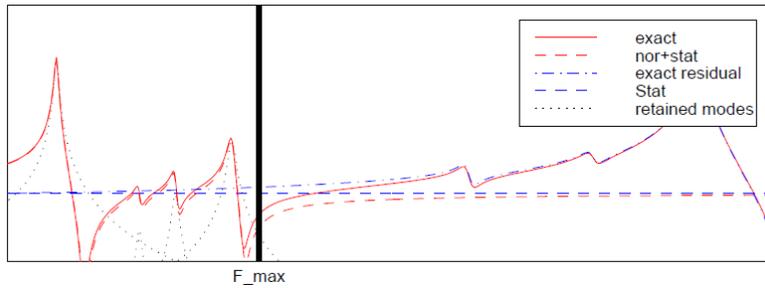


Fig. 46: Contribution modale sur une bande passante prédéfinie, influence de la correction statique sur l'estimation [Balmes, 2009]

Il est intéressant de comprendre la relation entre la réponse $y = [H]u$ et les déformées $[\phi]$: comme précisé plus haut, il y a une relation directe à la résonance entre la partie imaginaire de la FRF et les déformées (Figure 47).

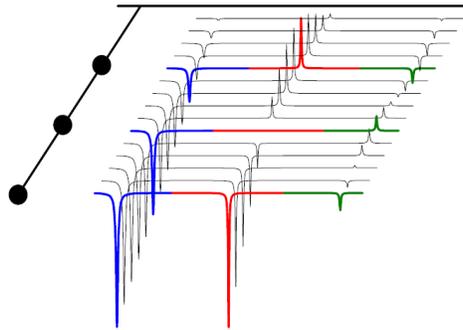


Fig. 47: Un affichage Waterfall de la partie imaginaire des FRF en fonction des points de mesure permet sur une poutre de visualiser les déformées en reliant les extremums pour chaque résonance

En fait la contribution modale peut se décomposer par le produit de :

- $c \{\Phi\}$ l'observabilité modale
- $\{\Phi\}^T b$ la contrôlabilité modale
- $\frac{1}{p^2 + \xi \omega_n p + \omega_n^2}$ l'amplification modale

Pour comprendre la contribution de chaque mode, je reprends l'exemple d'*Etienne Balmes* [Balmes, 2009] sur un exemple aéronautique : les modes de l'A340. Considérons les 3 modes de la figure 48. Pour le transfert Aile/Aile (N/m)

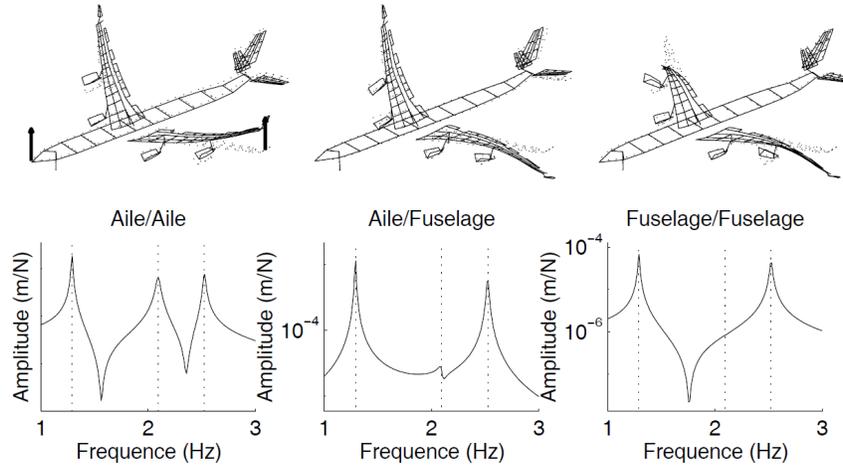


Fig. 48: Fonctions de transfert de l'A340 correspondant à une excitation verticale sur le fuselage ou sur l'aile et des capteurs placés à l'extrémité des ailes et sur le fuselage [Balmes, 2009]. Amplitude de la fonction de transfert Aile/Aile (N/m), Aile/Fuselage (N/m) et Fuselage/Fuselage (N/m) en fonction de la fréquence (0 – 3Hz)

en fonction de la fréquence (0-3Hz), l'observabilité modale $c\{\Phi\}$ et la contrôlabilité $\{\Phi\}^T b$ des 3 modes sont similaires. En prenant compte un amortissement similaire pour chaque mode, on voit que les pics ont des bandes passantes similaires. Le second mode est antisymétrique (Flexion 3 noeuds) et correspond à une amplitude très faible du mouvement du fuselage. Pour le transfert Aile/Fuselage (N/m), la contribution modale du produit $c\{\Phi\}\{\Phi\}^T b$ est très basse pour le second mode et donc les pics d'amplitude très faibles par rapport aux deux autres. Enfin pour le transfert Fuselage/Fuselage (N/m), que l'on peut décrire comme une fonction de transfert colocalisée, l'observabilité et la contrôlabilité sont très faibles, et donc le second mode à une contribution négligeable (antirésonance). On montre ainsi que l'instrumentation et le placement des capteurs sont des critères essentiels pour mener à bien une analyse modale. Sur des structures réelles, tous les modes ne sont pas visibles et le niveau des contributions dépend de plusieurs facteurs : l'observabilité, la contrôlabilité et le niveau d'amortissement (ainsi que la densité modale).

Pour finir toutes les théories énoncées précédemment sont **linéaires**... Dans les structures en opération on trouve de nombreuses **nonlinéarités** : matérielles (Loi de comportement élastoplastique, matériaux à mémoire de formes...), géométriques (mécanismes ou structures minces en grands déplacements), de contact (ou d'interface comme lois de Hertz, frottement sec ...). On peut citer

deux célèbres exemples que sont le pendule simple (nonlinéarité géométrique) et l'oscillateur de *Duffing* (raideur cubique). De nouveaux phénomènes apparaissent (distorsion d'harmonique, super-harmonique, dépendance au balayage en fréquences, à l'amplitude d'excitation ...) [Nayfeh et Mook, 1979, Vakakis, 2010] notamment sur les structures endommagées [Van Den Abeele et De Vischer, 2000, Worden *et al.*, 2008, Overbey et Todd, 2009, Nichols et Todd, 2009] en lien avec le chapitre 2 (paragraphe ??).

3 Techniques d'identification modale (système)

3.1 Etat de l'art

La définition de l'identification modale est le développement d'un modèle mathématique du comportement dynamique d'une structure à partir de tests expérimentaux. Dans son HDR, *Pierre Argoul* [Argoul, 2004] résume la problématique de l'identification dynamique^{||}, de la façon suivante : *Comment, à partir d'une expérience vibratoire sur la structure étudiée, connaître les caractéristiques du modèle de son comportement mécanique ?* Les premiers instigateurs de cette technique ont été les aviateurs qui étaient confrontés au problème crucial de « flottement » des avions. Ce phénomène dû au couplage aéroélastique entre l'air et la structure de l'avion provoque à certaines vitesses un phénomène de vibrations auto-excités pouvant causer la destruction de l'appareil. Il peut être prévu si l'on connaît les caractéristiques dynamiques de la structure, à savoir : vecteurs propres, fréquences propres et amortissements généralisés, masses généralisées (masses modales). Les premières méthodes développées dans les années 1960-70 ont été les méthodes d'appropriation modale [Angelini, 1978, Clerc, 1961] qui consistaient à appliquer à la structure un ensemble de forces excitatrices harmoniques convenablement réparties en amplitude et en phase, donnant une réponse de la structure proportionnelle à un mode propre du système conservatif associé. Le principe est d'exciter un mode réel en compensant les forces d'amortissement. On isole donc la contribution d'un mode en supprimant les contributions des autres modes. De l'expression générale d'une réponse forcée harmonique : $[M] \{\ddot{q}(t)\} + [C] \{\dot{q}(t)\} + [K] \{q(t)\} = \{F(t)\}$ il vient dans l'espace des fréquences, $(-\omega^2 [M] + j\omega [C] + [K]) \{q(\omega)\} = \{F(\omega)\}$

Les modes réels sont solutions de l'équation conservative : $(-\omega_r^2 [M] + [K]) \{q(\omega)\} = \{\Psi_r\}$

Ainsi si

$$\{F_{app}(\omega)\} = j\omega [C] \{\Psi_r\}$$

alors la réponse vérifie

$$(-\omega_r^2 [M] + [K]) \{q(\omega)\} = \{0\}$$

Il est rare que l'analyse modale soit une fin en soi. Les utilisateurs cherchent souvent à comparer des résultats de mesure à des résultats de calcul effectués dans la plupart des cas par éléments finis. Il se pose donc naturellement la question de la corrélation essais/calculs [Piranda, 2001].

^{||}. Bui [Bui et Bui, 1994] parle lui de vibrations inverses

Un Bref historique :

- Avant 1947 : mesures de la réponse seule
- 1947 : mesures de la réponse et de l'excitation *Kennedy, Pancu* : mesures des fréquences de résonance et de l'amortissement de structures d'avions.
- 1960-70 : progrès techniques des moyens de mesures (capteurs, électronique,...) et d'acquisition (analyseurs de spectre digitaux)
- 1962 : Theorie de test à résonance *Bishop et Gladwell*
- 1965 : algorithme FFT *Cooley et Tukey*
- Depuis 1975 ISMA
- Depuis 1982 IMAC

L'identification modale est un cas particulier d'un problème plus général d'identification de systèmes [Ljung, 1985] à partir d'un lot de données d'entrées/sorties. L'identification modale permet alors d'estimer les paramètres modaux (fréquences propres, taux d'amortissement modaux, formes modales) soit à partir des FRFs ou des RIs. Les techniques d'identification ont été d'abord appliquées sur des structures à comportement linéaire, et depuis elles n'ont cessé de se développer, de s'améliorer et de se complexifier. Les similarités entre les différents algorithmes proviennent du fait que les équations différentielles fondamentales qui régissent les vibrations du système sont supposées être du second ordre, linéaires, à coefficients constants et plus fondamentalement sur les propriétés qui ont été supposées pour le système : linéaire, invariant dans le temps, observabilité et réciprocity.

La classification générale donnée par *Maia et al* [Maia et Silva, 2001, Maia et al., 1997] (Figure 49) est fondée sur plusieurs critères qui ont été classés selon leur importance par ces auteurs. Le premier critère découle du domaine dans lequel les données sont traitées numériquement (temporel, fréquentiel); on pourrait y rajouter le domaine temps-fréquence. L'excitation peut être harmonique, large bande (chirp, bruit blanc, impact, naturelle ou ambiante) et l'estimation peut se faire sur les données fréquentielles (estimation d'une fonction de transfert) ou temporelles (estimation d'une réponse impulsionnelle) ou l'on doit faire une régression sur une exponentielle complexe (**Least Square Complex Exponential**, LSCE ou Méthode de *Prony* en traitement du signal), ou une approche contrôle type modèle d'état (SSI) [Ewins, 1984, Maia et al., 1997, Allemang et Phillips, 2004] . Des techniques mixtes (Temps/Fréquences ou Temps/Échelles) sont souvent utilisées pour estimer l'amortissement [Staszewski, 1997, Lardies et Gouttebroze, 2002]. En général, les modèles temporels ont tendance à donner de meilleurs résultats quand une large plage de fréquence ou plusieurs modes existent dans les données, tandis que les modèles dans le domaine fréquentiel ont tendance à donner de meilleurs résultats quand la plage de fréquence ou le nombre de modes est relativement limité. Toutefois, les méthodes en temps ne peuvent estimer que les modes dans la gamme de fréquence d'analyse et elles ne prennent pas en compte les effets résiduels des modes hors de la plage en question. C'est la raison pour laquelle, depuis quelques années, la recherche se dirige vers le domaine fréquentiel avec des techniques qui améliorent la précision du résultat en tenant compte des effets résiduels.

Les méthodes dans le domaine temporel et fréquentiel peuvent encore être divisées en méthodes indirectes (méthodes modales) et en méthodes directes. La qualification indirecte signifie que l'identification est basée sur le modèle modal, i.e., sur les paramètres modaux (fréquences naturelles, taux d'amortissement, constantes modales et leurs phases). La méthode directe désigne la procédure d'identification reliée au modèle spatial, i.e., l'équation matricielle d'équilibre à partir de laquelle toutes les méthodes sont déduites.

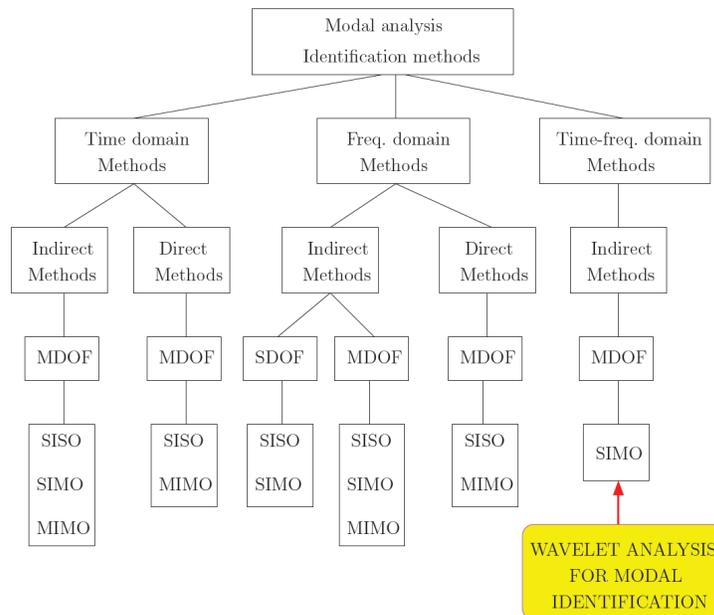


Fig. 49: Comparaison des différentes méthodes d'identification modale

La seconde distinction proposée par ces auteurs est le caractère direct ou indirect. Le qualificatif indirect signifie que l'identification est fondée sur le modèle modal c'est-à-dire sur les paramètres modaux (fréquences propres, taux d'amortissement, formes modales). Le qualificatif direct est donné lorsque la procédure repose sur les équations matricielles de base de la dynamique. Le troisième critère concerne le nombre de modes qui peuvent être analysés; on parle de méthodes à un ou à plusieurs degrés de liberté. plus précisément, la distinction entre deux types d'approches : une approche basée sur la physique du phénomène (mécanique des vibrations linéaires ou analyse modale) et une approche basée sur une description générale des relations entrée-sortie (théorie des systèmes). Dans ces deux approches, les modèles reliant les mesures et les paramètres qui en découlent prennent respectivement le qualificatif de boîte blanche (en relation avec une connaissance physique du phénomène et des lois fondamentales du mouvement) respectivement de boîte noire (sans lien avec une connaissance physique du phénomène). Cette terminologie permet aussi d'introduire la notion de modèle en boîte grise pour prendre en compte des modèles partiellement basés sur des connaissances physiques. Les paramètres modaux globaux sont les fréquences de résonances et les amortissements associés à chaque fréquence (ces 2 informations sont contenues par les pôles de la fonction de transfert). Les paramètres locaux sont les déformées. La reconstruction de ces déformées dépend du nombre de fonctions de transfert disponibles et donc du type d'identification à faire (SISO, SIMO, MISO, MIMO).

Le dernier critère est fondé sur le nombre des entrées et sur celui des sorties qui peuvent être pris en compte par la méthode, on parle de méthodes à une entrée-une sortie ou de méthodes à une entrée-plusieurs sorties et finalement à plusieurs entrées-plusieurs sorties. L'idée sous-jacente de ce critère est que les fréquences propres et les taux d'amortissement modaux ne varient pas en théorie, lorsque l'on passe d'une FRF à une autre. Par conséquent, il devient alors possible d'obtenir un ensemble de ces caractéristiques modales, plus consistant, en traitant en même temps plusieurs FRFs ou plusieurs RIs. Quand on dispose d'un lot de FRF on a deux approches possibles. Premièrement traiter indépendamment chaque FRF, on disposera donc, de paramètres modaux moyens et de la variance associé (approche local). Deuxièmement on peut traiter ce lot d'un point de vue global, on disposera d'un estimateur optimal (au sens des moindres carrés) en traitant le problème sous la forme de données surdéterminées (i.e. beaucoup de mesures et peu de paramètres à déterminer). On est dans ce cas dépendant de la consistance du lot de mesure (approche moindre carrée, norme l_2). En effet, en connaissant le nombre de pôles qui caractérisent la structure, on peut trouver les paramètres modaux en identifiant le **modèle à fraction partielle (MFP)** :

$$H(\omega) = \sum_{k=1}^N \frac{R_k}{j\omega - p_k} + \frac{R_k^*}{j\omega - p_k^*}$$

Ainsi, on détaillera dans un exemple (chapitre suivant) la décomposition de la fonction de transfert sous forme rationnelle en éléments simples (identifiés en minimisant l'erreur entre la FRF et le quotient de de polynôme en ω).

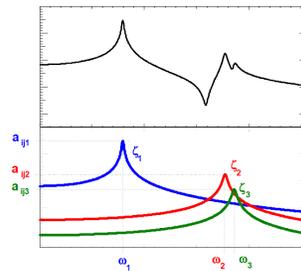


Fig. 50: Approche locale pour identifier les paramètres modaux par la méthode RFP en SDOF [Avitabile, 2007]

Cette décomposition laisse apparaître dans les pôles p et p^* du modèle à fraction partielle, les 2 premiers paramètres modaux : $p = -\delta_k - j\omega_k$. En effet, sa partie réelle représente l'amortissement et sa partie imaginaire nous renseigne sur la pulsation naturelle amortie du système. Le résidu R_k est un nombre qui rend compte de la force du mode. C'est un concept mathématique qui est un indicateur de la déformée modale : $H(\omega \rightarrow \omega_k) \approx \frac{R_k}{\delta_k}$.

On peut montrer que le résidu pour un mode particulier k est proportionnel au produit du déplacement modal à 1 DDL i par le déplacement modal à l'excitation j : $R_{ij}^k = \frac{P_{ik}P_{jk}}{2j\omega_k}$.

On peut remarquer que la partie imaginaire de $H(\omega)$ contient deux informations essentielles, l'amplitude et la direction.

On trouve aussi une autre terminologie, avec les qualificatifs de paramétrique et de non-paramétrique, qui peuvent être appliqués à des modèles ou des méthodes. Les méthodes d'identification paramétrique cherchent à déterminer les paramètres d'un modèle présumé à partir de considérations physiques sur le phénomène de vibrations pour que la réponse du modèle s'ajuste avec celle de la structure réelle. Les méthodes non-paramétriques recherchent directement la meilleure représentation fonctionnelle du phénomène sans hypothèse a priori sur un modèle physique du comportement de la structure. On peut rajouter que dans les méthodes paramétriques, les paramètres sont en nombre fini avec une signification physique claire tandis que dans les méthodes non-paramétriques, les paramètres sont en nombre illimité, sans signification physique. Le lecteur pourra trouver une intéressante bibliographie des outils avancés de traitement du signal (Modèles AR, ARX, Volterra ...) pour l'analyse modale [Shin et Hammond, 2008, Hammond et Waters, 2001].

Enfin certains travaux en analyse modale expérimentale ont une vision SHM. On peut citer les travaux initiaux de *Adams et al* [Adams et al, 1978] ou de *Richardson* [Richardson et Formenti, 1985] sur la corrélation des défauts sur les structures avec l'apparition de changement dans les paramètres modaux. Ce dernier auteur est d'ailleurs à la base de l'analyse modale expérimentale avec *Formenti*. En effet, ils développèrent les outils de **curve fitting** (**Complex exponential**, algorithme de *Prony*) pour estimer la déformée modale, algorithmes ensuite implémentés dans des logiciels d'analyse modale comme DIAMOND [Doebbling et al, 1997]. Des sociétés comme BK ou LMS offrent des solutions complètes d'analyse modale expérimentale. Au niveau algorithmes et logiciels innovants en analyse modale, les travaux de *Mével et Basseville* [Mével L., 2003a, Mével L., 2003b, Basseville M., 2004, Basseville M., 1993] sur les méthodes de sous-espaces pour l'analyse et la surveillance modale font références (Développement du logiciel COSMAD). *Etienne Balmes* a développé une boîte à outils **Matlab** (SDT **Structural Dynamics Toolbox**) permettant d'établir la corrélation entre modèle (3D éléments finis) et analyse modale expérimentale. En France toujours, **FEMTO ST** développe **MODAN** pour l'analyse modale et **AESOP** pour la vérification et validation de modèle [Foltete, 1998, Buffe et al., 2011]. La société toulousaine **TOPMODAL** développe un logiciel de recalage de modèle **PRIMODAL** que l'on peut coupler avec des codes de calcul industriel (**Nastran**). On peut citer aussi

Peeters et al pour leurs travaux sur l'identification de systèmes stochastiques pour l'analyse modale (espace d'état) [Peeters et al, 1999, Peeters et Roeck, 1999]. De plus il existe une littérature complète sur l'utilisation d'algorithmes de traitement du signal innovants en génie civil/mécanique. On peut mettre en avant, [Owen *et al.*, 2001, Hammond et Waters, 2001] pour leurs recherches sur l'application des modèles AR pour l'analyse des structures, *Kijewski et al* pour l'utilisation des ondelettes en identification de système [Kijewski et Kareem, 2003] et *Newland* pour ses travaux sur les ondelettes et l'acoustique [Newland, 1994a, Newland, 1994b]. Enfin *Allemang* propose un classement des différentes méthodes d'EMA [Allemang, 2002].

Modal Parameter Estimation Algorithms		Domain		Matrix Polynomial Order			Coefficients	
Algorithm		Time	Freq	Zero	Low	High	Scalar	Matrix
CEA	Complex Exponential Algorithm [1,2]	*				*	*	
LSCE	Least Squares Complex Exponential [1,2]	*				*	*	
PTD	Polyreference Time Domain [26,27]	*				*		$N_p \times N_s$
ITD	Ibrahim Time Domain [8,10]	*				*		$N_p \times N_s$
MRITD	Multiple Reference Ibrahim Time Domain [9]	*				*		$N_p \times N_s$
ERA	Eigensystem Realization Algorithm [14,15]	*				*		$N_p \times N_s$
PF	Polyreference Frequency Domain [8,19,21,24,25]	*	*		*			$N_p \times N_s$
SFD	Simultaneous Frequency Domain [9]	*	*		*			$N_p \times N_s$
MRFD	Multi-Reference Frequency Domain [9]	*	*		*			$N_p \times N_s$
RFP	Rational Fraction Polynomial [20]	*	*		*			Both
OP	Orthogonal Polynomial [22,23,28]	*	*		*		*	Both
CMIF	Complex Mode Indication Function [26]	*	*	*				$N_p \times N_s$

Fig. 51: Classement des différentes méthodes d'EMA [Allemang, 2002]

3.2 Liens entre l'identification et l'analyse modale expérimentale

L'identification modale est en fait l'application des techniques d'identification [Ljung et Ljung, 1987, Aarts,] à l'analyse modale expérimentale. L'exploitation des résultats de tests passe généralement par la détermination expérimentale de propriétés modales. De nombreuses méthodes ont été proposées dans la littérature par les mécaniciens (approche à base de modèles), ou l'identification de système (approche modèle d'état), par les mathématiciens (*Volterra, Wiener*). Ce chapitre propose d'augmenter la complexité des données à étudier en partant de signaux 1D (IRF ou FRF), à des signaux 2D (Déformées, lignes nodales) jusqu'à des signaux 2D plus le temps (estimation de mouvement appliqué à la dynamique des structures). Mon souhait dans ce chapitre est de montrer les bases de l'identification modale en insistant sur la pédagogie. L'identification se fait toujours par minimisation de la distance (norme quadratique) entre la prédiction d'un modèle (on parle de modèle paramétrique) et les données mesurées. Pour le traitement d'un grand nombre de pôles et FRFs, on se ramène exclusivement à des problèmes de moindres carrés de la forme générale :

- réponse impulsionnelle $h(k\Delta t) : J = \sum_{k=1}^N \|h_{exp}(k\Delta t) - h_{id}(k\Delta t)\|^2$
- fonction de transfert $H(\omega) : J = \|H_{exp}(\omega) - H_{id}(\omega)\|^2$

La norme quadratique fréquentielle est particulièrement importante car c'est celle que l'on visualise en superposant les fonctions de transfert mesurées et identifiées.

Prenons l'exemple simple de la régression linéaire : Soit $t = (t_1 \ t_2 \ \dots \ t_N)$ le temps et $y = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_N)$ une fonction à approximer. Le but est de trouver l'équation d'une droite qui minimise l'erreur quadratique. Supposons dans un premier temps une droite $D0 : y = p_1 \times t + p_0$. Chaque point doit donc vérifier, dans la mesure du possible, $y_i = p_1 \times t_i + p_0$.

soit, pour N points,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 & 1 \\ t_2 & 1 \\ \dots & \dots \\ t_N & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_1 \\ p_0 \end{pmatrix}$$

ou $y = T \times p$

On cherche ainsi à minimiser l'erreur quadratique du terme : $\|y - T \times p\|^2$

La matrice optimale p^* s'obtient grâce à la **pseudo-inverse** de T : $p^* = T^\dagger \times y$

D'une manière plus générale on peut adopter une formulation matricielle :

On pose le vecteur des mesures : $Y_N \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_N \end{pmatrix}$, et la matrice des régresseurs

$$(N \times d) : \Phi_N \begin{pmatrix} \Phi_1^T \\ \Phi_2^T \\ \dots \\ \Phi_N^T \end{pmatrix}$$

On peut écrire la fonction coût (ou objectif) à minimiser en fonction du vecteur paramètres θ ,

On estime les valeurs des paramètres du modèle $\hat{\theta}_N = \Phi_N^\dagger Y_N$

avec $\Phi_N^\dagger = [\Phi_N^T \Phi_N]^{-1} \Phi_N^T$ **pseudo-inverse**.

Les moindres carrés permettent de trouver la solution d'un système surdéterminé (la matrice des régresseurs à plus de lignes que de colonnes ($N > d$)).

On peut directement utiliser sur une seule FRF à 1 DDL l'approche **pseudo-inverse**. En effet en négligeant le terme conjugué, en identifiant les pics, on peut écrire la fonction de transfert pour chaque résonance ω_i :

$$H_{pq}(\omega_1) \approx \frac{Ar_{pq}}{(j\omega_1 - p_r)}$$

ou

$$H_{pq}(\omega_1)(j\omega_1 - p_r) = Ar_{pq}$$

et donc

$$H_{pq}(\omega_1)p_r + Ar_{pq} = (j\omega_1)H_{pq}(\omega_1)$$

et en répétant pour chaque résonance on obtient un système surdéterminé d'équations linéaires que l'on peut résoudre par **pseudo-inverse** :

$$\begin{pmatrix} H_{pq}(\omega_1) & 1 \\ H_{pq}(\omega_2) & 1 \\ \dots & \dots \\ H_{pq}(\omega_n) & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_r \\ Ar_{pq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j\omega_1 H_{pq}(\omega_1) \\ j\omega_2 H_{pq}(\omega_2) \\ \dots \\ j\omega_n H_{pq}(\omega_n) \end{pmatrix}$$

Essayons maintenant d'identifier une fonction de transfert (amplitude) expérimentale avec plusieurs résonance (MDOF) en ajustant une fraction de polynôme en p .

Soit la fonction de transfert exprimée comme

$$H(p) = \frac{b_{n-1}p^{n-1} + \dots + b_0}{a_n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{B(j\omega, \theta)}{A(j\omega, \theta)}$$

Nous voulons estimer le vecteur $\theta = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_n \ b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{n-1}]$ en minimisant la fonction coût suivante :

$$J = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \left(H_{exp}(j\omega_k) - \frac{B(j\omega_k, \theta)}{A(j\omega_k, \theta)} \right)^2$$

J étant quadratique un algorithme à base de gradient peut permettre de minimiser J. Il vient $\frac{\partial J}{\partial \theta} \rightarrow \theta_{optimal}$ Un des problèmes étant de trouver l'ordre n (*a priori* nombre de résonance visible) et de bien ajuster les zéros (antirésonances). En Matlab on peut identifier une fonction de transfert sous forme d'une fraction rationnelle complexe en utilisant *invfreqs*.

```
clear all; close all;
load H.mat; %chargement de la matrice data contenant f et H(jw) en colonnes
f=data(:,1);H=data(:,2);
% % RATIONAL FRACTION METHOD
% % simple loop used to display multiple. n of interest is found
% % to be 5 in this freq. range (0-500Hz). (5 modes)
n=5;
figure;semilogy(f,abs(H));%affichage log en ordonnée
xlabel('Frequency (Hz)');ylabel('Inertance Amplitude');
[num den] = invfreqs(H,f*(2*pi),2*n,2*n);% estime H(jw)! fonction rationnelle
[residuals poles direct_term] = residue(num,den); %decomposition elements simples
% comme une somme de resonateur lddl (pole complexe conjugué)
poles=poles([3:4 7:10]);% choix des poles pour les 3 resonances les plus importantes
n=n-2;
NF = abs(poles(1:2:2*(n)))/(2*pi)% Natural frequencies
NFD = imag(poles(1:2:2*(n)))/(2*pi);% damped natural frequencies
zeta = real(poles(1:2:2*(n)))/(2*pi)./NF% damping ratio
```

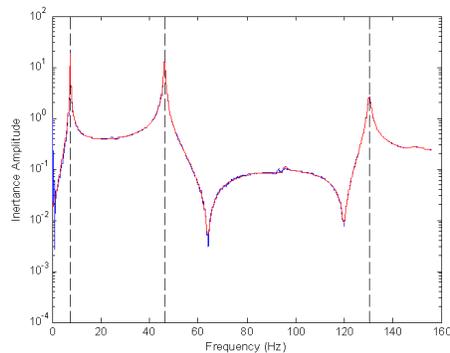


Fig. 52: Identification MDOF par RFP sur une exemple SISO (en rouge) et points expérimentaux (en bleu), 5 pôles complexes conjuguées sont sélectionnés en entrée. Si on ne connaît pas n , l'ordre du modèle, on peut choisir celle qui minimise l'erreur de reconstruction ou l'estimer par une approche SVD

Des outils industriels d'analyse modale semi-automatiques existent comme le **diagramme de stabilité** disponibles sur les systèmes LMS, BK. A partir d'un ordre du modèle où l'estimation de tous les paramètres modaux (fréquences propres, taux d'amortissement, formes propres) sont stables (variation max de 1%, 5% et 2% respectivement), on peut extraire globalement les paramètres modaux. Pour déterminer l'ordre du modèle (sur un lot de FRFs) on peut utiliser la décomposition en valeurs singulières de la matrice des fonctions de transfert (avec les lignes correspondant aux fréquences et colonnes aux paires entrée/sortie) qui doit donner au plus N valeurs singulières significatives.

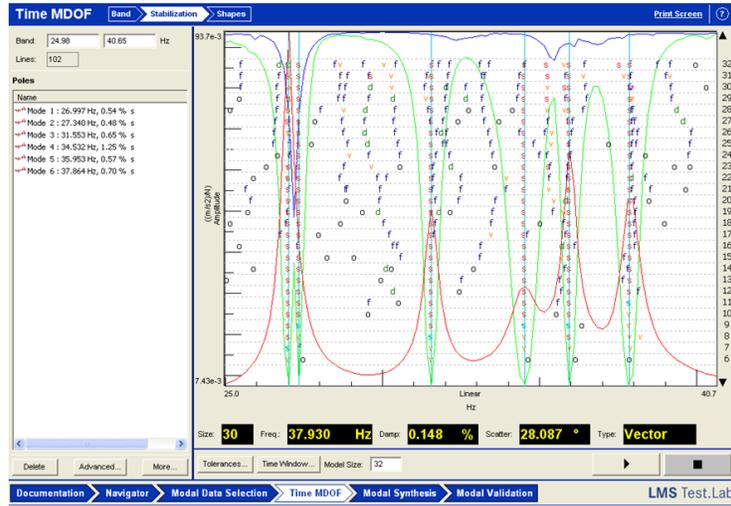


Fig. 53: Polymax (polyreference LSCE) : sur l'ensemble des FRFs (une par point de mesure en SIMO), on peut calculer la somme des FRF (en rouge), un critère avancé CMIF (en vert) désignant les résonances. On sélectionne chaque mode désiré (et prédit par les indicateurs SUM et CMIF) à partir d'un ordre du modèle où tout les paramètres modaux sont stables

Une importante validation est la reconstruction (ou synthèse) modale, permettant de comparer N couples de FRFs (N FRFs mesurées) : La première est la FRF expérimentale H_{pq} , la seconde est la reconstruction (sur la même bande passante) à partir des paramètres modaux identifiés \tilde{H}_{pq} . On peut ainsi calculer classiquement l'erreur RMSE ou la corrélation COR :

$$COR_{pq} = \frac{\left\| \sum_{\omega=\omega_1}^{\omega_2} H_{pq}(j\omega) \tilde{H}_{pq}^*(j\omega) \right\|}{\left\| \sum_{\omega=\omega_1}^{\omega_2} H_{pq}(j\omega) H_{pq}^*(j\omega) \right\| \left\| \sum_{\omega=\omega_1}^{\omega_2} \tilde{H}_{pq}(j\omega) \tilde{H}_{pq}^*(j\omega) \right\|}$$

Enfin, le MMIF (Multivariate Mode Indicator Function) est utilisée [Williams *et al.*, 1985] pour détecter le nombre de pôles d'une structure faiblement amor-

tie. On suppose que les données représentent des fonctions de transfert entre force et déplacement, vitesse ou accélération. A la résonance, la réponse d'un mode isolé est purement imaginaire (voir l'oscillateur à 1 DDL). Le MMIF détecte les résonances en regardant le rapport d'amplitude entre réponse imaginaire et réponse totale (pour une mesure en vitesse). Le CMIF (Complex Mode Indicator Function) est un critère alternatif au MMIF qui utilise une décomposition en valeur singulière de $H(s)$ à chaque fréquence, où les résonances apparaissent clairement comme des maxima de la plus grande valeur singulière.

Une tentative d'unification des méthodes a été présentée par *Allemang* [Allemang et Brown, 1998, Allemang et Phillips, 2004], et se révèle être très intéressante tant d'un point de vue recherche que pédagogique. Le lecteur pourra trouver une intéressante bibliographie des outils avancés de traitement du signal (Modèle AR, ARX, séries de *Volterra* ...) pour l'analyse modale [Shin et Hammond, 2008, Hammond et Waters, 2001].

La méthode **UMPA: Unified Matrix Polynomial Algorithm** introduit un concept original : le concept d'espace caractéristique assimilable à \mathbb{R}^3 dont le référentiel est formé par deux axes correspondant à l'information spatiale (en termes de degrés de liberté de l'entrée et de la sortie reprenant en compte les informations précédentes une ou plusieurs entrées, une ou plusieurs sorties) et par un troisième axe à l'information temporelle ou fréquentielle du domaine des mesures. Ils montrent que les approches fréquentielles et temporelles génèrent la même forme de matrice (d'ordre polynomiale). Cela ne signifie pas que les matrices $[\alpha]$ et $[\beta]$ sont égales dans les deux cas (elles sont connexes), ainsi les deux modèles ne conduisent pas exactement aux mêmes paramètres modaux.

Tous les algorithmes qui peuvent être représentés par le concept UMPA impliquent plusieurs étapes :

- ① — Mettre les données mesurées sous forme d' un système d'équations linéaires (surdéterminé).
- Estimer ($[\alpha]$ et $[\beta]$ par une méthode des moindres carrés).
- ② — Utiliser les scalaires (SISO) ou matrices (MISO, MIMO, SIMO) précédentes pour calculer la matrice des coefficients polynomiaux.
- Résoudre ce système (les racines sont les fréquences de résonance).
- ③ — A partir de l'écriture en fraction rationnelle, on forme pour toutes les fréquences de résonance un nouveau système surdéterminé .
- Estimer les taux d'amortissement et les résidus (déformées modales) par une méthode des moindres carrés.

De la forme rationnelle de la FRF (SISO) on peut écrire :

$$H_{pq}(p) = \frac{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_0}{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_0} = \frac{\sum_{k=0}^n b_k p^k}{\sum_{k=0}^m a_k p^k}$$

or

$$H_{(pq)}(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^n b_k j\omega^k}{\sum_{k=0}^m a_k j\omega^k}$$

En utilisant $H_{pq}(j\omega) = X_p(j\omega)/F_q(j\omega)$ et en réarrangeant les termes $[\alpha]$ et $[\beta]$, il vient :

$$\sum_{k=0}^m a_k j\omega^k X_p(j\omega) = \sum_{k=0}^n b_k j\omega^k F_q(j\omega)$$

Les inconnues dans les équations ci-dessus sont les scalaires α et β :

$$[\alpha_0 \ \alpha_1 \ \dots \ \alpha_n \ \beta_0 \ \beta_1 \ \dots \ \beta_m] \times \begin{bmatrix} j\omega^0 X_p(\omega_0) \\ j\omega^1 X_p(\omega_1) \\ \dots \\ j\omega^n X_p(\omega_n) \\ j\omega^0 F_p(\omega_0) \\ j\omega^1 F_p(\omega_1) \\ \dots \\ j\omega^m F_p(\omega_m) \end{bmatrix} = 0$$

Les équations ci dessus impliquent $(m + 1) + (n + 1)$ inconnues. En décidant qu'un des coefficients est égale à 1, on trouve $m + n + 1$ inconnues.

Les inconnues peuvent être estimées en utilisant $m + n + 1$ équations ET en faisant l'acquisition des entrées et des sorties à $m + n + 1$ fréquences. Généralement, on peut acquérir les signaux à une fréquences d'échantillonnages plus importantes (plus de fréquences) et donc on peut trouver une solution de type moindré carré (Figure 54).

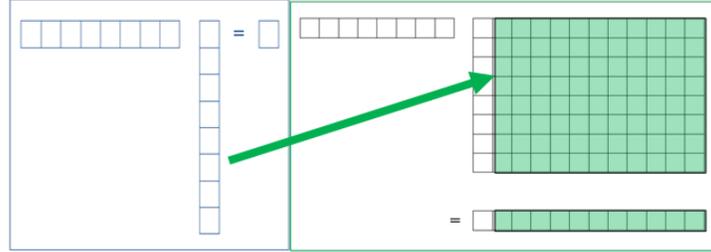


Fig. 54: Résolution du système surdéterminé par addition de nouvelles mesures (plusieurs fréquences au lieu d'une seule)

On peut aussi écrire le problème SISO d'un point de vue temporel, en utilisant les modèles ARMA (modèles auto-régressifs à moyenne mobile, ou aussi modèle de *Box-Jenkins* en statistiques) :

$$\sum_{k=0}^m a_k x(t_{i+k}) = \sum_{k=0}^n b_k f(t_{i+k})$$

En utilisant la compaction matricielle, il vient :

$$[\alpha_0 \ \alpha_1 \ \dots \ \alpha_n \ \beta_0 \ \beta_1 \ \dots \ \beta_m] \times \begin{bmatrix} x(t_{i+0}) \\ x(t_{i+1}) \\ \dots \\ x(t_{i+m}) \\ f(t_{i+0}) \\ f(t_{i+1}) \\ \dots \\ f(t_{i+n}) \end{bmatrix} = 0$$

On peut noter que les solutions de ce problème sont réelles et que l'équation linéaire peut être résolue pour $(m + 1) + (n + 1)$ inconnues en échantillonnant les signaux d'entrée et de sortie plus finement. Enfin, on peut bien entendu étendre les algorithmes précédents à des entrées/sorties multiples. The expansion of the previous model to handle multiple input - multiple output data yields the following :

$$\sum_{k=0}^m [a_k j\omega^k] \{X(j\omega)\} = \sum_{k=0}^n [b_k j\omega^k] \{F(j\omega)\}$$

The unknowns in the above linear equation are the matrix alpha and beta coefficients. Note that the size of the coefficient matrix $[\alpha_k]$ will normally be $No \times No$ and the coefficient matrix $[\beta_k]$ will normally be $No \times Ni$ when the equations are developed from experimental data.

The previous equation can be rearranged into the following matrix form by moving all of the terms to the left :

$$[[\alpha_0] [\alpha_1] \dots [\alpha_n] [\beta_0] [\beta_1] \dots [\beta_m]] \times \begin{bmatrix} j\omega^0 \{X(\omega_0)\} \\ j\omega^1 \{X(\omega_1)\} \\ \dots \\ j\omega^n \{X(\omega_n)\} \\ j\omega^0 \{F(\omega_0)\} \\ j\omega^1 \{F(\omega_1)\} \\ \dots \\ j\omega^m \{F(\omega_m)\} \end{bmatrix} = 0$$

The above linear equation represents No linear equations involving matrix unknowns. Since any unknown alpha matrix can be assumed to be the identity matrix $[I]$, the number of unknowns can be reduced by one . The choice of which unknown alpha matrix that is set to identity is a numerical issue. These unknowns can be solved by forming sufficient equations by acquiring input and output data at a number of frequencies.

The previous multiple input - multiple output model can be reformulated to utilize frequency response function (FRF) data as follows. First, post multiply both sides of the equation by $\{F\}^H$:

$$\sum_{k=0}^m [[a_k](j\omega)^k] \{X(j\omega)\} \{F\}^H = \sum_{k=0}^n [[b_k](j\omega)^k] \{F(j\omega)\} \{F\}^H$$

Now recognize that the product of $\{X(j\omega)\} \{F\}^H$ is the output- input cross spectra matrix ($[G_{xf}(\omega)]$) for one ensemble and $\{F(j\omega)\} \{F\}^H$ is the input-input cross spectra matrix ($[G_{ff}(\omega)]$) for one ensemble . With a number of ensembles (averages), these matrices are the common matrices used to estimate the FRFs in a MIMO case. This yields the following cross spectra model :

$$\sum_{k=0}^m [[a_k](j\omega)^k] [G_{xf}(\omega)] = \sum_{k=0}^n [[b_k](j\omega)^k] [G_{ff}(\omega)]$$

The previous cross spectra model can be reformulated to utilize frequency response function (FRF) data by post multiplying both sides of the equation by $[G_{ff}(\omega)^{-1}]$:

$$\sum_{k=0}^m [[a_k](j\omega)^k] [G_{xf}(\omega)][G_{ff}(\omega)^{-1}] = \sum_{k=0}^n [[b_k](j\omega)^k] [G_{ff}(\omega)][G_{ff}(\omega)^{-1}]$$

Therefore , the multiple input - multiple output FRF model is :

$$\sum_{k=0}^m [[a_k](j\omega)^k] [H(\omega)] = \sum_{k=0}^n [[b_k](j\omega)^k] [I]$$

The unknowns in the above linear equation are the matrix alpha and beta coefficients. Note that the size of the coefficient matrix $[a_k]$ will normally be $No \times No$ and the coefficient matrix $[b_k]$ will normally be $No \times Ni$ when the equations are developed from experimental data. Since the FRF matrix is normally considered to be reciprocal ($H_{pq} = H_{qp}$), the previous formulation can be developed from the transposed FRF matrix. This means that the size of the coefficient matrix $[a_k]$ will be $Ni \times Ni$ and the coefficient matrix $[b_k]$ will normally be $Ni \times No$ for this case.

The previous equation can be rearranged into the following matrix form by moving all of the terms to the left :

$$[[\alpha_0] [\alpha_1] \dots [\alpha_n] [\beta_0] [\beta_1] \dots [\beta_m]] \times \begin{bmatrix} j\omega^0 \{H(\omega_0)\} \\ j\omega^1 \{H(\omega_1)\} \\ \dots \\ j\omega^n \{H(\omega_n)\} \\ j\omega^0 \{I\} \\ j\omega^1 \{I\} \\ \dots \\ j\omega^m \{I\} \end{bmatrix} = 0$$

The above linear equation represents No linear equations involving matrix unknowns. Since any unknown alpha matrix can be assumed to be the identity matrix $[I]$, the number of unknowns can be reduced by one . The choice of which unknown alpha matrix that is set to identity is a numerical issue. These unknowns can be solved by forming sufficient equations by acquiring input and output data at a number of frequencies.

*Annexe : Transfer Function sensitivity

Mechanical Background

In this section, the theoretical background for the numerical approach used in this work is briefly presented. Basic equations for modal analysis and the calculation of frequency response functions for a discretized system are given. Also, the optimization problems statement for the presented damage localization method is developed.

Eq. 50 shows the set of equations of motion in matrix notation for a random discretized structure. Hereby, the system is considered to be discretized by Finite Elements and \mathbf{M} , \mathbf{C} and \mathbf{K} are the system's mass, damping and stiffness matrices, respectively. The vector (f) is a time-dependent load vector.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}(t) \quad (50)$$

The analyses consist of the two principal steps, which are displayed in fig. ???. A modal analysis is performed to determine the principal dynamic characteristics of the system, like natural frequencies and mode shapes. From these modal parameters the response of the structure to excitation can be calculated. This is similar to solving the homogeneous and particular solution for the system of differential equations.

Modal Analysis

For calculating the natural frequencies, the system is considered to vibrate harmonically, damping and external forces are neglected. By replacing the displacement vector and its derivative by a sinusoidal solution function, the general eigenvalue problem can be formulated (eq. 51).

$$(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}) \mathbf{u}_0 = 0 \quad (51)$$

Assuming the existence of the vector \mathbf{u}_0 , meaningly a non-trivial solution of this set of equations, the system's determinant has to vanish. This leads to the *characteristical equation* displayed in eq. 52.

$$\det(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M}) = 0 \quad (52)$$

The solutions of this equation are the n eigenvalues for a system of n degrees of freedom, where each eigenvalue λ_i corresponds to a natural angular frequency ω_i as stated in eq. 53.

$$\lambda_i = \omega_i^2 \quad \text{with } i = 1, 2, \dots, n \quad (53)$$

The amplitude vector corresponding to an eigenvalue is the *eigenvector* or *mode shape vector* ψ_i . The combinations of natural frequencies and mode shape vectors describe preferred states of vibration of the structure [?]. For the numerical estimation of the eigenvalues, several algorithms are available, e.g. the *Lanczos method* [?], which is also available in *MSC.Nastran*.

Modal Frequency Response Analysis (Harmonic Analysis)

The cornerstone of modal frequency response analyses is the diagonalization of the system's matrices by a *modal transformation*. In a separation approach the primary variables are replaced by a linear combination of the so-called *modal coordinates* and the mode shape vectors, as shown in eq. 54, where Ψ is the *modal matrix* and \mathbf{q} is the vector of modal coordinates.

$$\mathbf{u}(t) = \psi_1 q_1(t) + \psi_2 q_2(t) + \dots + \psi_n q_n(t) = \Psi \mathbf{q}(t) \quad (54)$$

Due to the orthogonality properties of the mode shape vectors, inserting the approach into eq. 50 and premultiplying the equation by Ψ^T leads to eq. 55, which are the decoupled equations of motion for the analyzed system. For diagonalizing the damping matrix by the mode shapes vectors from the modal analysis, a *proportional damping approach* [?] has to be assumed.

$$\Psi^T \mathbf{M} \Psi \ddot{\mathbf{q}}(t) + \Psi^T \mathbf{C} \Psi \dot{\mathbf{q}}(t) + \Psi^T \mathbf{K} \Psi \mathbf{q}(t) = \Psi^T \mathbf{f}(t) \quad (55)$$

The system now consists of n equations of motion for *single degree of freedom oscillators* in form of eq. 56, where m_i is the modal mass, c_i a modal damping coefficient, k_i the modal stiffness and p_i a modal force.

$$m_i \ddot{q}_i(t) + c_i \dot{q}_i(t) + k_i q_i(t) = p_i(t) \quad \text{with} \quad p_i(t) = \psi_i^T \mathbf{f} \quad (56)$$

The equation can be normalized by the modal mass, so that the coefficients are expressed in terms of natural angular frequencies ω_i and modal damping ratios ζ_i , as they are defined in eq. 57. This leads to eq. 58.

$$\omega_i^2 = k_i/m_i \quad \text{and} \quad \zeta_i = \frac{1}{2} \frac{c_i}{\sqrt{k_i m_i}} \quad (57)$$

$$\ddot{q}_i(t) + 2\zeta_i \omega_i \dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = \frac{p_i(t)}{m_i} \quad (58)$$

Eq. 58 is an *ordinary differential equation of second order* that has the solution stated in eq. 59 which can be derived by a complex approach where Ω is the excitation frequency. Here, the variable \mathbf{q} has already been transformed in the frequency domain which is noted by the circumflex.

$$\hat{q}_i(\Omega) = \frac{1}{\omega_i^2 - \Omega^2 + 2j\zeta_i \omega_i \Omega} \cdot \frac{\hat{p}_i}{m_i} \quad (59)$$

From here the matrix of *frequency response functions* (FRFs) can easily be derived, since the frequency response functions are defined as the displacement response functions multiplied by the inverse of the excitation force vector (eq. 60).

$$\mathbf{H}(\Omega) = \hat{\mathbf{u}}(\Omega) \hat{\mathbf{f}}^{-1}(\Omega) = \sum_{i=1}^n \psi_i \hat{q}_i(\Omega) \hat{\mathbf{f}}^{-1}(\Omega) = \sum_{i=1}^n \psi_i \frac{1}{\omega_i^2 - \Omega^2 + 2j\zeta_i \omega_i \Omega} \cdot \frac{\psi_i^T}{m_i} \quad (60)$$

For a certain degree of freedom k , the frequency response function due to an excitation force at the l -th degree of freedom can then be calculated by eq. 61.

$$H_{kl}(\Omega) = \sum_{i=1}^n \frac{\psi_{ik}\psi_{il}}{m_i(\omega_i^2 - \Omega^2 + 2j\zeta_i\omega_i\Omega)} \quad (61)$$

If the natural frequencies and damping ratios are known, this equation can be evaluated for discrete excitation frequencies.

Sensitivity Analysis

Since mathematical programming methods usually involve the calculation of gradients of the objectives for the sensitivity analysis, the derivatives of the constraints with respect to the design variables are presented in this section. Eq. 62 gives the gradients of the resonance frequencies that can be derived from eq. 51 in the frequency domain form as shown in reference [?], where ψ_{ie} and ψ_{je} are the components of the eigenvectors with respect to the nodal degrees of freedom of the element e .

$$\frac{\partial\omega_i^2}{\partial\chi_e} = \psi_{ie}^T \left(\frac{\partial\mathbf{E}_e}{\partial\chi_e} - \omega_i^2 \frac{\partial\mathbf{M}_e}{\partial\chi_e} \right) \psi_{je} \quad (62)$$

The partial derivatives of the frequency response functions have been derived in [?]. Based on eq. 60, the frequency response function can be written as eq. 63.

$$\mathbf{H}(\Omega) = \mathbf{\Psi}\hat{\mathbf{q}}(\Omega)\hat{\mathbf{f}}^{-1}(\Omega) \quad (63)$$

Then, the gradients of the frequency response functions with respect to the element density fraction χ_e are calculated as in eq. 64.

$$\frac{\partial\mathbf{H}(\Omega)}{\partial\chi_e} = \mathbf{\Psi}\mathbf{S}\hat{\mathbf{q}}(\Omega)\hat{\mathbf{f}}^{-1}(\Omega) \quad (64)$$

Here, \mathbf{S} is the sensitivity matrix as defined in eq. 65, where ω_i is the i th natural frequency and ζ_i the corresponding damping ratio. As before, Ω is the exciting frequency.

$$S_{ij} = \frac{-1}{\omega_i^2 - \Omega^2 + i2\zeta_i\omega_i\Omega} \psi_{ie}^T \left(\frac{\partial\mathbf{E}_e}{\partial\chi_e} - \Omega^2 \frac{\partial\mathbf{M}_e}{\partial\chi_e} \right) \psi_{je} \quad (65)$$

In both cases the gradients of the stiffness and mass matrices can be calculated as in eq. 66. These calculations are principally performed in an enhanced form in Nastran.

$$\frac{\partial\mathbf{K}_e}{\partial\chi_e} = \int_{V_e} (\mathbf{DN})^T \frac{\partial\mathbf{E}_e}{\partial\chi_e} \mathbf{DN} dV \quad \frac{\partial\mathbf{M}_e}{\partial\chi_e} = \int_{V_e} \mathbf{N}^T \frac{\partial\rho_e}{\partial\chi_e} \mathbf{N} dV \quad (66)$$

Références

- [Aarts,] AARTS, R. *System Identification and Parameter Estimation*.
- [Adams et al, 1978] ADAMS, R. et AL (1978). A vibration technique for non-destructively assessing the integrity of structures. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 20: 93–100.
- [Allemang, 2002] ALLEMANG, R. (2002). Modal Parameter Estimation Overview/Review. *Course notes University of Cincinnati*.
- [Allemang et Brown, 1993] ALLEMANG, R. et BROWN, D. (1993). Experimental modal analysis. *VCH Publishers, Inc., Handbook on Experimental Mechanics. Second Revised Edition(USA), 1993*, pages 635–750.
- [Allemang et Phillips, 2004] ALLEMANG, R. et PHILLIPS, A. (2004). The unified matrix polynomial approach to understanding modal parameter estimation : an update. *In Proceedings, International Conference on Noise and Vibration Engineering (ISMA)*.
- [Allemang et Brown, 1998] ALLEMANG, R. J. et BROWN, D. L. (1998). A unified matrix polynomial approach to modal identification. *Journal of Sound and Vibration*, 211(3):301 – 322.
- [Angelini, 1978] ANGELINI, J., F. R. P. J. (1978). Research method of the eigenmodes and generalized elements of a linear mechanical structure. *The Shock and vibration bulletin*, 48(3-4):5.
- [Argoul, 2004] ARGOUL, P. (2004). Quelques réflexions sur l'identification de paramètres en dynamique des matériaux et des structures.
- [Ashory, 1999] ASHORY, M. (1999). *High quality modal testing methods*. University of London.
- [Avitabile, 2007] AVITABILE, P. (2007). Teaching Experimental Structural Dynamics Applications. *Sound and Vibration*, 41(11): 14.
- [Balmes, 2009] BALMES, E. (2009). Methods for vibration design and validation Méthodes de conception et de validation en vibration.
- [Basseville M., 1993] BASSEVILLE M., Benveniste A., G. B. G. M. B. D. D. P. P. M. O. M. (1993). Damage monitoring in vibration mechanics, issues in diagnostics and predictive maintenance. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 7(5):401–423.
- [Basseville M., 2004] BASSEVILLE M., Mevel L., G. M. (2004). Statistical model-based damage detection and localization, subspace-based residuals and damage-to-noise sensitivity ratios. *Journal of Sound and Vibration*, 275(3-5):769–794.
- [Benaroya, 2004] BENAROYA, H. (2004). *Mechanical vibration : analysis, uncertainties, and control*, volume 1. CRC.
- [Blanchet et Prado, 1990] BLANCHET, G. et PRADO, J. (1990). *Méthodes numériques pour le traitement du signal : exemples et programmes*. Masson.
- [Bonnet, 2009] BONNET, M. (2009). Identification et Inversion : cours. *Course notes Ecole Centrale Paris*.
- [Brown et al., 1979] BROWN, D., ALLEMANG, R., ZIMMERMAN, R. et MERGEAY, M. (1979). Parameter estimation techniques for modal analysis. *SAE paper*, 790221:19–20.
- [Buffe et al., 2011] BUFFE, F., ROY, N. et COGAN, S. (2011). Modal identification and model updating of pleiades. *Advanced Aerospace Applications, Volume 1*, pages 131–143.
- [Bui et Bui, 1994] BUI, H. et BUI, H. (1994). *Inverse problems in the mechanics of materials : an introduction*. CRC press Boca Raton.
- [Chung-Bang Yun et Bahng, 2001] CHUNG-BANG YUN, J.-H. Y. et BAHNG, E. Y. (2001). Joint damage assessment of framed structures using a neural networks technique, engineering structures. *Engineering Structures*, 23(5):425–435.
- [Clerc, 1961] CLERC, D. (1961). Une méthode d'appropriation des forces d'excitation aux modes propres non amortis d'une structure'. *La Recherche Aeronautique*.
- [Da Silva et al., 2008] DA SILVA, S., COGAN, S., FOLTÊTE, E., BUFFE, F. et al. (2008). Metrics for non-linear model updating in mechanical systems.
- [de Coulon, 1984] de COULON, F. (1984). *Théorie et traitement des signaux*, volume 1.
- [Doebbling et al, 1997] DOEBBLING, S. et AL (1997). A computer toolbox for damage identification based on changes in vibration characteristics. *Proceedings of the International Workshop on Structural Health Monitoring, Stanford*.
- [Duvaut, 1991] DUVAUT, P. (1991). *Traitement du signal : concepts et applications*. Hermes.

- [Ewins, 1984] EWINS, D. (1984). *Modal testing : theory and practice*. Research Studies Press Ltd., Taunton, Somerset, England.
- [Foltete, 1998] FOLTETE, E. (1998). Identification modale de structures lineaires et faiblement non-lineaires. *These de doctorat, UFR des sciences et techniques de l'universite de Franche Comte*.
- [Foltete, 2011] FOLTETE, E. (2011). Analyse modale : cours. *Course notes EUROSAAE*.
- [Friswell et Mottershead, 1995] FRISWELL, M. et MOTTERSHEAD, J. (1995). *Finite element model updating in structural dynamics*, volume 38. Springer.
- [Fritzen et al., 1998] FRITZEN, C., JENNEWEIN, D. et KIEFER, T. (1998). Damage detection based on model updating methods. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 12:163–186.
- [Gu et al., 2005] GU, D., PETKOV, P. et KONSTANTINOV, M. (2005). *Robust control design with MATLAB*. Springer Verlag.
- [Hammond et Waters, 2001] HAMMOND, J. et WATERS, T. (2001). Signal processing for experimental modal analysis. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 359(1778):41.
- [Hladik et Morand, 1969] HLADIK, J. et MORAND, M. (1969). *La transformation de Laplace \hat{A} plusieurs variables*. Masson et Cie Éd.
- [Jung et Ewins, 1992] JUNG, H. et EWINS, D. (1992). On the Use of Simulated" Experimental" Data for Evaluation of Modal Analysis Methods. *In Proceedings of the International Modal Analysis Conference*, pages 421–421.
- [Kijewski et Kareem, 2003] KIJEWSKI, T. et KAREEM, A. (2003). Wavelet transforms for system identification in civil engineering. *Computer Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 18(5):339–355.
- [Lardies et Gouttebroze, 2002] LARDIES, J. et GOUTTEBROZE, S. (2002). Identification of modal parameters using the wavelet transform. *International Journal of Mechanical Sciences*, 44(11):2263–2283.
- [Ljung, 1985] LJUNG, L. (1985). System identification. *Uncertainty and Control*, pages 48–83.
- [Ljung et Ljung, 1987] LJUNG, L. et LJUNG, E. (1987). *System identification : theory for the user*. Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ.
- [Maia et al., 1997] MAIA, N., e SILVA, J. et (PORTUGAL), I. S. T. (1997). *Theoretical and experimental modal analysis*. Research Studies Press Hertfordshire, UK.
- [Maia et Silva, 2001] MAIA, N. et SILVA, J. (2001). Modal analysis identification techniques. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 359(1778):29.
- [Mallat, 2000] MALLAT, S. (2000). *Une exploration des signaux en ondelettes*.
- [Max et Berthier, 1981] MAX, J. et BERTHIER, D. (1981). *Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques*. Masson Paris etc.
- [McGuire, 1995] MCGUIRE, J. (1995). Notes on semi-rigid connections. *FEMCI Book, NASA*.
- [Mevel L., 2003a] MEVEL L., Goursat M., B. M. (2003a). Stochastic subspace-based structural identification and damage detection - application to the steel-quake benchmark. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 17(1):91–101.
- [Mevel L., 2003b] MEVEL L., Goursat M., B. M. (2003b). Stochastic subspace-based structural identification and damage detection and localization - application to the z24 bridge benchmark. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 17(1):143–151.
- [Mitchell, 1994] MITCHELL, L. (1994). Modal Test Methods-Quality, Quantity, and Unobtainable. *Sound and Vibration*, 28(11):10–17.
- [Morlier, 2004] MORLIER, J. (2004). Structural health monitoring of structure using advanced vibration analysis. *In Proceedings of the 5th International Conference on Acoustical and Vibratory Surveillance Methods and Diagnostic Techniques, Surveillance 5*.
- [Mottershead et Friswell, 1993] MOTTERSHEAD, J. et FRISWELL, M. (1993). Model updating in structural dynamics : a survey. *Journal of sound and vibration*, 167(2):347–375.
- [Nayfeh et Mook, 1979] NAYFEH, A. et MOOK, D. (1979). *Nonlinear oscillations*, volume 31. Wiley Online Library.
- [Newland, 1993] NEWLAND, D. (1993). An introduction to random vibrations, spectral and wavelet analysis.
- [Newland, 1994a] NEWLAND, D. (1994a). Wavelet analysis of vibration, part i :

- Theory. *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 116:409–416.
- [Newland, 1994b] NEWLAND, D. (1994b). Wavelet analysis of vibration, part ii : Wavelet maps. *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 116:417–425.
- [Nichols et Todd, 2009] NICHOLS, J. et TODD, M. (2009). Nonlinear features for shm applications. *Encyclopedia of Structural Health Monitoring*.
- [Olgac et Jalili, 1998] OLGAC, N. et JALILI, N. (1998). Modal analysis of flexible beams with delayed resonator vibration absorber : Theory and experiments. *Journal of Sound and Vibration*, 218(2):307–331.
- [Overbey et Todd, 2009] OVERBEY, L. et TODD, M. (2009). Effects of noise on transfer entropy estimation for damage detection. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23(7):2178–2191.
- [Owen et al., 2001] OWEN, J., ECCLES, B., CHOO, B. et WOODINGS, M. (2001). The application of auto-regressive time series modelling for the time-frequency analysis of civil engineering structures. *Engineering Structures*, 23(5):521–536.
- [Peeters et al, 1999] PEETERS, B. et AL (1999). Output-only modal analysis : development of a gui for matlab. *Proceedings of IMAC 17, the International Modal Analysis Conference, Kissimmee*, pages 1049–1055.
- [Peeters et Roeck, 1999] PEETERS, B. et ROECK, G. D. (1999). Reference based stochastic subspace identification in civil engineering. *Proceedings of the 2nd International Conference on Identification in Engineering Systems, Swansea*, pages 639–648.
- [Peyre, 2009] PEYRE, G. (2009). *Advance signal and image processing*. ceremade.
- [Peyre, 2010] PEYRE, G. (2010). *The Numerical Tours of Signal Processing*.
- [Piranda, 2001] PIRANDA, J. (2001). Analyse modale expérimentale. *Techniques de l'ingénieur. Bruit et vibrations*, (R6180).
- [Preumont, 1990] PREUMONT, A. (1990). *Vibrations aléatoires et analyse spectrale*. PPUR presses polytechniques.
- [Puel, 2007] PUEL, G. (2007). La prise en compte des incertitudes dans la validation des modeles : cours.
- [Richardson et Formenti, 1985] RICHARDSON, M. et FORMENTI, D. (1985). Parameter estimation from frequency response measurements using rational fraction polynomials. *Structural Measurement Systems Technical Note*, 85(3).
- [Semmlow, 2004] SEMMLOW, J. (2004). *Bio-signal and biomedical image processing*. Marcel Dekker.
- [Shannon, 1948] SHANNON, C. (1948). A mathematical theory of communication. *Bell System Technical Journal*, 27(10):623–656.
- [Shin et Hammond, 2008] SHIN, K. et HAMMOND, J. (2008). *Fundamentals of signal processing for sound and vibration engineers*. Wiley.
- [Staszewski, 1997] STASZEWSKI, W. (1997). Identification of damping in MDOF systems using time-scale decomposition. *Journal of Sound and Vibration*, 203(2):283–305.
- [Tarazaga, 2004] TARAZAGA, P. (2004). Model updating using a quadrating form. *Master thesis, Virginia Polytechnic Institute*, scholar.lib.vt.edu/theses/available/etd-07262004-193730/unrestricted/ETD.pdf.
- [Vakakis, 2010] VAKAKIS, A. (2010). *Advanced Nonlinear Strategies for Vibration Mitigation and System Identification*, volume 518. Springer Verlag.
- [Van Den Abeele et De Visscher, 2000] VAN DEN ABEELE, K. et DE VISSCHER, J. (2000). Damage assessment in reinforced concrete using spectral and temporal nonlinear vibration techniques. *Cement and concrete research*, 30(9):1453–1464.
- [Vayssade, 2004] VAYSSADE, C. (2004). Optimisation en mécanique : cours UTC.
- [Williams et al., 1985] WILLIAMS, R., CROWLEY, J. et VOLD, H. (1985). The multivariate mode indicator function in modal analysis. *In Proceedings of the 3rd International Modal Analysis Conference*, pages 66–70.
- [Worden et al., 2008] WORDEN, K., FARRAR, C., HAYWOOD, J. et TODD, M. (2008). A review of nonlinear dynamics applications to structural health monitoring. *Structural Control and Health Monitoring*, 15(4):540–567.