

Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace



# Robust modal parameters estimation: Damage detection on composites structures

Final Project

**Internship tutors** Dr. Joseph Morlier (ISAE/DMSM)

**Student** Boris Chermain (ENS2M)



# Sommaire

Problématique .....	6
1. Etude bibliographique .....	10
1.1 Approche théorique en identification modale .....	10
1.1.1 Méthode RFP (classiquement utilisée) .....	10
1.1.2 Méthode CWT .....	13
1.1.3 Méthode LSCE .....	17
1.2 Utilisation des plans d'expérience en ingénierie .....	19
1.2.1 Plans complets .....	19
1.2.2 Plans de Box-Behnken .....	20
2. Développements .....	22
2.1 Démarche .....	22
2.2 Utilisation de l'interface .....	24
2.3 Construction du Code MATLAB .....	25
2.3.1 Critères d'obtention des fréquences et des amortissements pour les 3 méthodes : .....	25
2.3.2 Codes pour les plans d'expérience : .....	26
2.3.3 Signal simulé : .....	27
3. Résultats .....	29
3.1 Résultats de l'étude 1 .....	30
3.1.0 Préambule : .....	30
3.1.1 Méthode RFP : .....	30
3.1.2 Méthode CWT : .....	31
3.1.3 Méthode LSCE : .....	32
3.1.4 Condensé des résultats des coefficients des modèles : .....	33
3.2 Résultats de l'étude 2 .....	34
3.2.1 Méthode RFP : .....	34
3.2.2 Méthode CWT : .....	35
3.2.3 Méthode LSCE: .....	36
3.2.4 Condensé des résultats des coefficients des modèles : .....	37
4. Interprétation .....	39
4.1 Analyse de l'étude 1 .....	39
4.2 Analyse de l'étude 2 .....	39
4.3 Récapitulatif des résultats méthode/méthode .....	40
5. Conclusion et perspectives .....	42



# Acronymes

FRF	Frequency Response Function
IRF	Impulse Response Function
SIMO	Single Input Multi Output
SISO	Single Input Single Output
DOF	Degree of Freedom
MDOF	Multi Degree Of Freedom
RFP	Rational Fraction Polynomial
CEM	Complex-Exponential Method
ITD	Ibrahim Time Domain
CWT	Continuous Wavelet Transform
WPM	Wavelet Packet Method
LSCE	Least Square Complex Exponential

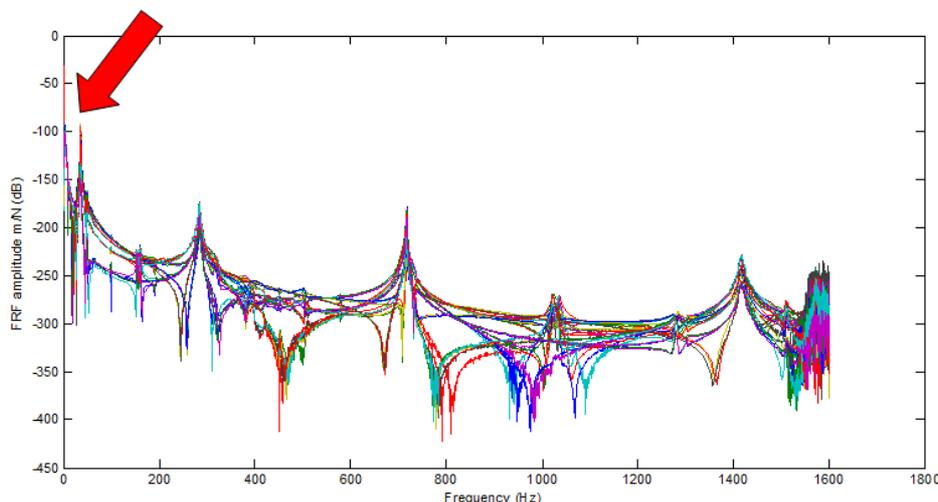
# Problématique

L'analyse modale expérimentale est un des moyens de contrôle non destructif (CND) permettant d'estimer l'intégrité d'une structure dans les domaines du génie mécanique, de l'aéronautique et du génie civil en se basant sur les principes de la dynamique des structures. Cette analyse consiste à déterminer les fréquences propres, les coefficients d'amortissement et les déformées modales, à partir des mesures effectuées (accélération, vitesse ou déplacement) sur la structure excitée naturellement (vent, trafic, ...) ou de manière forcée (pot vibrant, marteau d'impact, ...).

Le sujet de ce stage était « *l'estimation robuste des paramètres modaux pour la détection d'endommagement sur des poutres composites* ». Ce travail s'intègre à la thèse d'Amir SHADIN dont le sujet est le suivant : « *Etude de la corrélation entre le taux d'endommagement et le facteur de perte sur des matériaux composites* ». En effet celui-ci a commencé des manipulations expérimentales visant à extraire les changements du comportement des FRF (Fonctions de Réponse en Fréquence) et à mettre en évidence une corrélation de ces changements avec l'endommagement.

L'identification (ou l'extraction) des paramètres modaux à partir des capteurs (force en entrée, accélérations en sortie) est un processus complexe. Deux approches sont généralement utilisées : l'approche temporelle et l'approche fréquentielle. Cette dernière est la plus utilisée (estimation de la Fonction de réponse en Fréquence, FRF) mais elle possède quelques désavantages : d'une part, les amplitudes des modules de la FRF sont biaisées car on utilise seulement la partie utile du signal (l'intégrale étant réalisée sur une infinité de points). D'autre part, le signal d'entrée doit être riche en fréquences pour ne pas créer de passages par zéro sur le spectre. L'approche temporelle est basée, elle, sur la création d'une matrice de convolution qui résout les problèmes de l'approche fréquentielle mais est sujette à un mauvais conditionnement car la réponse impulsionnelle est souvent instable.

De nombreux essais, de type SIMO (Single Input Multi Output), ont été réalisés par le thésard sur des poutres composites avec différents niveaux d'endommagement. Les FRF mesurées en 33 points (maillage régulier, Fig1) de la structure ont ensuite été analysées grâce au logiciel LMS TESTLAB et à la méthode POLYMAX développée par les ingénieurs de LMS. Cette figure présente l'Amplitude des FRFs issues des 33 points de mesures d'une poutre en composites T300-914 [à partir d'un vibromètre laser et d'un pot vibrant sur la gamme 5-1500 Hz]. Intéressons nous au premier mode.

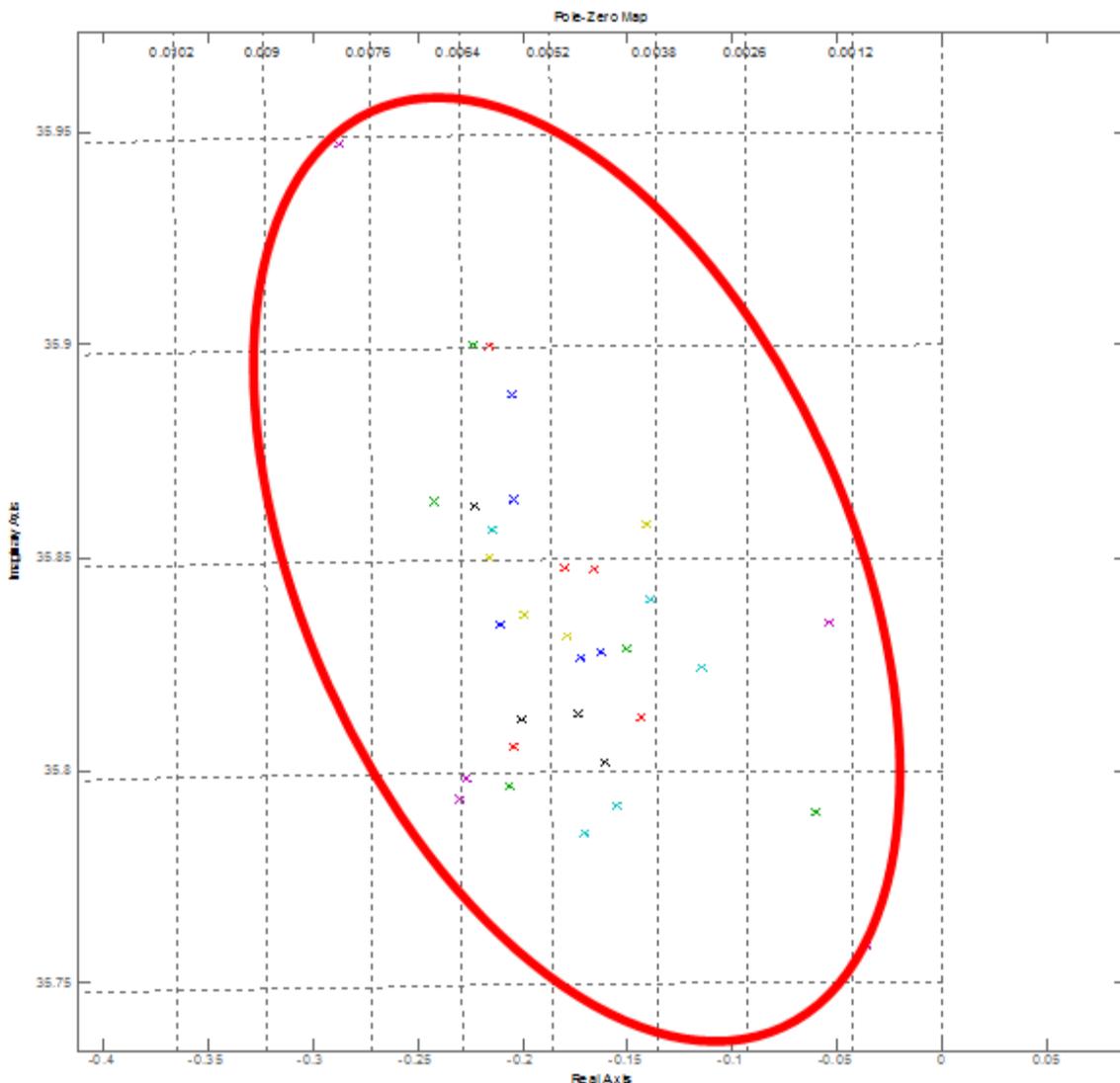


## Rapport Master 2 Recherche DSA

Les pôles des fonctions de transfert identifiés à partir des 33 points de mesures d'une poutre en composites T300-914 [à partir d'un vibromètre laser et d'un pot vibrant sur la gamme 30-40 Hz, premier mode de flexion] montre une stabilité en fréquence (partie imaginaire varie de 35.8 à 35.95) mais une variabilité en amortissement de 0.1% à 0.8%.

Polymax fréquence Moyenne=35.91Hz

Polymax amortissement Moyen=0.585%



L'instabilité en amortissement nous amène à nous demander si la variabilité du matériau, l'influence du bruit de mesure, la précision des algorithmes d'identification ou autres ne biaisent pas les résultats.

Le nombre conséquent de points de mesure a pour but d'identifier localement l'endommagement en analysant les FRF. En effet lors d'une analyse modale, les paramètres modaux tels que la fréquence et l'amortissement sont des indicateurs globaux du comportement dynamique de la structure tandis que la déformée nous donne des informations sur le comportement local. Classiquement on détermine les paramètres modaux en moyennant chaque FRF mesurée, les fréquences propres et les amortissements (la notion d'écart-type étant ici très importante).

Les figures 1, 2, 3 présentées ci-dessous expliquent le contexte expérimental de la thèse en cours :

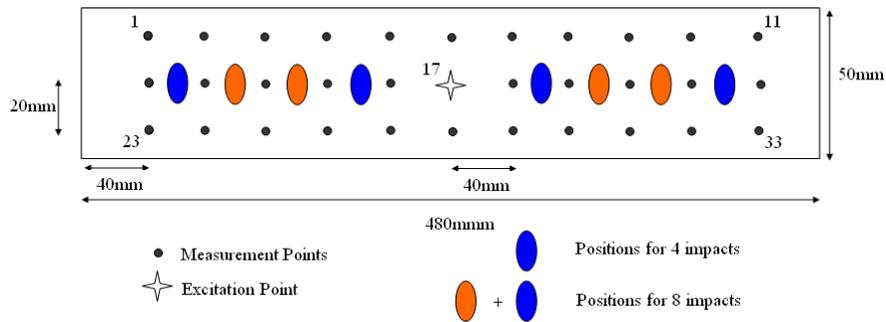


Fig1 : Points d'excitation, de mesure et d'impact.



Fig2 : Montage expérimental

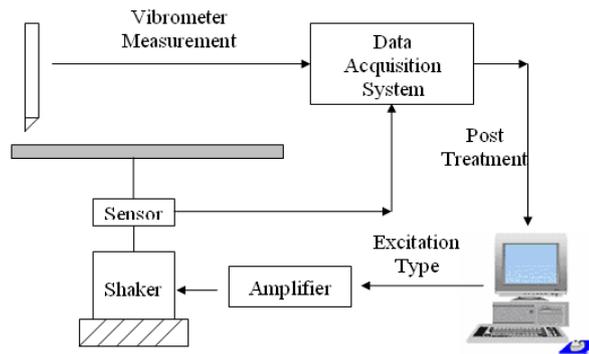


Fig3 : Système d'acquisition des mesures

L'identification modale est un processus complexe et beaucoup de facteurs influent sur les mesures comme le bruit, dû par exemple à la qualité et la sensibilité des différents capteurs, instruments de mesure. La période d'échantillonnage est elle limitée par le matériel. La densité des modes ou encore l'influence des résidus des modes hors-bande d'analyse sont des paramètres à prendre en compte. De plus, le fait d'endommager les structures introduit aussi des phénomènes de non-linéarité expliqués entre autre dans [6] qui biaisent les résultats. Ces phénomènes s'expriment par des sauts de la réponse en fréquence suivant le sens de balayage en fréquence, par la génération d'harmoniques supérieures biaisant l'amplitude de la FRF et une dépendance de la forme de la FRF à l'amplitude du signal d'excitation.

Tous ces facteurs influent sur les mesures et sur la détermination des paramètres modaux. Malgré l'impact important de l'amortissement sur les performances des structures, il continue à être une énigme dans les bureaux d'étude. Ceci est dû principalement à une dispersion importante des mesures car l'amortissement dépend beaucoup de l'amplitude de la réponse mais également des méthodes d'identification génératrices d'erreurs. Cela nous amène à nous poser la question suivante : comment mesurer de manière fiable les paramètres modaux et plus particulièrement l'amortissement ?

Ce rapport tente de répondre partiellement à cette question en réalisant des plans d'expérience à partir de trois algorithmes choisis après la lecture de plusieurs ouvrages sur le sujet. Le rapport se compose de trois parties :

La première partie présente une synthèse bibliographique sur deux sujets : les différentes méthodes d'identification modales que l'on a étudiée et les plans d'expériences, outils pertinent de l'ingénieur moderne. Les différentes méthodes sont présentées afin de comprendre les algorithmes de calcul et on introduira également la méthode POLYMAX (LSCE) qui est celle utilisée par LMS. Deux plans d'expériences seront ensuite abordés : le plan complet et le plan de Box-Behnken.

## Rapport Master 2 Recherche DSA

---

La deuxième partie présente la démarche et les moyens utilisés pour réaliser cette validation numérique supervisée. On présente tout d'abord les facteurs choisis pour ces deux études, le programme MATLAB développé durant le stage puis un petit guide d'utilisation.

La troisième partie regroupe tous les résultats obtenus suite à ces deux études qui nous permettront de donner une interprétation sur la sensibilité des différents facteurs sur la précision de l'estimation de l'endommagement.

Finalement, des conclusions importantes sur les résultats obtenus sont tirées et on propose des idées pour une poursuite de ce travail.

# 1. Etude bibliographique

## 1.1 Approche théorique en identification modale

Beaucoup de travaux ont été déjà réalisés sur l'étude de la robustesse de certaines méthodes d'identification modale. Ces travaux, clairement explicités dans les thèses [1], [2], [3] et [4], comparent plusieurs méthodes entre elles.

Dans [1], plusieurs méthodes sont étudiées : Complex-Exponential Method (CEM), Hilbert-Envelop Method, Ibrahim Time Domain (ITD) Method et Rational Fraction Polynomial Method (RFP). De manière générale, il est apparu que la méthode RFP donnait la meilleure estimation de l'amortissement. Dans [2] et [4], les méthodes CEM, Wavelet Packet Method (WPM) et Continuous Wavelet Transform Method (CWT) sont comparées. Les meilleurs résultats sont obtenus avec la méthode des ondelettes même si la méthode WPM paraît plus précise pour les modes bien séparés et la méthode CEM, pour les hautes fréquences et les forts amortissements.

Après analyse des résultats, nous avons décidé de choisir les méthodes les plus robustes de chaque analyse : la méthode RFP (Rational Fraction Polynomial, références originales peuvent être trouvée dans [1]) et la méthode des ondelettes CWT (Continuous Wavelet Transform références originales peuvent être trouvée dans [2]). Comme le but final est de comparer ces méthodes à la méthode POLYMAX qui est une version basée sur la méthode LSCE [5] (Least Squares Complex Exponential), nous avons décidé d'étudier également cette méthode.

### 1.1.1 Méthode RFP (classiquement utilisée)

Cette méthode s'applique dans le domaine des fréquences et est utilisée lors d'essais MDOF et SIMO. La méthode Rational Fraction Polynomial (RFP) s'applique sur une seule FRF. La FRF dans la méthode RFP s'écrit sous forme d'un rapport de deux polynômes dont le numérateur a les coefficients  $a_k$  et le dénominateur a les coefficients  $b_k$ . La minimisation entre la FRF du modèle et la FRF mesurée permettra de déterminer les coefficients  $a_k$  et  $b_k$ . A partir des  $b_k$ , on déduit les fréquences propres et les taux d'amortissement. A partir des  $a_k$  et des pôles précédemment déterminés, on trouve les constantes modales et les phases.

$$H(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{2N-1} a_k (i\omega)^k}{\sum_{k=0}^{2N} b_k (i\omega)^k}$$

L'erreur entre la fonction de transfert estimée et la fonction de transfert expérimentale est obtenue initialement par la méthode des moindres carrés. Elle est ensuite calculée par l'introduction de la méthode du gradient qui permet de minimiser cette erreur malgré l'utilisation de matrices mal conditionnées. Cette erreur est donnée par :

$$e_j = \frac{\sum_{k=0}^{2N-1} a_k (i\omega_j)^k}{\sum_{k=0}^{2N-1} b_k (i\omega_j)^k} - H_e(\omega_j)$$

La fonction erreur est ensuite linéarisée conduisant à travailler sur la fonction erreur ci-dessous :

$$e'_j = e_j \sum_{k=0}^{2N-1} b_k (i\omega_j)^k$$

Et avec  $b_{2N}=1$ , on obtient :

$$e'_j = \sum_{k=0}^{2N-1} a_k (i\omega_j)^k - H_e(\omega_j) \left[ \sum_{k=0}^{2N-1} b_k (i\omega_j)^k + (i\omega_j)^{2N} \right]$$

Un vecteur « Erreur » est ensuite définie pour les L fréquences mesurées :

$$\{E\} = \begin{Bmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_L \end{Bmatrix}$$

Puis en réintégrant l'erreur sous cette forme dans l'équation précédente, on obtient :

$$\{E\} = \begin{bmatrix} 1 & (i\omega_1) & (i\omega_1)^2 & \cdots & (i\omega_1)^{2N-1} \\ 1 & (i\omega_2) & (i\omega_2)^2 & \cdots & (i\omega_2)^{2N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (i\omega_L) & (i\omega_L)^2 & \cdots & (i\omega_L)^{2N-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{2N-1} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} H_e(\omega_1) & H_e(\omega_1)(i\omega_1) & \cdots & H_e(\omega_1)(i\omega_1)^{2N-1} \\ H_e(\omega_2) & H_e(\omega_2)(i\omega_2) & \cdots & H_e(\omega_2)(i\omega_2)^{2N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_e(\omega_L) & H_e(\omega_L)(i\omega_L) & \cdots & H_e(\omega_L)(i\omega_L)^{2N-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{2N-1} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} H_e(\omega_1)(i\omega_1)^{2N} \\ H_e(\omega_2)(i\omega_2)^{2N} \\ \vdots \\ H_e(\omega_L)(i\omega_L)^{2N} \end{Bmatrix}$$

$$\circ \begin{matrix} \{E\} = [P] \{a\} - [T] \{b\} - \{W\} \\ \text{(Lx1)} \quad \text{(Lx2N)(2Nx1)} \quad \text{(Lx2N)(2Nx1)} \quad \text{(Lx1)} \end{matrix}$$

L'équation qui sera minimisée avec la méthode du gradient est la suivante :

$$J = \{E^*\}^T \{E\}$$

Qui, réinjectée dans le système linéaire d'équations donne :

$$J = \{a\}^T \operatorname{Re}([P^*]^T [P]) \{a\} + \{b\}^T \operatorname{Re}([T^*]^T [T]) \{b\} + \{W^*\}^T \{W\} - 2\{a\}^T \operatorname{Re}([P^*]^T [T]) \{b\} - 2\{a\}^T \operatorname{Re}([P^*]^T [W]) + 2\{b\}^T \operatorname{Re}([T^*]^T [W])$$

C'est une équation qui possède des matrices mal-conditionnées menant à l'utilisation de la méthode du gradient pour minimiser la fonction erreur. Toutefois, la méthode des

moindres carrés peut être utilisée pour connaître la valeur initiale estimée nécessaire à la méthode du gradient.

La méthode des moindres carrés s'obtient en dérivant la précédente équation par rapport à  $\{a\}$  et  $\{b\}$  et en les annulant.

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left([P^*]^T [P]\right)\{a\} - \operatorname{Re}\left([P^*]^T [T]\right)\{b\} - \operatorname{Re}\left([P^*]^T \{W\}\right) &= \{0\} \\ \operatorname{Re}\left([T^*]^T [T]\right)\{b\} - \operatorname{Re}\left([T^*]^T [P]\right)\{a\} + \operatorname{Re}\left([T^*]^T \{W\}\right) &= \{0\} \end{aligned}$$

Il faut ensuite résoudre ce système avec les premières valeurs de  $\{a\}$  et de  $\{b\}$  afin d'évaluer le gradient. Le gradient par rapport à  $\{a\}$  est la dérivée partielle de l'équation J par rapport à  $\{a\}$  :

$$\operatorname{Re}\left([P^*]^T [P]\right)\{a\} - \operatorname{Re}\left([P^*]^T [T]\right)\{b\} - \operatorname{Re}\left([P^*]^T \{W\}\right) = \{M\}$$

Où  $\{M\}$  est le vecteur gradient par rapport à  $\{a\}$ . On obtient de même pour le gradient par rapport à  $\{b\}$  :

$$\operatorname{Re}\left([T^*]^T [T]\right)\{b\} - \operatorname{Re}\left([T^*]^T [P]\right)\{a\} + \operatorname{Re}\left([T^*]^T \{W\}\right) = \{N\}$$

Le vecteur gradient est donc le suivant :

$$\{V\} = \begin{Bmatrix} M \\ N \end{Bmatrix}$$

La direction du vecteur gradient est calculée afin de la soustraire aux coefficients conduisant à minimiser la fonction. Cette direction est donnée par :

$$\{S\} = \frac{-\{V\}}{\|\{V\}\|}$$

Où  $\|\{V\}\|$  est la norme du vecteur.

Les nouveaux coefficients sont donc :

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \{V\} + \{S\}$$

A chaque pas, le vecteur gradient et sa norme sont calculés et comparés avec la tolérance désirée. Si la valeur est supérieure à la tolérance, on soustrait la direction du vecteur gradient aux coefficients pour en générer de nouveaux. Ces étapes sont répétées tant que la tolérance n'est pas atteinte.

Les paramètres modaux sont ensuite calculés à partir des coefficients de l'équation. Les racines ou les pôles du dénominateur mènent à l'obtention des fréquences propres et des taux d'amortissement grâce à ces deux formules :

$$\begin{aligned} f_r &= \frac{|P_r|}{2\pi} \\ \zeta_r &= -\frac{\operatorname{Real}(P_r)}{|P_r|} \end{aligned}$$

Où  $P_r$  est le pôle du mode r (pôles complexes conjugués).

Pour calculer les « résidus », la fraction rationnelle est décomposée en éléments simples et le numérateur s'exprime comme le produit de constantes complexes conjuguées que l'on appelle « résidus ».

Le pseudo algorithme Matlab permet de comprendre les étapes de calcul des paramètres modaux :

- *Invfreqs* donne les coefficients du numérateur et du dénominateur :  $a_k$  et  $b_k$
- *Residue* calcule les résidues et les pôles.
- $Damp\_ratio\_rfp = -real(P\_rfp)/(abs(P\_rfp))$  calcule les amortissements
- $Fn\_rfp = abs(P\_rfp)*max(w)/(2*pi)$  calcule les fréquences

### 1.1.2 Méthode CWT

La particularité de la méthode CWT est qu'elle s'applique dans le domaine temps-fréquence contrairement aux autres qui sont soit dans le domaine temporel soit dans le domaine fréquentiel.

La transformée de Fourier analyse « le contenu fréquentiel » d'un signal. La transformée de fourrier d'une fonction ou d'un signal est une transformation linéaire qui consiste à décomposer le signal dans la base des fonctions du type  $e^{-j\omega t}$ , ce qui donne :

$$\hat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt.$$

La transformée de Fourier est une représentation globale du signal. Elle ne permet donc pas d'analyser le comportement fréquentiel local, ni la régularité locale. En conséquence, il est devenu indispensable pour certaines applications de représenter simultanément le signal en temps et en fréquence.

L'analyse spectrale classique est basée sur la transformation de Fourier, c'est-à-dire sur une décomposition en ondes chromatiques éternelles. Cette approche trouve une limitation naturelle dès lors que les signaux analysés sont non stationnaires (fréquences évolutives, transitoires, ruptures, modulations, ...), ce qui est bien souvent le cas dans les applications. Dans de telles situations, une description plus pertinente consiste à représenter un signal à l'aide de deux variables conjointes : le temps et la fréquence.

Sur la figure 4, par exemple, la ligne de maxima (inclinée) représente la variation de fréquence au cours du temps.

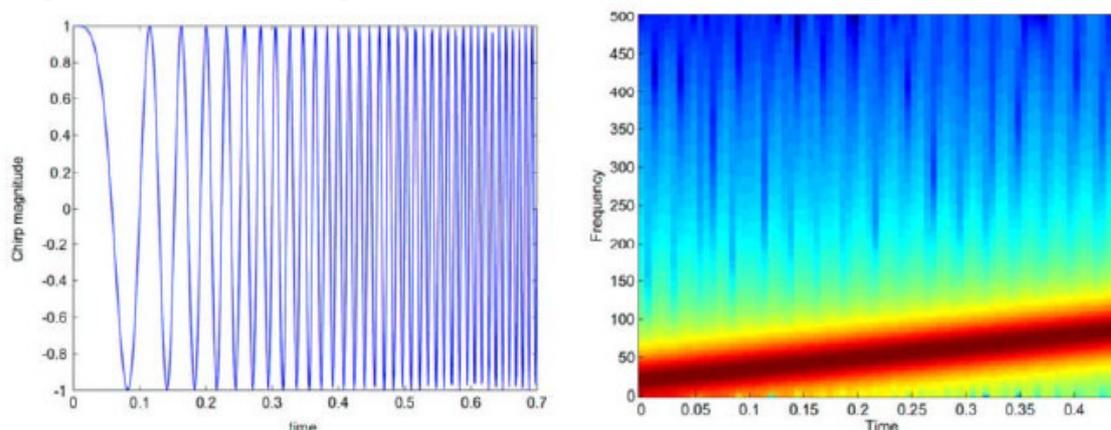


Fig4 : Chirp : signal modulé en fréquences (gauche) et représentation temps-fréquence (droite)

## Rapport Master 2 Recherche DSA

---

La transformée en ondelettes remplace la sinusoïde de Fourier par une famille de translations et de dilations d'une même fonction : l'ondelette. Les paramètres de translation  $u$  et de dilatation  $s$  sont les deux arguments de la transformée en ondelettes. C'est une représentation temps-échelle que l'on peut assimiler à une représentation temps-fréquence. La transformée en ondelettes est définie par :

$$Wf(u, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^* \left( \frac{t-u}{s} \right) dt$$

Où l'atome de base  $\psi$  est une fonction de moyenne nulle, centrée au voisinage de 0 et d'énergie finie. La famille de vecteurs est obtenue par translation et dilatation de l'atome de base :

$$\psi(u, s) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^* \left( \frac{t-u}{s} \right)$$

La fonction précédente est centrée au voisinage de  $u$ , comme l'atome de Fourier fenêtré. Si le centre de fréquence  $\psi$  (ondelette élémentaire) est  $\eta$ , le centre de fréquence de la fonction dilatée est en  $\eta/s$ . L'écart-type en temps est proportionnel à  $s$ . L'écart-type en fréquence est inversement proportionnel à  $s$ . La figure 2 montre le principe des boîtes de Heisenberg.

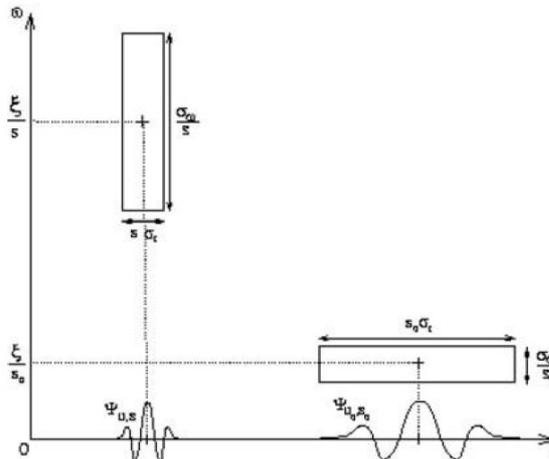


Fig5 : Principe des boîtes de Heisenberg

Aux échelles plus fines, on peut « entasser » plus de boîtes de Heisenberg côte à côte car la résolution temporelle est meilleure. La transformée en ondelettes a donc une résolution temps-fréquence qui dépend de l'échelle  $s$ . Le scalogramme d'un signal est défini par :

$$P_W f(u, \xi) = |Wf(u, s)|^2 = |Wf(u, \frac{\eta}{\xi})|^2$$

En ce qui concerne la transformée en ondelettes continue, une ondelette est une fonction d'énergie finie et de moyenne nulle. Outre sa boîte de Heisenberg, la propriété la plus importante d'une ondelette est le nombre de ses moments nuls :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^k \psi(t) dt = 0$$

Pour  $0 \leq k \leq n$ . La nullité des moments d'une ondelette permet d'analyser la régularité locale d'un signal.

## Rapport Master 2 Recherche DSA

Certaines applications ont de meilleurs résultats avec une ondelette mère qu'avec une autre. Par exemple pour la détection de discontinuités, l'ondelette appelée « chapeau mexicain » a de meilleurs résultats. Voilà pourquoi dans la plupart des applications la transformée en ondelettes est calculée avec le chapeau mexicain (mexican hat) qui est en fait une double dérivation d'une gaussienne. Normalisée, son expression est :

$$\psi(t) = \frac{2}{\pi^{1/4}\sqrt{3}\sigma} \left( \frac{t^2}{\sigma^2} - 1 \right) e^{-\frac{t^2}{2}}$$

L'ondelette de Morlet (gaussienne modulée) peut aussi être utilisée. Les deux conviennent parfaitement pour des signaux très amortis. Ce sont des ondelettes complexes (l'information de phase est conservée). On définit l'ondelette de Morlet par :

$$\psi(t) = e^{j\omega_0 t} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

de transformée de Fourier :

$$\Psi(\omega) = \sqrt{2} e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2}}$$

L'ondelette fille est :

$$\psi(u,s) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^*\left(\frac{t-u}{s}\right) = \frac{1}{\sqrt{s}} e^{j\omega_0\left(\frac{t-u}{s}\right)} e^{0.5\left(\frac{t-u}{s}\right)^2}$$

La figure 6 montre que cette ondelette n'a pas de moyenne nulle. Sur la transformée de Fourier de l'ondelette, il y a une composante continue DC =  $10^{-6}$  à  $\omega_0 = 5.486$  rad/s ou  $f_0 \approx 0.8$  Hz. On utilise couramment une valeur entre 5 et 6.

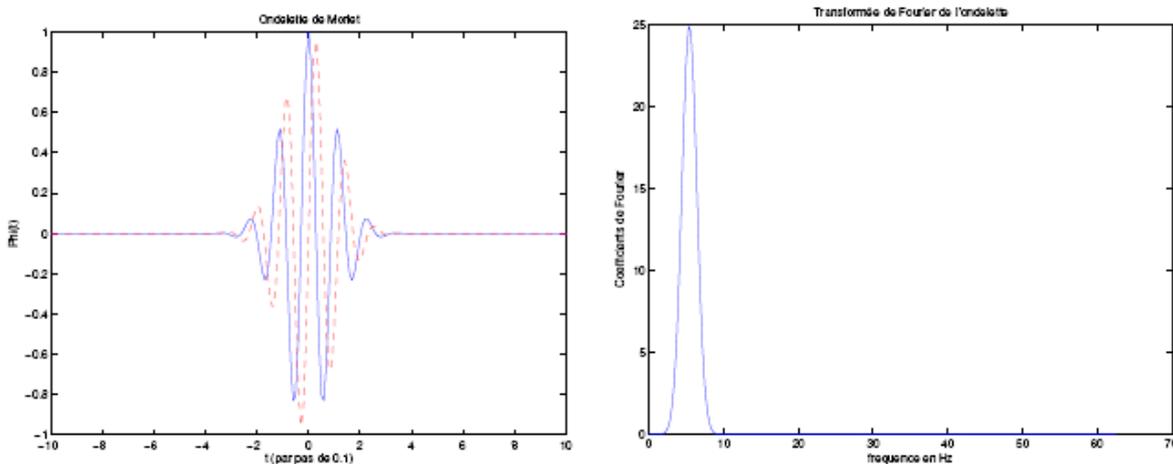


Fig6 : Représentation temporelle et fréquentielle de l'ondelette de Morlet.

Cette ondelette est donc admissible (intégrable) pour de très petites valeurs de DC. De plus cette ondelette mère possède des particularités très intéressantes pour l'analyse temps-fréquence puisqu'elle est très bien localisée en temps (entre -4 et 4s) et en fréquence (un pic autour de 0.8 Hz). Ainsi pour des signaux physiques présentant des variations très rapides, des sauts, des marches, bref des discontinuités ; l'analyse en ondelettes est adaptée car l'ondelette va détecter ces singularités et analyser celles-ci. On peut donc représenter complètement et efficacement un signal quelconque en peu de coefficients. La relation entre le paramètre d'échelle et la fréquence est donnée par :

$$f_x = \frac{f_0 f_e}{s f_w}$$

Avec  $s$  l'échelle,  $f_x$  la fréquence d'analyse,  $f_e$  la fréquence d'échantillonnage du signal et  $f_w$  la fréquence d'échantillonnage de l'ondelette.

**Méthode pratique :**

On trace le logarithme du module des coefficients de la transformée en ondelette de mode  $i$  en fonction de  $s$ , on obtient une courbe dont la pente de la partie la plus linéaire donne le coefficient d'amortissement au facteur fréquence près. Les fréquences étant obtenues en traçant le « scalogramme » (carte temps-fréquence) et en extrayant les maxima locaux.

$$\ln|(w_s x)(a_0, b)| = -\zeta \omega_n b + \ln\left( A_0 |G^*(\pm i a_0 \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2})| \right)$$

Les figures 7 et 8 qui vont suivre montrent comment avec le logiciel MATLAB, on peut obtenir des cartes temps-fréquence résolvant, par un pré-traitement (calcul du *spectrogram par Short Time Fourier Transform*), le calcul des fréquences propres du système étudié, puis quelle est la démarche pour identifier l'amortissement correspondant au mode étudié.

Les mesures ont été réalisées sur un système simulé à 5 DOF dont on connaît exactement les paramètres modaux permettant ainsi de valider l'algorithme mis en place.

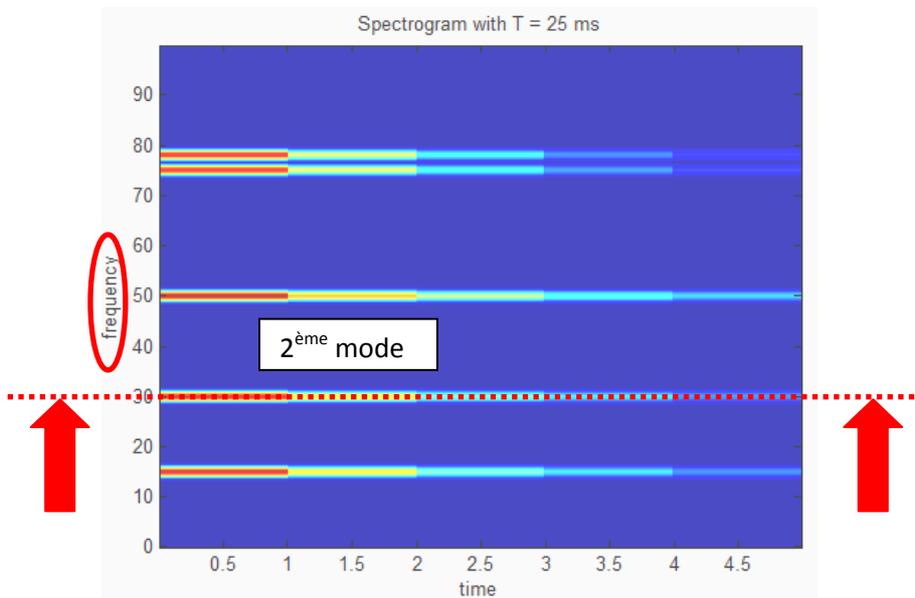


Fig7 : type de carte temps-fréquence : Spectrogram, commande présente sous le même nom dans Matlab et nous permettant de déterminer les fréquences.

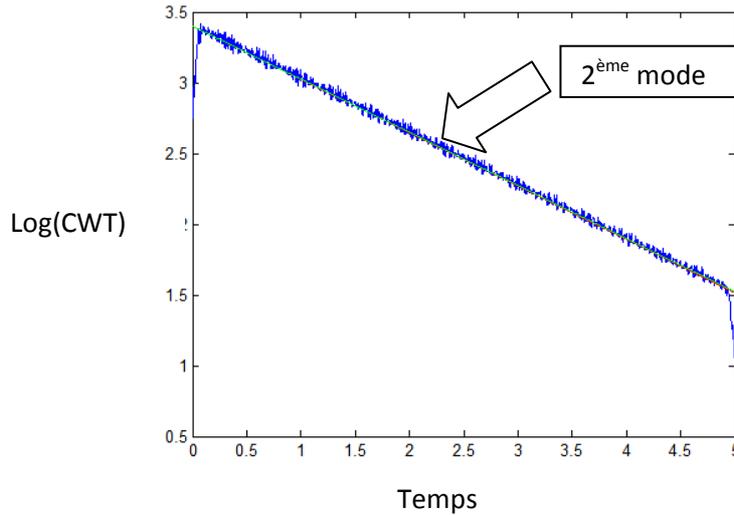


Fig8 : coupe au niveau du 2<sup>ème</sup> mode pour tracer le logarithme du module des coefficients d'ondelettes (c'est une vue de la carte temps-fréquence obtenue avec la commande CWT dans WTMM.m)

On peut donc ainsi mesurer les paramètres modaux du système étudié en cherchant les maxima locaux et en calculant la pente.

### 1.1.3 Méthode LSCE

Elle est introduite comme une extension de la méthode de Prony. La méthode de Prony ou la méthode Exponentielle Complexe (CE) est une méthode indirecte, MDOF et SISO, qui décompose un signal en une somme de sinusoides amorties. Elle travaille sur une IRF, domaine temporel, tandis que la méthode LSCE utilise plusieurs IRF en même temps et donc de type SIMO. Partant du modèle modal de l'IRF dans le temps, la méthode de Prony détermine les coefficients d'un polynôme dont les solutions sont les exponentielles des pôles du système multipliés par  $\Delta t$ . La prise en compte de plusieurs IRF dans la méthode LSCE conduit à l'obtention de ces coefficients au sens de la méthode des moindres carrés. Comme la méthode CE, la difficulté de la méthode LSCE consiste dans l'estimation correcte du nombre de modes. Le principal avantage de cette méthode est qu'elle ne repose pas sur une estimation initiale des caractéristiques modales.

Le point de départ de la méthode est l'expression générale de la réceptance (fonction de transfert liant l'excitation au déplacement de la structure) dans le domaine fréquentiel.

$$\alpha_{jk}(\omega) = \left( \frac{x_j}{f_k} \right) = \sum_{r=1}^N \frac{({}_r A_{jk})}{\omega_r \zeta_r + i(\omega - \omega_r \sqrt{1 - \zeta_r^2})} + \frac{({}_r A_{jk}^*)}{\omega_r \zeta_r + i(\omega - \omega_r \sqrt{1 - \zeta_r^2})}$$

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^{2N} \frac{({}_r A_{jk})}{\omega_r \zeta_r + i(\omega - \omega_r')}$$

$$\omega_r' = \omega_r \sqrt{1 - \zeta_r^2} \quad ; \quad \omega_r + N' = -\omega_r' \quad ; \quad ({}_{r+N} A_{jk}) = {}_r A_{jk}^*$$

En appliquant une transformée de Fourier inverse à  $\alpha(\omega)$ , on obtient la fonction de transfert impulsionnelle correspondant par définition à la réponse du système à une excitation de type Dirac et d'amplitude unitaire.

$$h_{jk}(t) = \sum_{r=1}^{2N} A_{jk} e^{s_r t} \quad \text{avec} \quad s_r = -\omega_r \zeta + i\omega_r'$$

Cette fonction de transfert est connue de manière discrète, la résolution en fréquence étant  $\Delta f = 1/T$ . Un système d'équations est formé à partir de l'écriture de  $h(t)$  aux différents instants  $t_l = l \cdot \Delta t$

$$h_\ell = \sum_{r=1}^{2N} A_r e^{s_r t_\ell} = \sum_{r=1}^{2N} A_r V_r^\ell$$

A condition que le nombre d'instants  $t_l$  (égal au nombre d'équations du système) soit supérieur à  $4N$ , ce système peut être converti en un problème aux valeurs propres qui conduit à la détermination (par la méthode de Prony) des fréquences propres complexes contenues dans les paramètres  $V_r$  et des constantes modales  $A_r$ .

La démarche suivie pour appliquer la méthode LSCE est la suivante :

- Estimation initiale du nombre de degré de liberté  $N$  (ordre du modèle).
- Détermination des paramètres modaux par la méthode décrite précédemment.
- Reconstitution de la fonction de transfert à partir des paramètres obtenus.
- Comparaison des résultats expérimentaux et reconstitués, calcul de l'erreur commise (au sens des moindres carrés).
- Réitération du processus avec un nombre de DOF différent.
- Puis détermination du nombre de modes identifiés à l'aide du diagramme de stabilité.

La figure 9 ci-dessous présente un diagramme de stabilité classique issu de la méthode LSCE. On peut ajouter que la tolérance pour que l'on considère le diagramme stable en fréquence est 1% et en amortissement 5%.

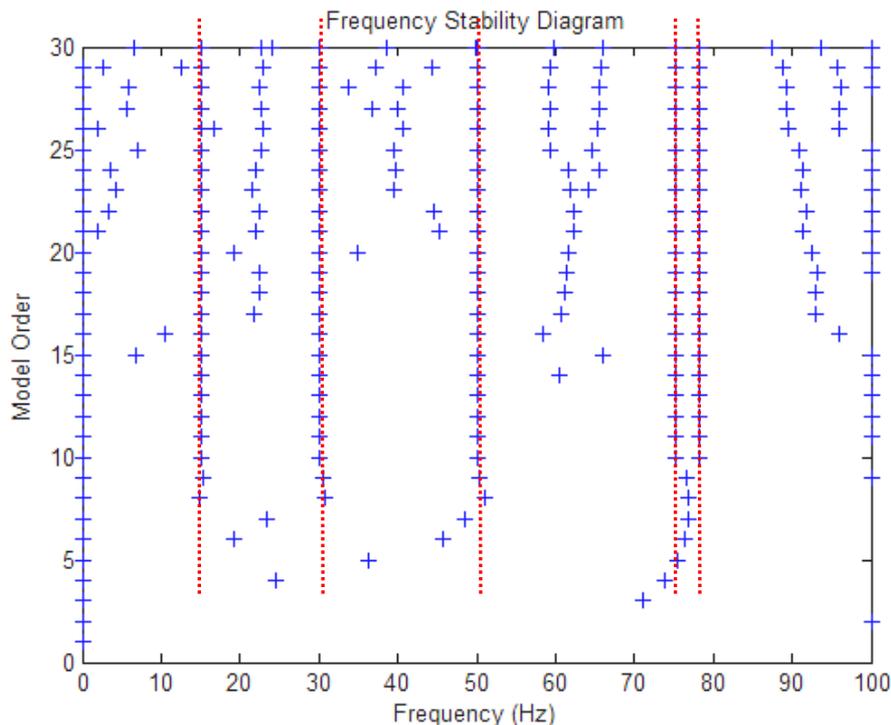


Fig 9. diagramme de stabilité issu de la méthode LSCE

## 1.2 Utilisation des plans d'expérience en ingénierie

Pour pouvoir analyser de manière pertinente l'influence des différents paramètres sur l'erreur lors de l'estimation de l'amortissement par les différentes méthodes, il a fallu utiliser la théorie des plans d'expérience développée entre autres par Jacques GOUPY et Lee CREIGHTON dans [7] et dans [8].

Les plans d'expérience sont utiles lorsque l'on cherche à optimiser un processus en fonction des différents paramètres entrant en jeu dans le résultat. Cela peut être par exemple l'étude de l'influence de la pluie, du soleil et de la nature du sol sur une récolte. Les plans d'expérience permettent également de ne réaliser que les expériences les plus pertinentes pour limiter le temps passer à l'étude.

Dans notre cas, nous ne cherchons pas à optimiser une méthode mais à voir quelle méthode est la moins sensible aux variations du bruit, de l'échantillonnage, de la densité des modes et surtout de l'amortissement.

### 1.2.1 Plans complets

Un plan d'expériences est dit complet lorsque toutes les combinaisons des états des facteurs sont prises en considération dans l'expérience. En fait, on choisit plusieurs facteurs et plusieurs niveaux pour chaque facteur. Il faut ensuite réaliser toutes les expériences correspondant à toutes les combinaisons possibles déterminées par le nombre de facteurs et le nombre de niveaux pris en compte lors de l'étude. Voici un exemple de mise en place d'un plan complet :

- ✓ On s'intéresse à un plan  $2^k$  et à un modèle polynomial du premier degré de la forme:

$$Y = a_0 + a_1 X_1 + \dots + a_k X_k$$

- ✓ On construit la matrice d'expérience correspondant à un plan à 2 facteurs et 2 niveaux :

Exp	X1	X2
1	-1	-1
2	+1	-1
3	-1	+1
4	+1	+1

- ✓ On construit ensuite la matrice des effets correspondante :

$$\begin{pmatrix} +1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \end{pmatrix}$$

- ✓ On calcule ensuite les coefficients du modèle selon la règle suivante : **Chaque estimation d'un coefficient du modèle est égal à la somme algébrique des réponses expérimentales  $y_i$  affectés des signes de la colonne de la matrice X correspondant au facteur  $X_i$  divisé par le nombre d'expériences.**

Ce qui nous donne le résultat suivant :

Exp	Moy	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	Y
1	+1	-1	-1	y <sub>1</sub>
2	+1	+1	-1	y <sub>2</sub>
3	+1	-1	+1	y <sub>3</sub>
4	+1	+1	+1	y <sub>4</sub>
Diviseur	4	4	4	

$$a_0 = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}$$

$$a_1 = \frac{-y_1 + y_2 - y_3 + y_4}{4}$$

$$a_2 = \frac{-y_1 - y_2 + y_3 + y_4}{4}$$

On obtient ainsi les coefficients du modèle avec  $a_1$  et  $a_2$  les effets moyens des facteurs X1 et X2. Le coefficient  $a_0$  est la réponse théorique au centre du domaine de variation des facteurs (tous les facteurs sont alors à 0).

Suivant les valeurs de coefficients du modèle, on peut en déduire quels sont les facteurs les plus influents sur la valeur de la réponse.

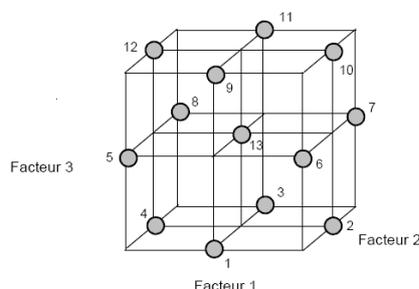
### 1.2.2 Plans de Box-Behnken

Cependant, lorsque le nombre de facteurs et de niveaux augmentent, les plans complets d'expérience sont de plus en plus difficiles à mettre en place du fait du nombre d'expériences à réaliser pour pouvoir déterminer les coefficients du modèle. C'est pourquoi il a été créé des plans d'expériences « partiels » permettant d'obtenir des modèles de bonne qualité sans réaliser toutes les expériences.

Box et Behnken ont proposé en 1960 ces plans qui permettent d'établir directement des modèles du second degré. Tous les facteurs ont trois niveaux :

-1, 0 et +1. Le plan de Box-Behnken pour trois facteurs est construit sur un cube. On place les points expérimentaux non pas aux sommets du cube mais au milieu des arêtes. Cette disposition a pour conséquence de répartir tous les points expérimentaux à égale distance du centre du domaine d'étude. On ajoute ensuite des points au centre du domaine d'étude.

Le plan de Box-Behnken pour trois facteurs est illustré par la figure ci-dessous. Le cube possède 12 arêtes. On a l'habitude d'ajouter des points d'expériences au centre du domaine d'étude, en général trois. Le plan de Box-Behnken pour 3 facteurs possède donc 12 expériences soit 15 essais au lieu des 27 prévues pour un plan complet.



*Fig7. Illustration du plan de Box-Behnken pour 3 facteurs*

La matrice expérimentale pour un plan de Box-Behnken avec un essai au centre est la suivante, pour obtenir plusieurs essais au centre il suffit de répéter la mesure :

n° essai	Facteur 1	Facteur 2	Facteur 3
1	0	-1	-1
2	+1	0	-1
3	0	+1	-1
4	-1	0	-1
5	-1	-1	0
6	+1	-1	0
7	+1	+1	0
8	-1	+1	0
9	0	-1	+1
10	+1	0	+1
11	0	+1	+1
12	-1	0	+1
13	0	0	0

*Fig8. Plan de Box-Behnken pour 3 facteurs*

Il existe beaucoup d'autres types de plans d'expériences mais chaque plan présenté a été utilisé lors de l'étude que nous avons réalisée.

Nous pouvons également ajouter que la plupart des modèles sont d'ordre 1 ou 2 et font parfois intervenir également l'influence de l'interaction entre les différents facteurs. En effet il existe également une indétermination sur l'erreur en amortissement dû à l'interaction entre les facteurs bruit et amortissement qui peut ne pas être négligeable. Pour obtenir la colonne dans la matrice d'expérience correspondant à cette interaction, il suffit de multiplier terme à terme les deux colonnes des facteurs seuls. Nous obtenons un vecteur-colonne fait de -1, 0 et 1. Pour calculer son coefficient, le raisonnement est le même que pour le calcul des autres coefficients.

## 2. Développements

### 2.1 Démarche

Le but de cette étude est de comparer la performance et la robustesse des trois méthodes d'identification précédemment citées par une validation numérique supervisée. On va tester leur robustesse dans la détermination de l'amortissement qui est le paramètre modal le plus difficilement identifiable.

Nous avons choisi comme outil de travail le logiciel de calcul scientifique MATLAB pour réaliser nos études. Pour une meilleure utilisation, notre principale contrainte a été de réaliser un programme entièrement supervisé pour la validation numérique.

Le principe est assez simple. Nous générons un signal (FRF et IRF) connu en fréquence et en amortissement (3 niveaux d'amortissement). Suivant la méthode d'identification choisie, le programme affiche les résultats et l'erreur en fréquence et en amortissement par rapport au signal initial généré.

Dans la première étude, on peut étudier l'influence des trois premiers paramètres :

- La période d'échantillonnage en fréquence : *f<sub>ech</sub>*
- Le bruit : *Br*
- L'amortissement : *Am*
- La densité des modes : *low, normal, high*

Ces paramètres sont réglables manuellement. Ceci nous permet de voir précisément comment évolue l'erreur lors de l'identification. Le premier facteur est évidemment très important car c'est lui qui participe à la précision de la description de la FRF. Si cette résolution est trop grande, on peut louper certains pics ou ne pas identifier les maxima locaux réels. En ce qui concerne le bruit, il joue également un grand rôle sur la forme réelle de la FRF et est généralement dû à la prise de mesure en elle-même. Les maxima peuvent ainsi être déplacés ou faussés. En revanche le choix de l'amortissement va de soi car il est établi que les méthodes identifient plus ou moins bien ce paramètre suivant sa valeur. En effet, les forts taux d'amortissement sont plus difficiles à identifier. Pour finir, la densité des modes rend plus difficile l'identification et sera donc ajoutée aux autres facteurs dans l'étude 2. Le tableau suivant présente les différents niveaux étudiés pour chaque facteur :

Niveau	Faible	Moyen	Fort
Bruit SNR	80dB	40dB	20dB
Résolution fréquentielle	0.2Hz	0.5Hz	1Hz
Amortissement	0.1%	0.7%	4%
Densité	3 modes/35Hz	3 modes/15Hz	3 modes/7Hz

Tableau 1: Paramètres de l'étude

Pour l'analyse statistique de l'influence de ces paramètres, on lance une boucle qui génère toutes les expériences nécessaires au plan d'expérience. Il s'affiche ensuite une figure représentant la convergence des coefficients du modèle issus des plans d'expériences et un histogramme des valeurs des coefficients pour pouvoir identifier de manière rapide quels facteurs sont les plus influents.

# Rapport Master 2 Recherche DSA

Nous avons mis en œuvre les différentes méthodes d'après les travaux précédemment cités. De plus, j'ai réalisé une interface graphique à l'aide du GUI de MATLAB rendant l'utilisation du programme très simple. Il a fallu se familiariser avec cette technique mais son utilisation rend la création du programme et de l'interface plus rapide. La figure ci-dessous présente l'interface permettant de lancer l'étude de sensibilité et la simulation et l'analyse supervisée des FRF.

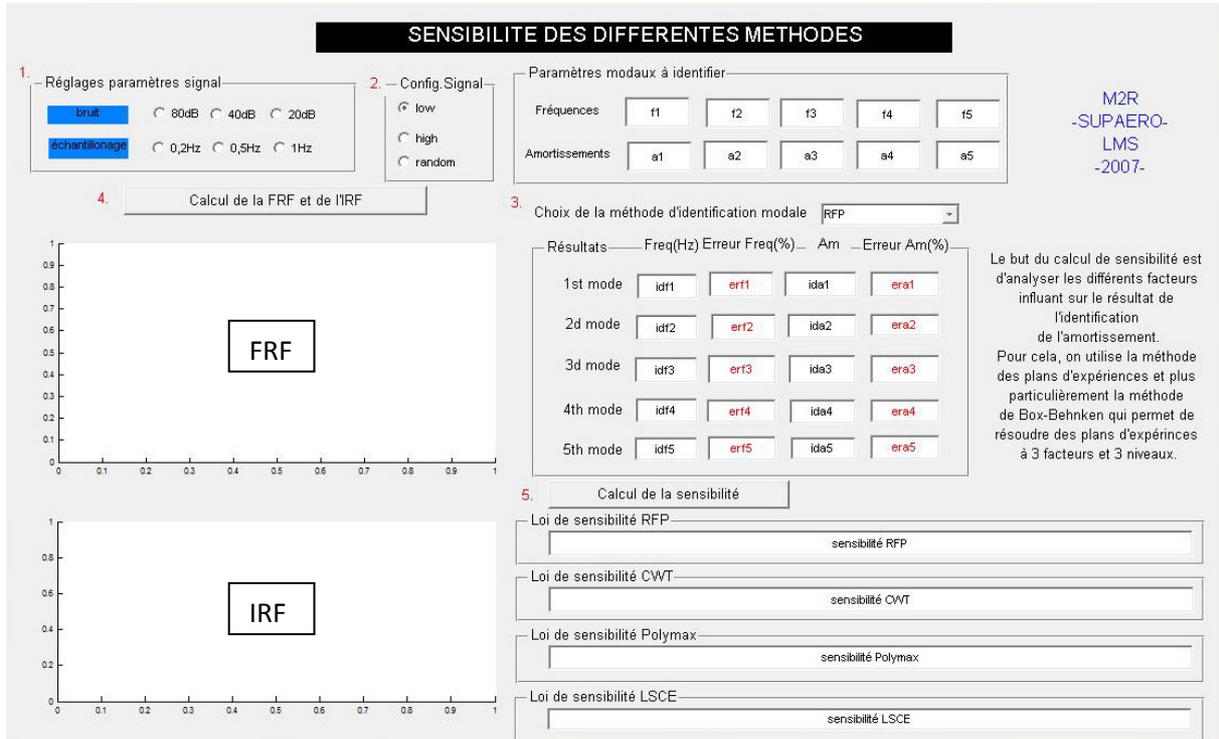


Fig10 : Interface de l'étude 1

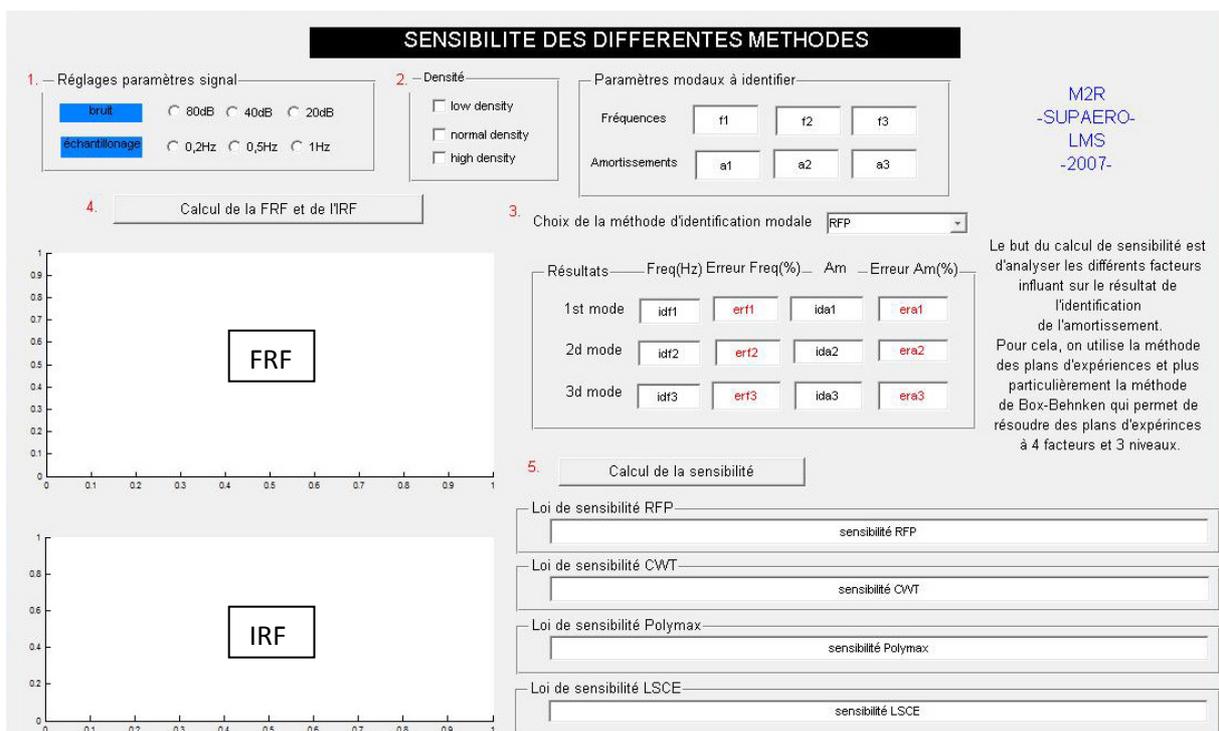


Fig11 : Interface de l'étude 2

Leur utilisation est donc simplifiée au maximum limitant ainsi la participation de l'utilisateur au simple réglage des paramètres : bruit, résolution fréquentielle, densité et méthode d'identification à tester. On obtient, après un certain temps de calcul, l'erreur en fréquence et en amortissement ainsi que le modèle issu du plan d'expérience.

## 2.2 Utilisation de l'interface

Ce schéma explique la manière d'utiliser l'interface de l'étude 1 :

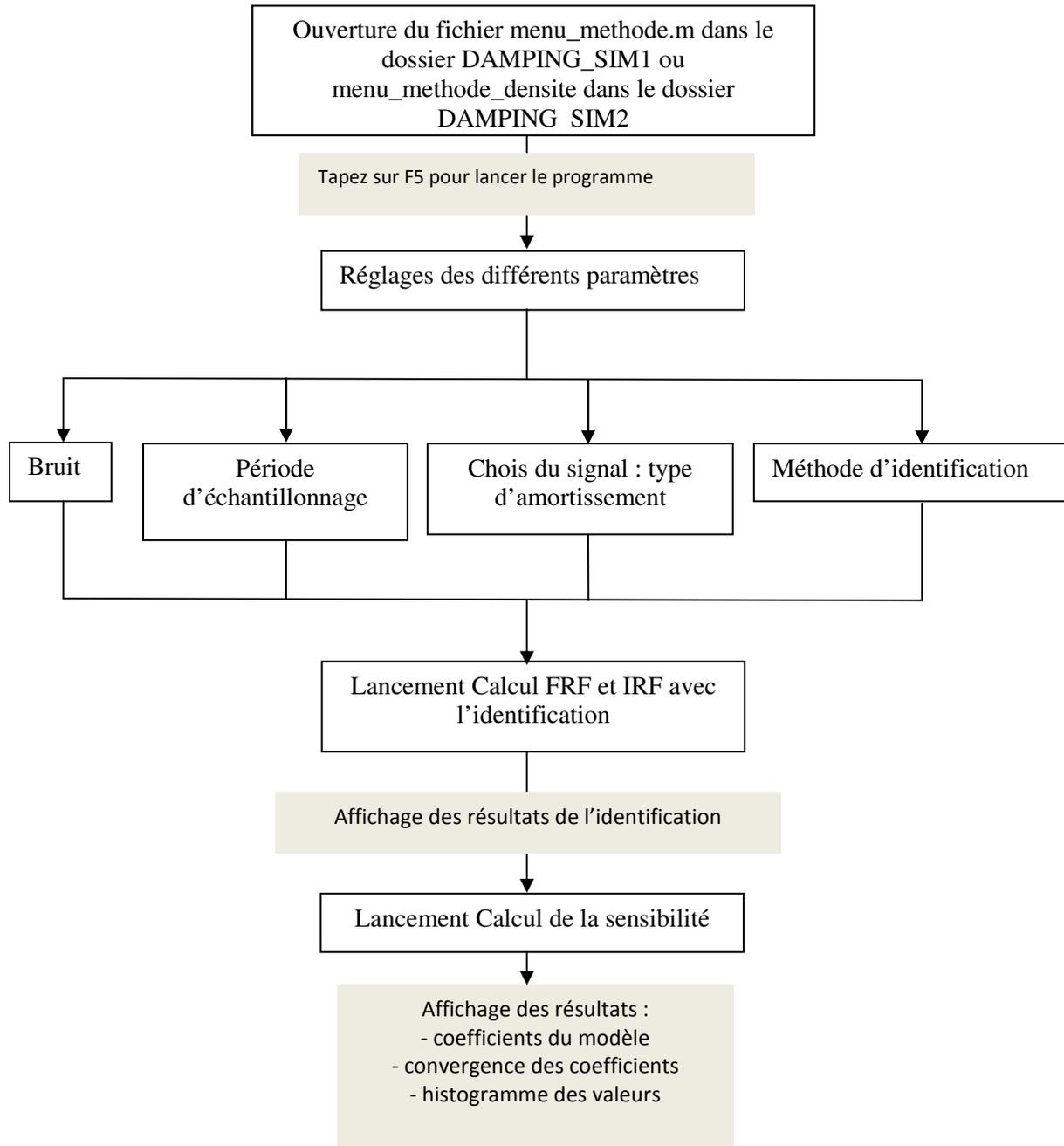


Fig12.Schéma expliquant l'utilisation de l'interface de l'étude 1

En ce qui concerne l'étude 2, la méthode est la même avec la possibilité supplémentaire de régler la densité des modes.

### 2.3 Construction du Code MATLAB

Cette partie explique comment j'ai construit les différents algorithmes d'obtention des fréquences et des amortissements pour les différentes méthodes et comment j'ai construit mon algorithme permettant de réaliser de manière automatique mes plans d'expérience.

#### *2.3.1 Critères d'obtention des fréquences et des amortissements pour les 3 méthodes :*

##### 2.3.1.1 Méthode RFP :

Le programme de la méthode RFP donne les fréquences et amortissements des modes identifiés par le calcul des pôles et des résidus de la fonction de transfert. Le paramètre principal que l'on règle lors de l'identification est le nombre de degré de liberté à prendre en compte pendant le calcul. Classiquement, pour une bonne détermination des paramètres modaux, il faut avoir un nombre de degré à identifier au moins égal à deux fois le nombre de degré de liberté du système étudié. Ceci vient du fait que la méthode RFP identifie parfois des valeurs qui n'ont pas de sens physique à cause de la qualité du signal et aussi identifie les valeurs des pôles complexes conjugués.

Le premier vecteur des fréquences nécessite un tri qui se fait en supprimant les valeurs en double (pôles conjugués) et les valeurs uniques n'ayant aucun sens physique. On pourrait aussi utiliser le facteur de participation permettant de déterminer les modes principaux grâce à leur niveau d'énergie. Ensuite, on observe notre signal pour connaître de manière très approchée la position de nos fréquences de résonance pour pouvoir identifier quelles sont les fréquences et amortissements identifiés par la méthode RFP. Les amortissements s'obtiennent facilement en récupérant l'indice de ligne de la fréquence correspondante dans la matrice des valeurs identifiées.

- ✓ Programmes : rfp\_analysis\_cm\_tr.m et extract\_freq/am\_rfp.m

##### 2.3.1.2 Méthode CWT :

La détermination des paramètres modaux par la méthode des ondelettes repose sur deux étapes : la construction de la carte-temps fréquence obtenue par la transformée en ondelettes et par le tracé du log du module de l'amplitude.

La carte temps-fréquence nous sert à déterminer les fréquences identifiées en localisant les maxima locaux de la première colonne de cette matrice.

- ✓ Programme : local\_max.m

Comme il est expliqué précédemment, la détermination de l'amortissement se fait en faisant une « coupe » de cette carte temps-fréquence au niveau du mode considéré et en calculant la pente de la partie linéaire. Cette pente est au facteur fréquence près l'amortissement du mode.

- ✓ Programme : identification\_amortissement\_cwt.m

##### 2.3.1.3 Méthode LSCE :

En ce qui concerne la méthode LSCE, le travail consiste à obtenir le diagramme de stabilité (Fig9). Comme précédemment, les points du diagramme de stabilité sont des coefficients d'une matrice générée par la méthode LSCE. Le principal problème réside dans l'extraction des fréquences les plus stables représentées par les pointillés rouge sur la figure 4.

Il s'agit donc de savoir si en partant des ordres supérieurs du modèle puis en diminuant l'ordre, la fréquence est toujours identifiée.

Pour cela, le programme crée compare chaque ligne du diagramme à la ligne du modèle d'ordre maximum qui est celui qui donne les meilleurs résultats en fréquence. Si la fréquence est toujours présente (à une variance près arbitraire) à l'ordre inférieur, on la garde sinon on supprime. Nous filtrons ensuite cette matrice en extrayant l'indice des 5 premières colonnes où le nombre de fréquences identiques identifiées est le plus important. Pour le calcul de l'amortissement, on récupère la valeur de la matrice initiale et on applique la formule :

$$f_r = \frac{|P_r|}{2\pi}$$

$$\zeta_r = -\frac{\text{Real}(P_r)}{|P_r|}$$

- ✓ Programmes : lsce.m et decalage\_matrice.m

### 2.3.2 Codes pour les plans d'expériences :

Comme tout est réalisé de manière supervisée, le calcul de la sensibilité des méthodes par les plans d'expériences nécessite de générer les résultats pour chaque expérience souhaitée. Je vais présenter le raisonnement pour le plan complet, l'approche étant identique pour le plan de box-behnken mais avec des expériences en moins.

Le programme principal *menu\_methode\_densité.m* a été construit de telle manière à ce que l'on puisse facilement générer tous les résultats à l'aide de boucles *for*. La matrice d'un plan complet pour 4 facteurs à 3 niveaux nécessite 81 expériences faite de -1, 0 et 1 et stockée dans un tableur Excel *mat\_doe.xls* que l'on importe lors du calcul des coefficients. Les boucles successives génèrent une matrice à 1 colonne et 81 lignes correspondant à l'ordre des expériences déterminées par la matrice d'expérience du plan complet. Voici l'architecture du code :

```

k=1;
h = waitbar(0,'Please wait...');
for t=1:100
    k=1;
    waitbar(t/100,h)
    for FREQ=1:3
        for BRUIT=1:3
            for DENS=1:3
                [x_dft,x_ifft,f,E1,E2,E3,dt]=signal_random_sens(FREQ,BRUIT,DENS);
                rfp_analysis_cm_tr;
                [am_exp11,am_exp12,am_exp13]=extract_am_rfp(Damp_ratio_rfp,E1,E2,E3);%E4,E5);
                Erreur(k,t)=(abs(E1-am_exp11)/E1)*100;
                Erreur(k+1,t)=(abs(E2-am_exp12)/E2)*100;
                Erreur(k+2,t)=(abs(E3-am_exp13)/E3)*100;
                k=k+3;
            end
        end
    end
end
close(h)
MOY=[10 20 30 40 50 60 70 80 90 100];
for j=1:10
    vecteur=mean(Erreur(:,1:MOY(j)),2);

```

```
%matrice modèle d'un plan factoriel complet
MAT_FC=xlswread('mat_doe');
ELIAS=MAT_FC*vecteur;
CENTRE=mean(vecteur,1);
SOL_RFP=[CENTRE;ELIAS];
for m=1:16
    SOLUTION_RFP(j,m)=SOL_RFP(m,1);
end
end
SOLUTION_RFP;
```

Import de la matrice d'expériences

De plus, la totalité des expériences est réalisée jusqu'à 100 fois (1 heure de traitement environ) pour étudier la convergence des coefficients du modèle. Il s'affiche ensuite deux figures représentant les courbes de convergence de chaque coefficient et l'histogramme des valeurs stabilisées des coefficients. L'approche est la même pour toutes les méthodes étudiées.

De plus, j'ai ajouté une barre permettant de voir l'avancement des calculs grâce à la commande « *waitbar* ».

```
> Programmes : erreur_am_rfp/lscce/wavelets.m
```

### 2.3.3 Signal simulé :

Le signal simulé de l'étude 2 a été construit de manière à avoir 3 pics de résonance, à 3 fréquences variables (réglage de la densité des modes), avec des taux d'amortissement plus ou moins importants sur lequel on peut changer la période d'échantillonnage et sur lequel on peut ajouter du bruit. Voici l'architecture du code :

```
global fech Br
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%---- Signal Parameters ----%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
if fech==1
    df=0.2;
elseif fech==2
    df=0.5;
else df=1;
end;
% Frequency Resolution paramètre variable (choix utilisateur)
tt = 1/df; % Total time
L = tt*200;% 2048 % Sampling Frequency Number
t = linspace(0,tt,L);
dt = t(3) - t(2);
N = L/2;
f = linspace(0,df*(N-1),N);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%----- Simulated Analytical Data Generation -----%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% First Mode
A1 = 20;
E1 = 0.04;
fn1 = 15.014188;
wn1 = fn1*2*pi;
```

Réglage de la période d'échantillonnage

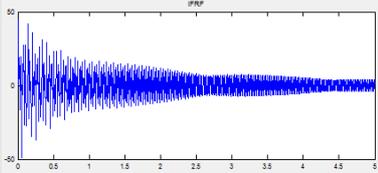
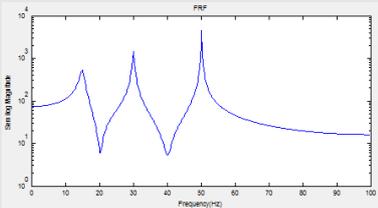
Définition du 1<sup>er</sup> mode

```

a1 = E1*wn1;
wd1 = wn1*sqrt(1 - E1^2);
% Second Mode ....
.....(3 modes construits de la même façon)
E=[E1;E2;E3];
Fn=[fn1;fn2;fn3];
x=(A1*exp(-a1*t).*sin(wd1*t)+A2*exp(-a2*t).*sin(wd2*t)+A3*exp(-a3*t).*sin(wd3*t));
%#####
%-----Adding Noise (choix du paramètre)-----%
%#####
if Br == 1
    snr = 80;
elseif Br == 2
    snr = 40;
else snr = 20;
end;
var_s=cov(x);
var_noise = var_s/(10^(snr/10));
n=sqrt(var_noise)*randn(length(x),1);
x=x+n';
% Calculating the Frequency Response Function (FRF)
x_dft = fft(x);
% Calculating the Impulse Response Function (IRF)
x_ifft = ifft(x_dft);
    
```

Définition du signal temporel

Réglage de l'ajout de bruit sur le signal



La variation de la densité des modes se fait sur le programme principal en chargeant des signaux différents au niveau de la position des pics en fréquence, mais tous les signaux sont construits de la même manière.

On sait donc que l'identification est fonction du bruit (Br), de la résolution fréquentielle (F), de l'amortissement (Am) et de la densité. Ce que l'on veut à présent faire, dans un domaine restreint, c'est quantifier la sensibilité des méthodes aux différents paramètres. La figure ci-dessous illustre le problème :

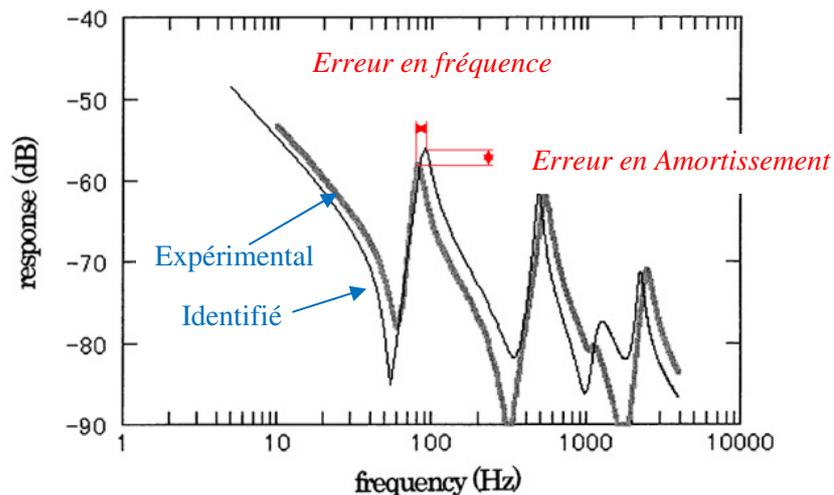


Fig13 : Illustration de la démarche de calcul de sensibilité (Expérience en gras, identification en traits fins)

### 3. Résultats

L'interface graphique de chaque étude permet évidemment de régler les paramètres influents sur l'identification mais affiche également les différents résultats obtenus. Il s'affiche donc :

1. La FRF et l'IRF dans les fenêtres graphiques

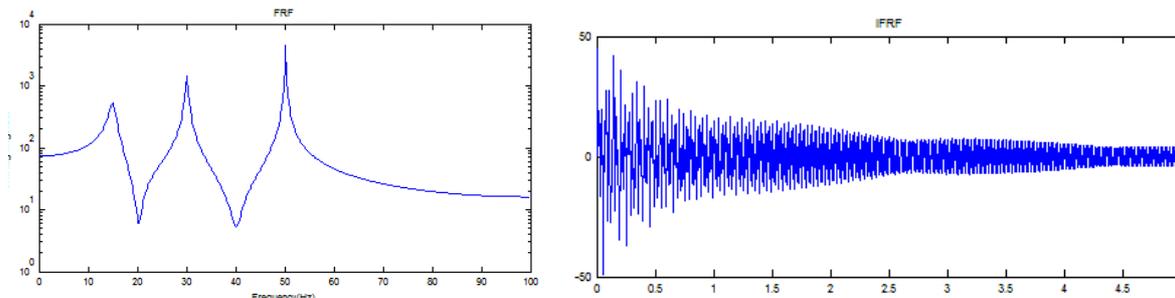


Fig14 : FRF et IRF du signal simulé

2. Le résultat du calcul des fréquences et des amortissements ainsi que l'erreur

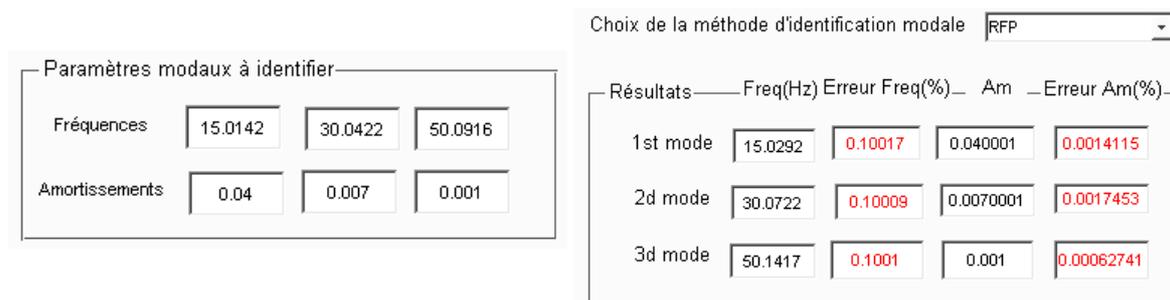


Fig15 : Tableau des valeurs obtenues lors de l'identification

3. Le modèle de sensibilité calculé



Fig16 : Affichage de l'équation du modèle

Grâce à toutes ces informations, on peut se rendre compte assez précisément et empiriquement de l'influence des différents facteurs sur l'identification. On peut voir comment évolue l'erreur des différents modes quand on change un seul ou plusieurs paramètres et comparer ces résultats entre les différentes méthodes.

Il serait donc trop long de prendre les résultats un par un pour chaque méthode et de les analyser. L'analyse pertinente est celle qui sera faite sur les valeurs des coefficients et sur la convergence de ceux-ci.

Ci-dessous, on présente les résultats des coefficients obtenus pour chaque méthode d'identification et pour chaque étude. Les interprétations et les conclusions seront faites à partir de ces résultats dans le chapitre « Analyse des résultats ».

## 3.1 Résultats de l'étude 1

### 3.1.0 Préambule :

La suite de ce chapitre va présenter les résultats obtenus à l'aide du programme développé sous Matlab. La première figure qui sera obtenue démontre la convergence des coefficients des modèles issus de l'étude de sensibilité. L'historique, quant à lui, compare la valeur des différents coefficients pour pouvoir en déduire celui qui a le plus d'influence sur l'erreur lors de l'identification de l'amortissement. On pourra également, suite à ce calcul, obtenir la loi de sensibilité qui sera successivement notée P\_RFP, P\_CWT et P\_LSCE. Ces modèles sont ajustés sur l'erreur des algorithmes sur l'estimation de l'amortissement. L'étude porte sur l'amortissement car en règle générale, l'erreur en fréquence est faible.

### 3.1.1 Méthode RFP :

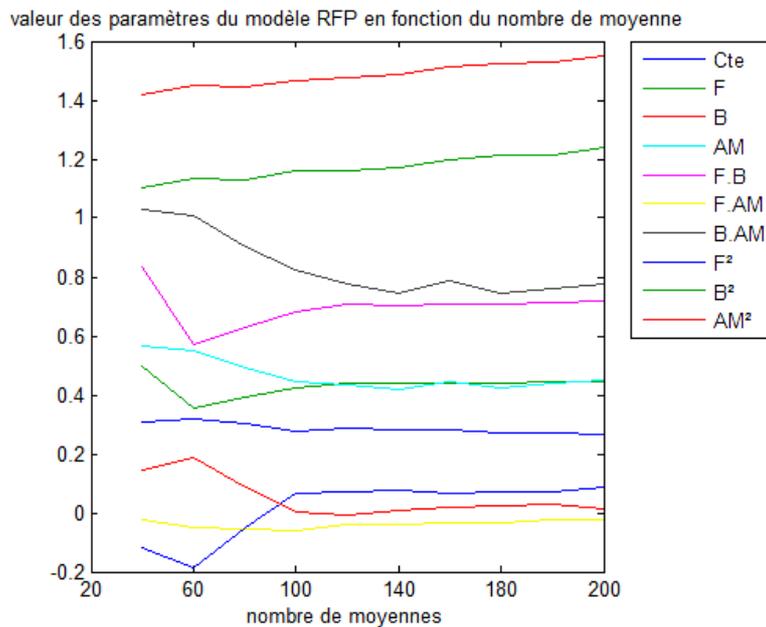


Fig17 : Courbes de convergence des coefficients du modèle RFP

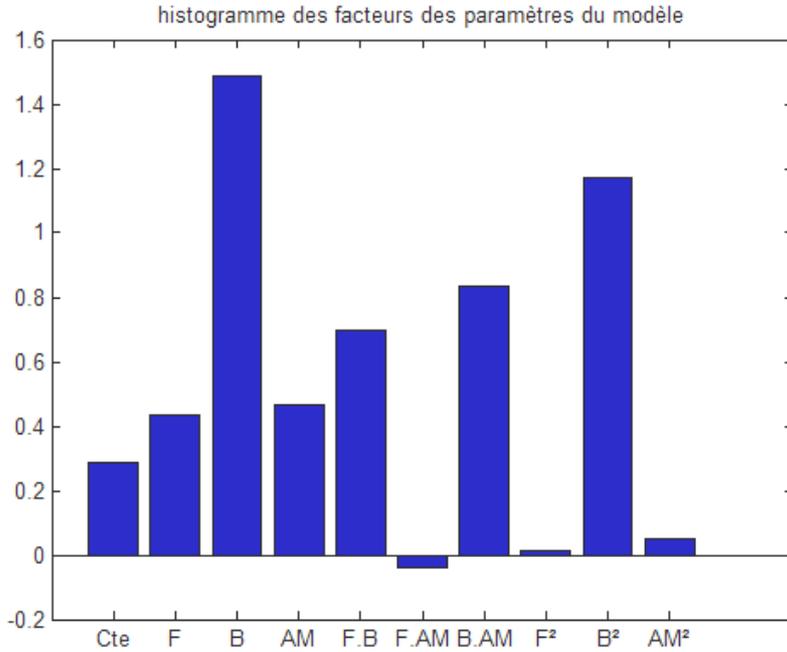


Fig18 : Histogramme des valeurs des coefficients du modèle RFP

Après calcul de la sensibilité pour la méthode RFP, on obtient le modèle suivant :

$$P_{RFP} = + 0.3 + 0.4F + 1.5B + 0.5AM + 0.7F.B - 0F.AM + 0.8B.AM + 0F^2 + 1.2B^2 + 0AM^2$$

### 3.1.2 Méthode CWT :

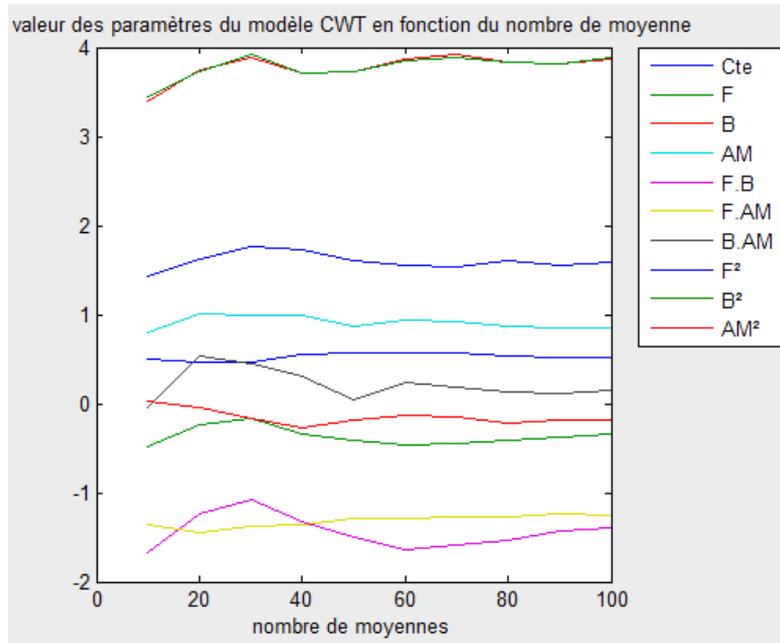


Fig19: Courbes de convergence des coefficients du modèle CWT

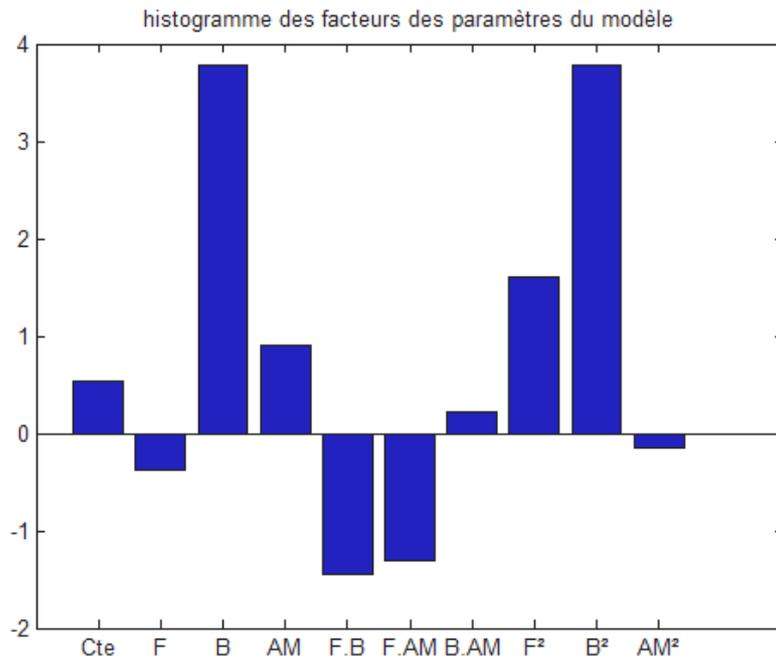


Fig20 : Histogramme des valeurs des coefficients du modèle CWT

Après calcul de la sensibilité pour la méthode CWT, on obtient le modèle suivant :

$$P\_CWT = + 0.5 - 0.4F + 3.8B + 0.9AM - 1.4F.B - 1.3F.AM + 0.2B.AM + 1.6F^2 + 3.8B^2 - 0.2AM^2$$

### 3.1.3 Méthode LSCE :

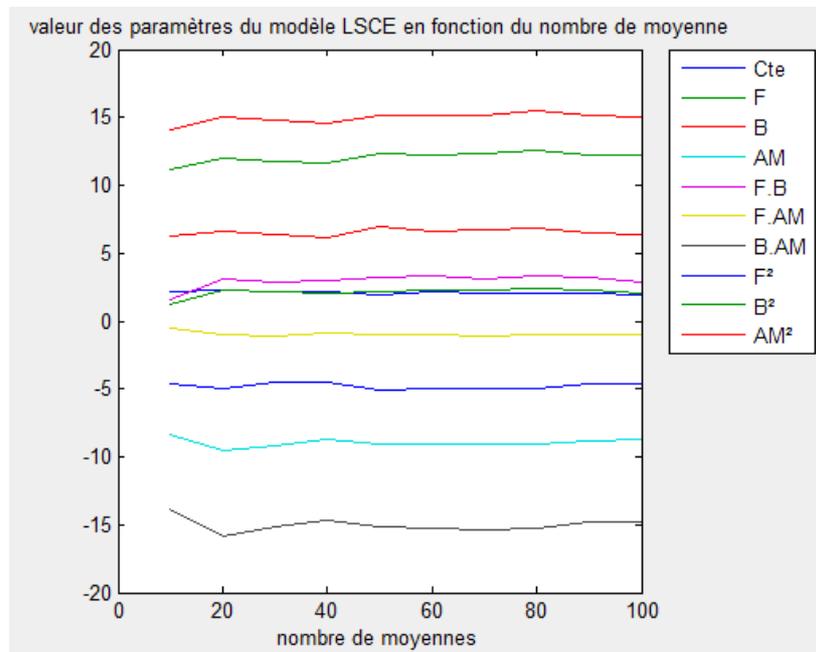


Fig21 : Courbes de convergence des coefficients du modèle LSCE

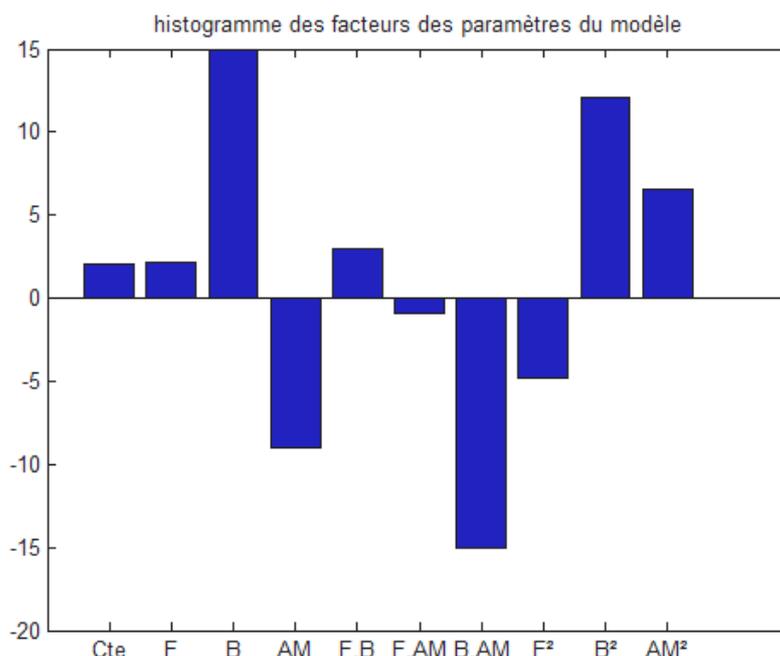


Fig22 : Histogramme des valeurs des coefficients du modèle LSCE

Après calcul de la sensibilité pour la méthode LSCE, on obtient le modèle suivant :

$$P_{LSCE} = + 2.1 + 2.1F + 15B - 9AM + 3F.B - 0.9F.AM - 15B.AM - 4.8F^2 + 12.1B^2 + 6.5AM^2$$

### 3.1.4 Condensé des résultats des coefficients des modèles :

Il est important de connaître comment réagissent les différentes méthodes par rapport aux variations des facteurs étudiés. Mais, le but final de l'étude est de déterminer la méthode la plus robuste de celles étudiées.

Le tableau 2 ci-dessous regroupe la valeur des coefficients des modèles précédemment obtenus :

	RFP	CWT	LSCE
Cte	0,3	0,5	2,1
F	0,4	-0,4	2,1
B	1,5	3,8	15
AM	0,5	0,9	-9
F.B	0,7	-1,4	3
F.AM	0	-1,3	-0,9
B.AM	0,8	0,2	-15
F²	0	1,6	-4,8
B²	1,2	3,8	12,1
AM²	0	-0,2	6,5

Tableau 2 : Tableau de comparaison des valeurs des coefficients des modèles

L'histogramme permet facilement de distinguer les paramètres très influents en fonction des méthodes étudiées.

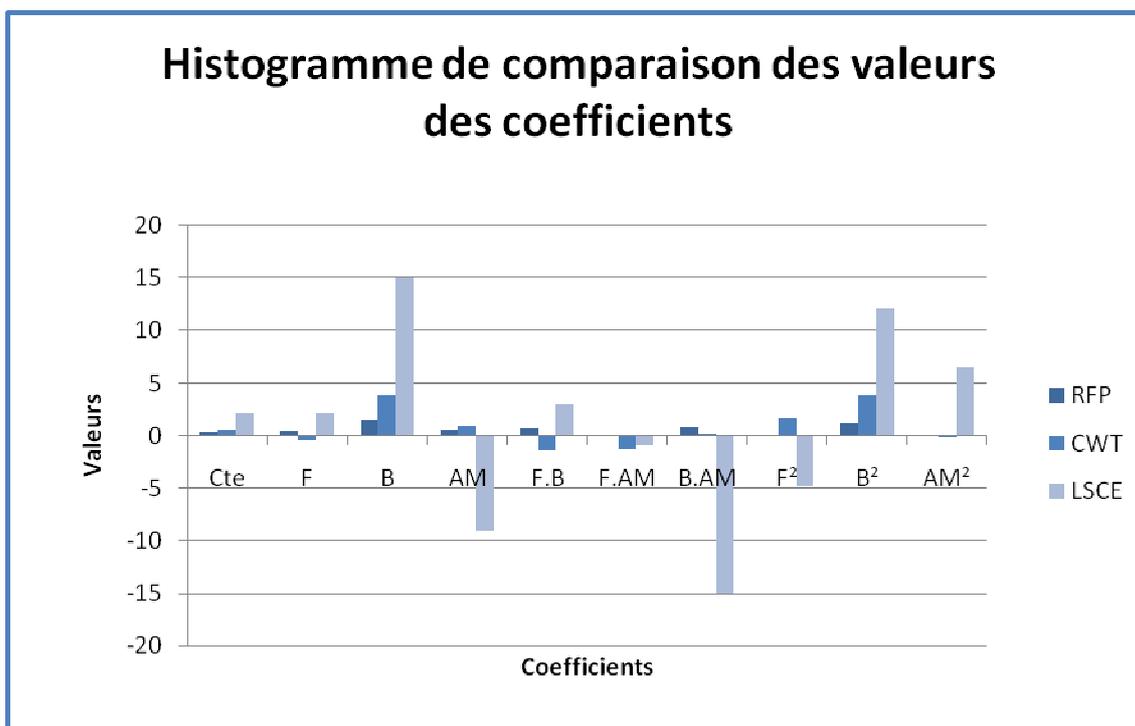


Fig23 : Histogramme de comparaison des valeurs des coefficients des modèles

L'analyse de ces histogrammes sera faite ultérieurement dans la partie « interprétation des résultats » du fait de coefficients d'échelles différentes.

## 3.2 Résultats de l'étude 2

### 3.2.1 Méthode RFP :

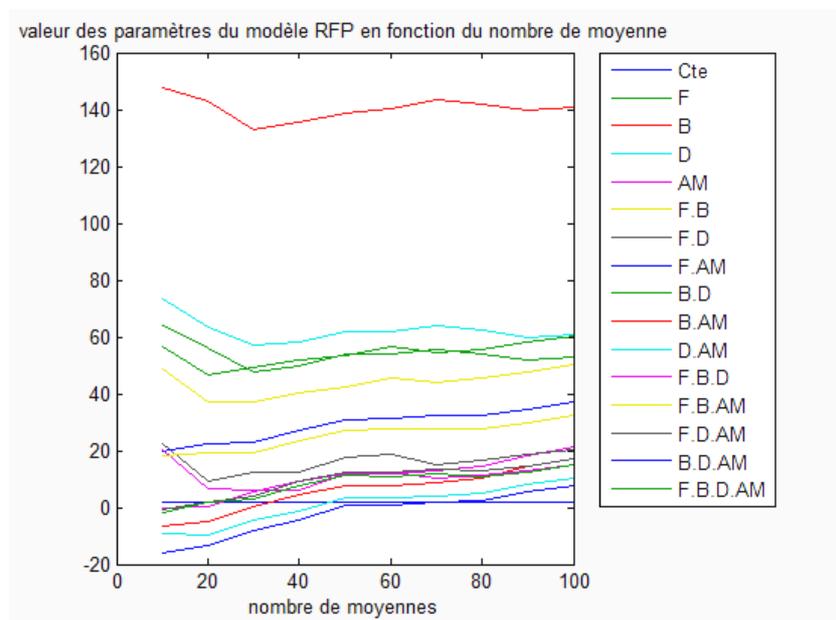


Fig24 : Courbes de convergence des coefficients du modèle RFP

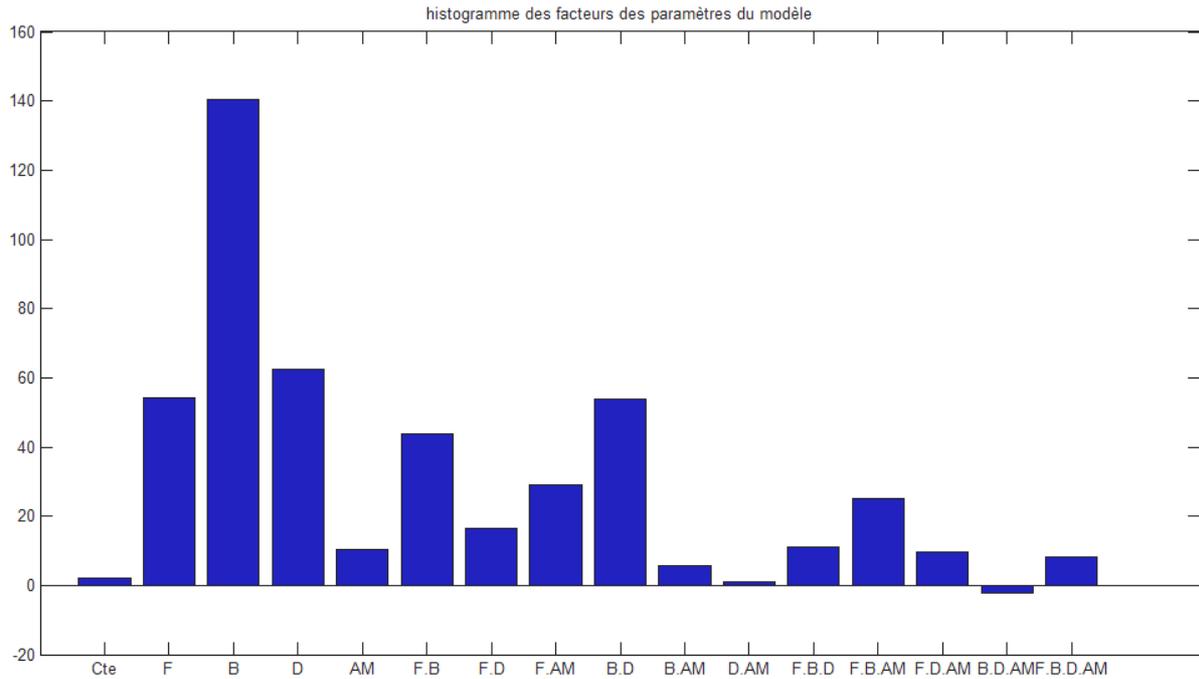


Fig25 : Histogramme des valeurs des coefficients du modèle RFP

Après calcul de la sensibilité pour la méthode RFP, on obtient le modèle suivant :

$$P_{RFP} = + 2 + 54.3F + 140.4B + 62.3D + 10.5AM + 43.8F.B + 16.4F.D + 29F.AM + 53.9B.D + 5.8B.AM + 1D.AM + 11.3F.B.D + 25.2F.B.AM + 9.7F.D.AM - 2.3B.D.AM + 8.3F.B.D.AM$$

### 3.2.2 Méthode CWT :

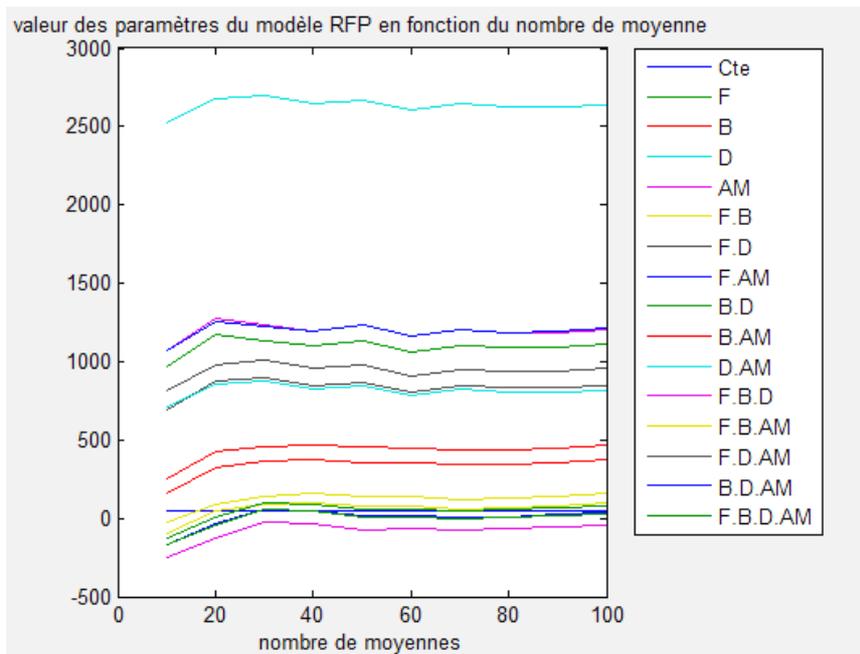


Fig26 : Courbes de convergence des coefficients du modèle CWT

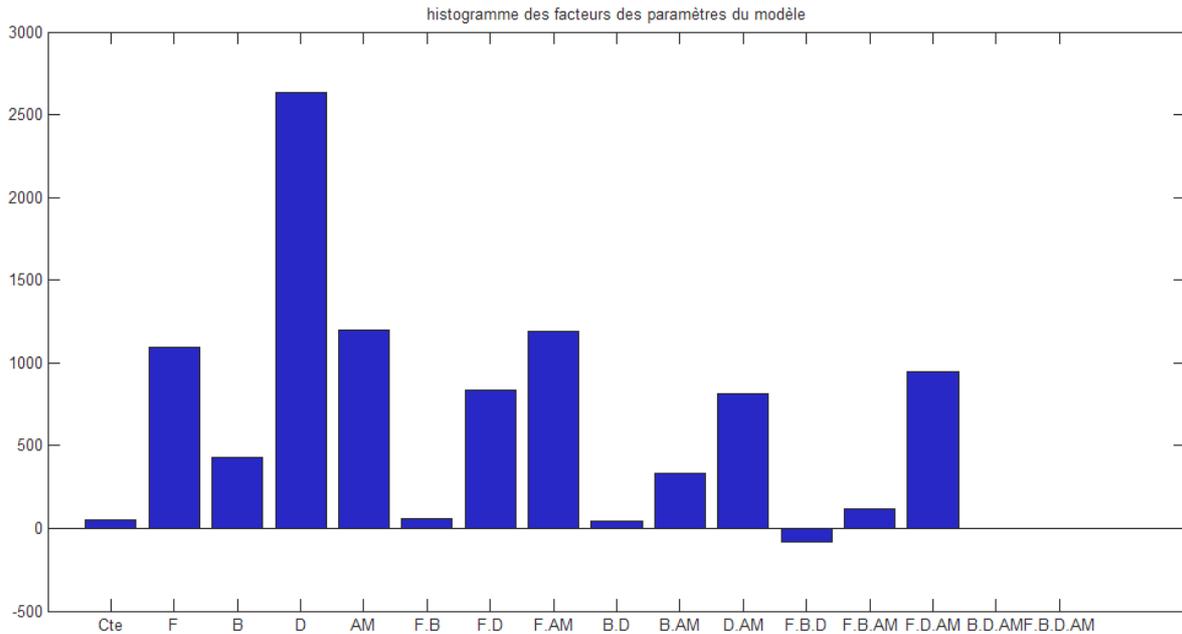


Fig27 : Histogramme des valeurs des coefficients du modèle CWT

Après calcul de la sensibilité pour la méthode CWT, on obtient le modèle suivant :

$$P\_CWT = + 50.9 + 1097F + 430.1B + 2634.9D + 1194.5AM + 58.7F.B + 834.9F.D + 1193.2F.AM + 44.4B.D + 335B.AM + 813.4D.AM - 79.4F.B.D + 120.3F.B.AM + 943F.D.AM + 1.3B.D.AM - 3.5F.B.D.AM$$

### 3.2.3 Méthode LSCE:

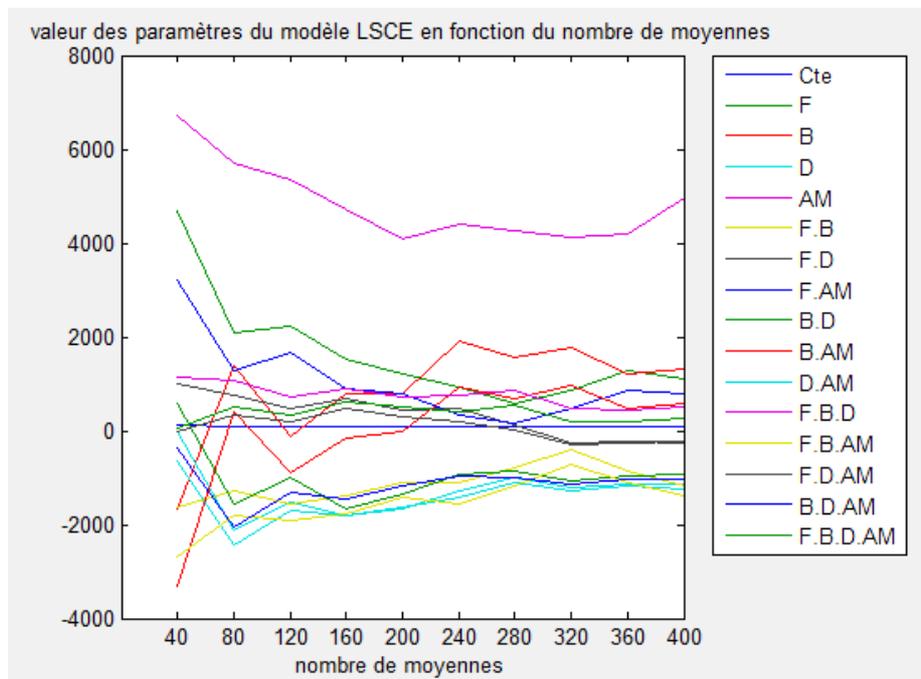


Fig28 : Courbes de convergence des coefficients du modèle LSCE

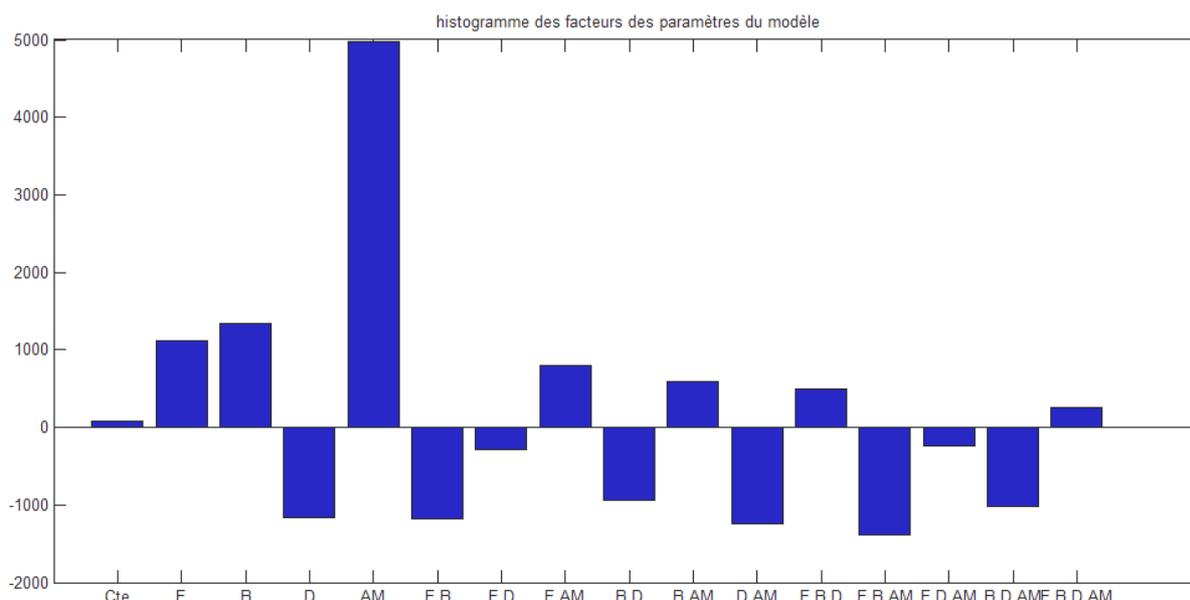


Fig29 : Histogramme des valeurs des coefficients du modèle CWT

Après calcul de la sensibilité pour la méthode LSCE, on obtient le modèle suivant :

$$P_{LSCE} = + 84,5 + 1112,2F + 1333,1B - 1155,7D + 4970,3AM - 1171,7F.B - 279,2F.D + 797,1F.AM - 940,1B.D + 587B.AM - 1247,5D.AM + 499,9F.B.D - 1388,3F.B.AM - 237,3F.D.AM - 1020B.D.AM + 256,2F.B.D.AM$$

### 3.2.4 Condensé des résultats des coefficients des modèles :

Le tableau ci-dessous regroupe la valeur des coefficients des modèles précédemment obtenus :

	RFP	CWT	LSCE
Cte	2	50,9	84,5
F	54,3	1097	1112,2
B	140,4	430,1	1333,1
D	62,3	2634,9	-1155,7
AM	10,5	1194,5	4970,3
F.B	43,8	58,7	-1171,7
F.D	16,4	834,9	-279,2
F.AM	29	1193,2	797,1
B.D	53,9	44,4	-940,1
B.AM	5,8	335	587
D.AM	1	813,4	-1247,5
F.B.D	11,3	-79,4	499,9
F.B.AM	25,2	120,3	-1388,3
F.D.AM	9,7	943	-237,3
B.D.AM	-2,3	1,3	-1020
F.B.D.AM	8,3	-3,5	256,2

Tableau 3 : Tableau de comparaison des valeurs des coefficients des modèles

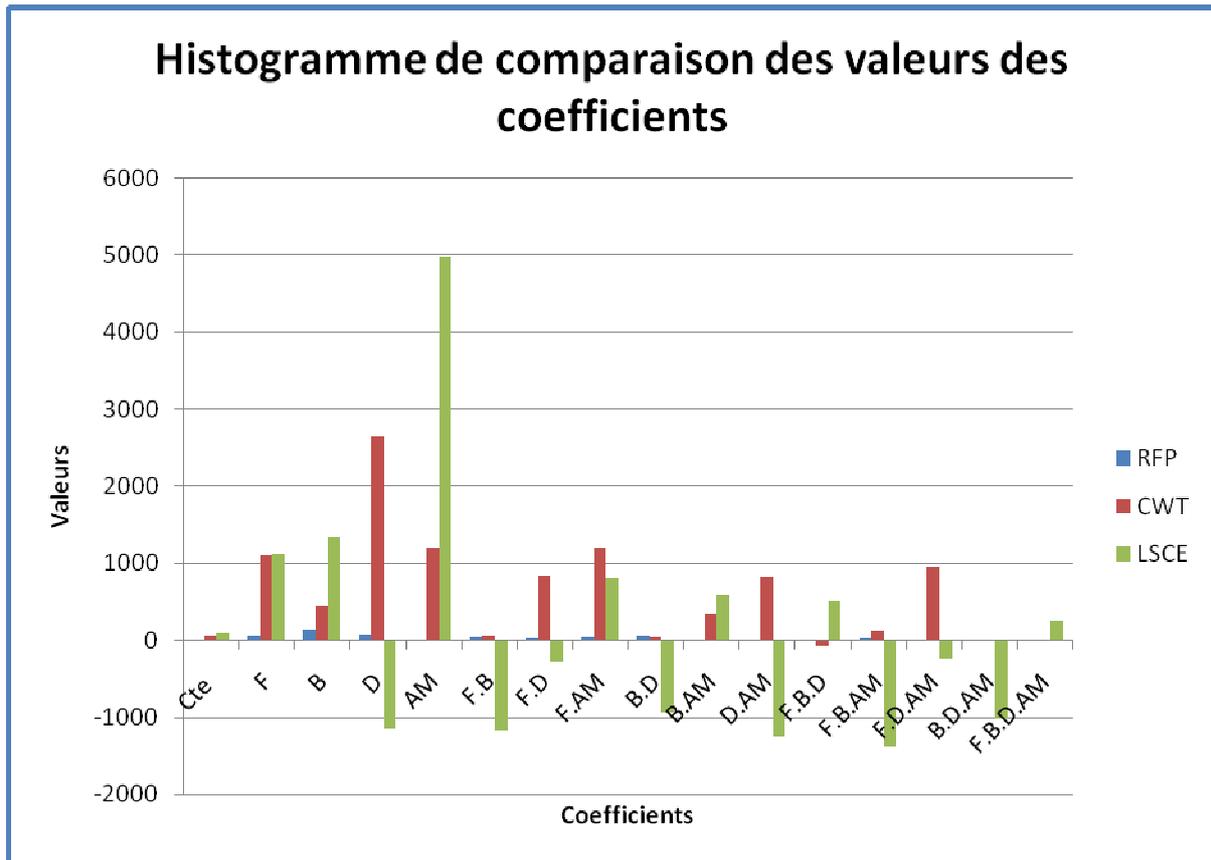


Fig30 : Histogramme de comparaison des valeurs des coefficients des modèles

# 4. Interprétation

## 4.1 Analyse de l'étude 1

Le plan de Box-Behnken a permis pour chaque méthode de comprendre l'influence du bruit, de la résolution fréquentielle et le taux d'amortissement.

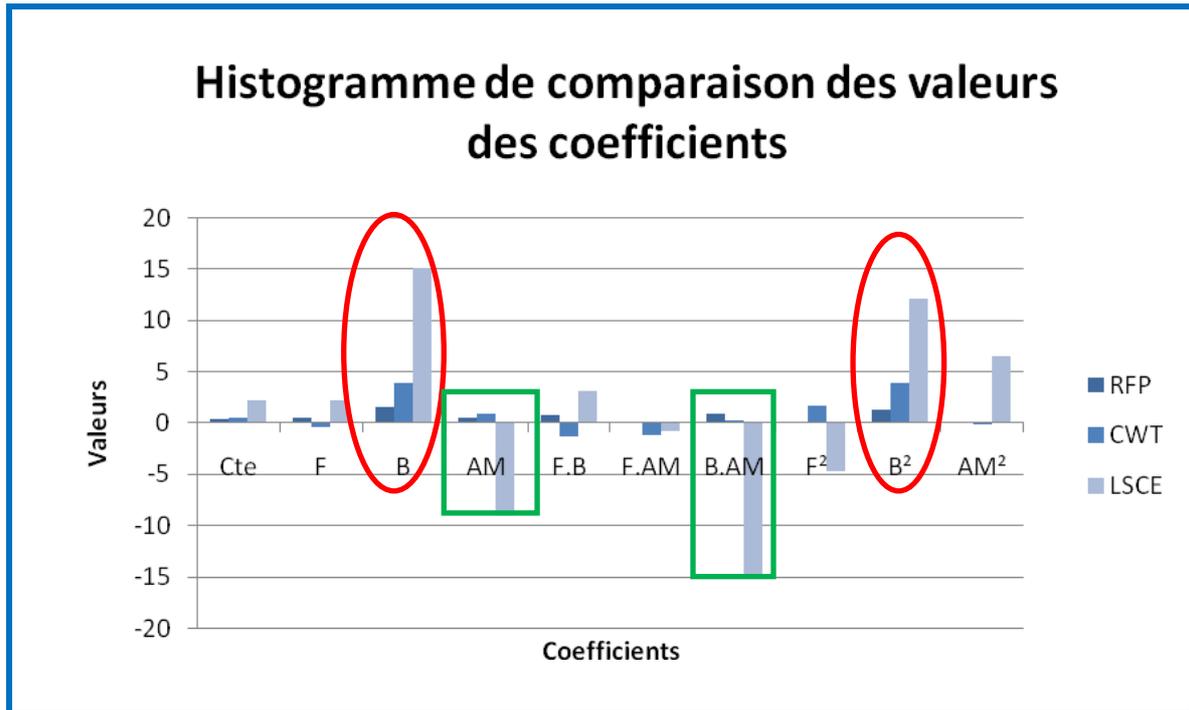


Fig31 : Histogramme de comparaison des valeurs des coefficients des modèles

On remarque que pour chaque méthode, le bruit est le facteur le plus nuisible à une bonne identification de l'amortissement. On remarque également que, grâce à l'étude des interactions entre les facteurs, le bruit a une importante conséquence sur l'effet d'un changement de l'amortissement ou de la résolution fréquentielle.

Il est à noter également qu'à cause du terme constant, représentant l'erreur moyenne, de la valeur des coefficients du modèle, on peut voir que la méthode LSCE est à l'origine des erreurs les plus importantes, la méthode RFP étant la plus performante.

Maintenant, analysons les résultats obtenus après ajouts du paramètre densité dans le plan d'expérience complet.

## 4.2 Analyse de l'étude 2

Nous avons choisi de réaliser un plan complet qui amène de meilleurs résultats lorsque le nombre de paramètre et de niveaux est important. L'histogramme (fig30) créée à la fin de l'étude 2 nous aidera pour notre analyse.

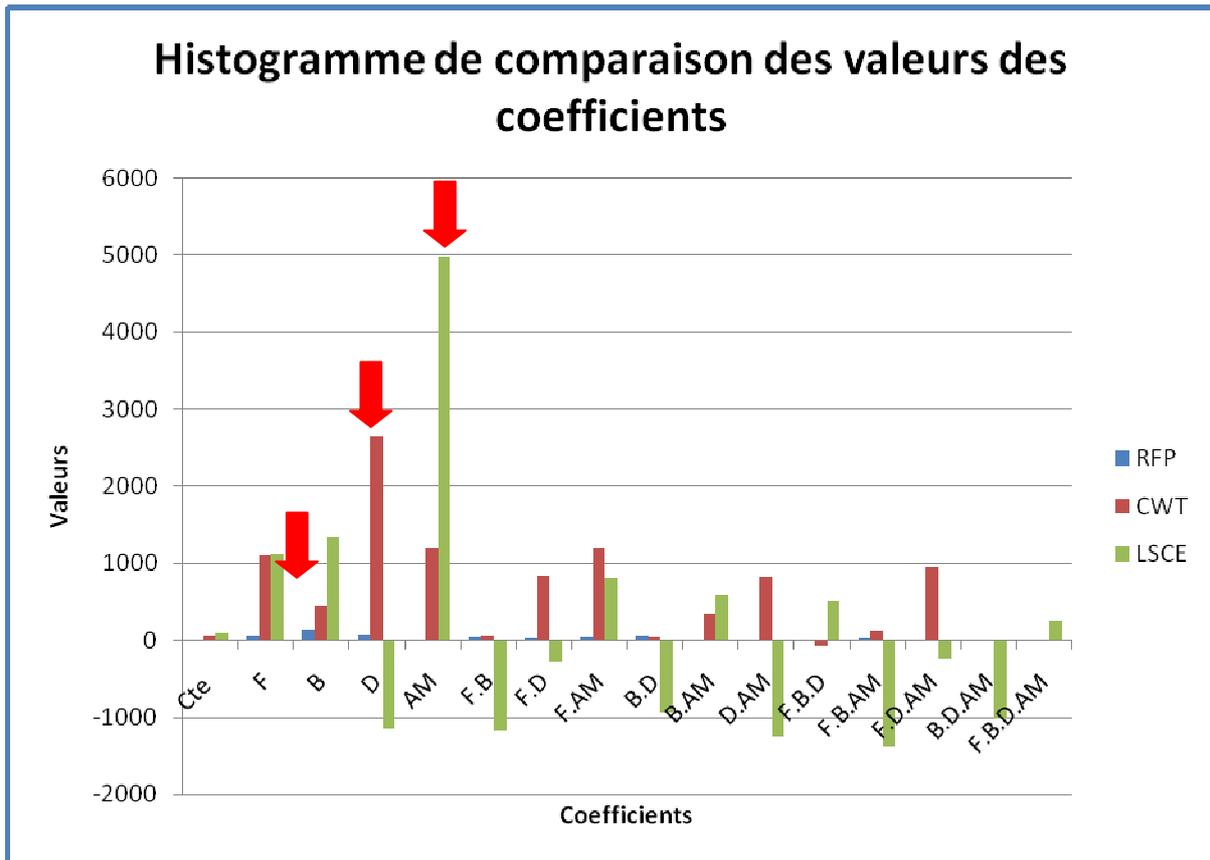


Fig32 : Histogramme de comparaison des valeurs des coefficients des modèles

Dans cette étude, les résultats ne sont pas constants suivant les méthodes. En effet, on remarque que pour la méthode RFP, le bruit est toujours le facteur qui influe le plus sur l'identification de l'amortissement. En revanche, la méthode des ondelettes est devenue, elle, très sensible à la densité des modes et la méthode LSCE, dépendante de l'amortissement mais très sensible au bruit auparavant, semble difficilement contrer les effets d'un changement des valeurs de l'amortissement.

Remarquons également que les valeurs des coefficients des modèles ont considérablement augmenté. La méthode RFP est toujours la plus performante mais les erreurs engendrées par les méthodes CWT et LSCE sur l'identification de l'amortissement sont très élevées. On peut, malgré des réglages précis, mettre en doute la pertinence d'une utilisation totalement supervisée de ces deux dernières méthodes.

### 4.3 Récapitulatif des résultats méthode/méthode

La méthode RFP, basée sur le calcul des pôles et des résidus de la FRF, apparaît être la plus robuste des méthodes étudiées. Le facteur qui semble le plus jouer sur l'identification de l'amortissement est le rapport signal à bruit. Le bruit étant un signal à très hautes fréquences, il peut être minimisé à l'aide de filtre qui pourrait rendre les résultats de la méthode RFP meilleurs.

En ce qui concerne la méthode CWT, on voit que les résultats sont assez bons dans l'étude 1 mais deviennent très mauvais dans l'étude 2. Sensible au bruit dans l'étude 1 puis très sensible à la densité des modes à identifier dans l'étude 2, elle ne semble pas assez robuste en ce qui concerne l'identification de l'amortissement. Le problème de cette méthode

est qu'elle repose sur le calcul d'un coefficient directeur d'une droite après régression linéaire. La détermination de l'amortissement est donc obtenu après un certains nombres d'imprécisions comme la détermination des maxima locaux de la carte temps-fréquence puis par le tracé du module des coefficients d'ondelettes en fonction du temps. Cette méthode ne semble pas très performante dans le cas d'une étude totalement automatique.

Dans les deux études, la méthode LSCE, très rapide lors de la détermination de l'amortissement, apparaît également la moins performante. Elle est très sensible aux variations de bruit et d'amortissement mais également sensible aux variations des autres paramètres. L'extraction précise des valeurs du diagramme de stabilité n'amène donc pas à de très bons résultats. Historiquement, cette méthode a quand même été améliorée amenant la création de la méthode LSCF (Least Square Complex Frequency) puis utilisée par le fabricant LMS et le développement de la méthode POLYMAX.

## 5. Conclusion et perspectives

Ce mémoire a tout d'abord été l'occasion de constituer une bibliographie pertinente sur trois méthodes utilisées dans l'identification des paramètres modaux en analyse modale.

On a ensuite étudié l'influence de certains facteurs importants sur la détermination des taux d'amortissement suite à l'identification. Les histogrammes présentent de manière simple les résultats obtenus lors de la validation numérique supervisée sous Matlab.

Enfin, nous avons pu déduire de ces études le comportement des trois méthodes face aux variations des facteurs : bruit, résolution fréquentielle, densité des modes et taux d'amortissement.

De cette étude, il faut retenir :

- **Le choix d'une méthode d'identification peut changer les résultats** obtenus de manière considérable. Ayant une sensibilité différente par rapport à ces paramètres, les résultats issus de l'identification ne sont pas les mêmes.
- **Les facteurs les plus influents ne sont pas les mêmes suivant les méthodes**, ce qui peut laisser penser à une optimisation globale de l'identification en choisissant certaines méthodes suivant la configuration du signal que l'on étudie.
- **La méthode RFP semble être de loin la plus robuste**. Lors des deux études menées, c'est elle qui a donnée les meilleurs résultats.

Les deux études ont permis de mettre en évidence les performances de la méthode RFP. Mais ces études ouvrent également la porte à d'autres analyses possibles :

- On pourrait simuler des signaux d'amplitude différente et prendre ce facteur en compte dans la réalisation d'un nouveau plan d'expériences.
- On pourrait également proposer un outil d'aide à l'analyse modale qui combinerait les méthodes d'identification pour obtenir les meilleurs résultats possibles suivant les cas traités.
- Pour des différentes raisons, nous n'avons pu comparer cette méthode à la méthode POLYMAX sur nos signaux simulés. Pour une meilleure observation, il serait donc intéressant d'appliquer la méthode RFP aux FRF obtenues sur les poutres endommagées de la thèse d'AMIR SHADIN.
- Il serait intéressant de mettre en place un essai sinus balayé, en fréquence croissante et décroissante, pour une étude plus précise des non-linéarités créées par l'endommagement. Ceci pourrait permettre de déduire l'influence des endommagements sur la variation des paramètres modaux et plus particulièrement sur l'amortissement, l'estimation du spectre étant réalisé à partir par reconstruction d'une FRF par des réponses isolées à une excitation « pure » et non pas une réponse à une superposition linéaire de sinusoïdes.

# Bibliographie

J'ai fait le choix d'une bibliographie succincte. Les références essentielles au cœur de notre problématique peuvent être trouvées dans les références [1,2] sans oublier l'ouvrage classique d'analyse modale qu'est : D.J. Ewins (1991), *Modal testing Theory and Practice*, Wiley.

[1] **Angel Moses Iglesias**: "*Investigating Various Modal Analysis – Extracting Techniques to Estimate Damping Ratio*", thesis in Virginia Polytechnic Institute, 2000

[2] **JIUN-Yan Wu**: "*Extracting Damping Ratio Using Wavelets*", Master of Engineering at the Massachusetts Institute of Technology, 2001

[3] **Stéphane MALLAT**: « *Une exploration des signaux en ondelettes* », Ellipses, 2000

[4] **LARDIES Joseph, Ta MINH-NGHI**: "*A wavelet-based approach for the identification of damping in non-linear oscillators*", LMARC, 2005

[5] **YAKHOU Karim**, *Validation expérimentale d'un modèle dynamique global de boîte de vitesses automobile. Thèse : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1999.*

[6] **Guillaume PUEL**: "*Mise en évidence et recalage des non-linéarités locales en Dynamique des Structures*", DEA Techniques Avancées en calcul des Structures, ENS CACHAN/CNRS, 2001

[7] **Jacques GOUPY et Lee CREIGHTON**: « *Introduction aux plans d'expériences* », DUNOD, 2005

[8] **D.DUGUE et M.GIRAULT**, « *Analyse de Variances et Plans d'expériences* », DUNOD, 1969

Sur internet :

Pour l'algorithme LSCE

[http://www.sdrl.uc.edu/academic-course-info/docs/ucme663/v3\\_lsce.m](http://www.sdrl.uc.edu/academic-course-info/docs/ucme663/v3_lsce.m)