



Régulation LQ/LQG

Notes de cours

D.Alazard

PAGE SANS TEXTE

Sommaire

Introduction	7
1 Éléments de théorie de Lyapunov sur la stabilité	9
1.1 Définition de la stabilité	9
1.2 Fonctions de LYAPUNOV	10
1.3 Stabilité au sens de LYAPUNOV : méthode directe	11
1.4 Stabilité des systèmes linéaires	13
2 La commande LQ	15
2.1 Principe	15
2.1.1 Hypothèse	15
2.1.2 Résultats	15
2.1.3 Schéma de principe	17
2.1.4 Robustesse de la commande LQ	18
2.2 Résolution de l'équation de RICCATI:	19
2.2.1 Propriété de la matrice hamiltonienne H	19
2.2.2 Résolution par les sous espaces invariants	20
2.3 Propriétés asymptotiques	21
2.3.1 Le Root square locus	22
2.3.2 Exemple mono-variable	23
2.3.3 Exemple multi-variable	24
2.4 Exercices	25
2.4.1 ... sur la double intégration	25
2.4.2 ... sur le “root square locus”	26
2.4.3 ... sur l'introduction d'un terme intégral	26
3 Le filtre de Kalman en régime permanent	27
3.1 Principe du filtre de KALMAN	27

3.2	Rappels, définitions et hypothèses	28
3.2.1	Hypothèses	29
3.2.2	Caractérisation d'une variable aléatoire scalaire	29
3.2.3	Caractérisation d'une variable aléatoire à plusieurs dimensions	30
3.2.4	Signal aléatoire ou processus stochastique	31
3.2.5	Moments d'un signal aléatoire	31
3.2.6	Stationnarité	32
3.2.7	Spectre complexe	32
3.2.8	Bruit blanc	33
3.3	Calcul du gain du filtre de KALMAN	34
3.4	Exercices	36
3.4.1	Système du second ordre :	36
3.4.2	Estimation d'un biais :	37
4	La commande LQG	39
4.1	Principe général de la commande LQG	39
4.2	Propriétés	41
4.3	Synthèse LQG/LTR (Loop Transfer Recovery)	41
4.3.1	Hypothèses d'application	41
4.3.2	Recouvrement en entrée	41
4.3.3	Recouvrement en sortie	42
4.4	Synthèse LQG discrète	42
4.4.1	Filtre de KALMAN discret (régime permanent)	43
4.4.2	Retour d'état optimal en discret	44
4.4.3	Forme "prédicteur"	44
4.4.4	Forme "estimateur"	44
4.4.5	Cas particulier : commande LQG discrète pour systèmes conti- nus	45
4.5	Exercices	48
4.5.1	Système du premier ordre	48
4.5.2	Système du second ordre	48
4.5.3	LQG discret	49
5	Réalisation d'un correcteur sous forme estimation/commande	51
5.1	Principe général	51
5.2	Calcul des paramètres	52
5.3	Intérêts pratiques	53

5.4	Illustration	54
5.5	Exercice	56
6	La forme standard	57
6.1	Introduction	57
6.2	Liens entre synthèse H_2 et synthèse LQG	58
6.3	Pondérations fréquentielles	59
	Références	61
A	Passage d'un bruit blanc dans un système linéaire	63
B	BE sur Matlab	67

PAGE SANS TEXTE

Introduction

Ces notes de cours présentent une introduction aux techniques de commande **Linéaire Quadratique (LQ)** et **Linéaire Quadratique Gaussienne (LQG)**.

Nous rappelons dans un premier temps la théorie de la stabilité au sens de LYAPUNOV dans le cadre général des systèmes non-linéaires et introduisons la notion de fonction de Lyapunov. L'intérêt de ces *méthodes d'analyse* dites de LYAPUNOV est de juger la stabilité d'un système sans intégrer les équations différentielles qui décrivent son comportement. L'inconvénient est qu'elles ne fournissent que des *conditions suffisantes* et que l'on ne peut rien conclure si la condition n'est pas satisfaite. Elles peuvent, pour les mêmes raisons, fournir un résultat pessimiste (ou *conservatif*). Nous nous recentrons alors rapidement sur le cas des systèmes linéaires où le théorème de LYAPUNOV fournit une *condition nécessaire et suffisante* de stabilité.

Dans le second chapitre, nous présentons la commande LQ par *retour statique d'état*. Par rapport au problème général de la *commande optimale* fondée sur le *principe du maximum* (tel qu'il est présenté dans [4]), nous nous polarisons sur le problème de la régulation à horizon libre des systèmes linéaires avec critère quadratique. Dans ce contexte, le théorème de LYAPUNOV est une alternative intéressante pour démontrer les résultats de la régulation LQ. Nous présentons également les propriétés de robustesse et les comportements asymptotiques de la commande LQ. Enfin, nous nous intéressons au *lieu des racines au carré* (Root square locus) qui est un outil graphique permettant de guider le choix des pondérations sur des considérations modales dans le plan complexe.

Le chapitre 3 propose un rappel sur le filtre de KALMAN continu en régime permanent. On insiste sur la dualité (jusque dans la démonstration) avec le problème de la commande LQ à horizon libre. Des rappels de probabilité sont également proposés afin de rendre ce document le plus autonome possible.

La synthèse LQG de *retours dynamiques de sortie*, qui combine un retour d'état LQ et un filtre de Kalman, est abordée dans la quatrième partie. Nous présentons principalement les propriétés structurelles de la commande LQG (*principe de séparation*), la procédure de réglage LTR (*Loop Transfer Recovery*) dont l'objectif est de restaurer les marges de stabilité du retour d'état LQ idéal et la

synthèse LQG discrète.

Dans le chapitre 5 nous présentons le *problème inverse*, c'est-à-dire : comment calculer, pour un système et un correcteur quelconque donnés, les éléments du correcteur LQG équivalent. L'intérêt d'une telle reformulation des correcteurs est présenté dans le cadre de l'implantation de lois de commande.

Dans le dernier chapitre, la synthèse LQG est présentée sous le formalisme maintenant général de la *forme standard* et de la *synthèse H_2* .

Ce document doit être considéré comme un résumé ou un formulaire extrait de [1]. Seules les démonstrations qui ne sont pas présentées dans la référence [1] sont détaillées dans ce document. Il s'agit principalement de la démonstration de la commande LQ par l'approche de LYAPUNOV, du *Root square locus* et de la synthèse LQG discrète.

Chapitre 1

Éléments de théorie de Lyapunov sur la stabilité

1.1 Définition de la stabilité

Considérons un système continu de dimension finie décrit par une équation différentielle vectorielle non-linéaire du premier ordre :

$$\dot{x} = f(x) \quad x \in \mathcal{R}^n \quad (1.1)$$

Définition 1.1 (Point d'équilibre) *Un vecteur $x_e \in \mathcal{R}^n$ est dit point ou état d'équilibre si :*

$$f(x_e) = 0 .$$

Remarque: tout point d'équilibre peut être ramené à l'origine par un simple changement de variable $x \leftarrow x - x_e$. Donc, sans perte de généralité, les définitions et théorèmes qui suivent seront établis en considérant :

$$x_e = 0 .$$

Définition 1.2 (Stabilité locale simple et asymptotique) *L'état d'équilibre $x_e = 0$ du système 1.1 est :*

- *stable si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $r = r(\epsilon)$, tel que :*

$$\|x(t=0)\| < r \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon \quad \forall t > 0$$

- *instable, si non stable,*

- *asymptotiquement stable, s'il est stable et si r peut être choisi tel que :*

$$\|x(t=0)\| < r \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

- *marginale*ment stable, s'il est stable sans être asymptotiquement stable.

Physiquement, la stabilité au sens de LYAPUNOV garantit que la trajectoire $x(t)$ dans l'espace d'état restera à l'intérieur de la boucle $\mathcal{B}(x_e, \epsilon)$ si son point de départ appartient à une boule $\mathcal{B}(x_e, r)$. La stabilité asymptotique inclut cette propriété, mais spécifie de plus que toute trajectoire initialisée dans la boule $\mathcal{B}(x_e, r)$ converge vers x_e .

Dans ce qui suit et par abus de langage, on parle de stabilité du système au lieu de parler de stabilité du point d'équilibre.

Définition 1.3 (Stabilité asymptotique globale) *Si le système est asymptotiquement stable quel que soit le vecteur d'état initial $x(t = 0)$ alors le point d'équilibre est globalement asymptotiquement (ou exponentiellement) stable.*

1.2 Fonctions de Lyapunov

Définition 1.4 (Fonction définie positive) *Une fonction scalaire $U(x)$ continuellement différentiable (par rapport à x) est dite définie positive dans une région Ω autour de l'origine si :*

- (1) $U(0) = 0$,
- (2) $U(x) > 0$ pour tout $x \in \Omega / x \neq 0$.

si (2) est remplacé par $U(x) \geq 0$ alors la fonction est dite définie semi-positive.

Définition 1.5 [Fonction quadratique définie positive] *La fonction quadratique $U(x) = x^T Q x$, où $Q_{n \times n}$ est une matrice réelle symétrique, est dite définie positive si toutes les valeurs propres de la matrice $Q_{n \times n}$ sont strictement positives.*

Les fonctions quadratiques sont souvent utilisées dans l'analyse des systèmes dynamiques (*fonction de LYAPUNOV*). Notamment : l'énergie cinétique, l'énergie potentielle élastique ou de gravité et l'énergie totale sont des fonctions quadratiques de l'état pour les systèmes mécaniques.

Exemple 1.1 – $U_1(x) = x_1^2 + x_2^2$ est définie positive dans \mathcal{R}^2 et semi-définie positive dans \mathcal{R}^3 ,
– $U_2(x) = (x_1 + x_2)^2$ est seulement semi-définie positive dans \mathcal{R}^2 car nulle sur la droite $x_1 + x_2 = 0$.

1.3 Stabilité au sens de Lyapunov : méthode directe

La stabilité au sens de LYAPUNOV est une traduction mathématique d'une constatation élémentaire : si l'énergie totale d'un système se dissipe continuellement (c'est-à-dire décroît avec le temps) alors ce système (qu'il soit linéaire ou non, stationnaire ou non) tend à se ramener à un état d'équilibre (il est stable). La *méthode directe* cherche donc à générer une fonction scalaire de type énergétique qui admet une dérivée temporelle négative.

Théorème 1.1 (Stabilité locale) *L'état d'équilibre $x_e = 0$ est stable si il existe une fonction continuellement dérivable $U(x)$ telle que :*

- (1) $U(0) = 0$,
- (2) $U(x) > 0 \quad \forall x \neq 0, x \in \Omega$,
- (3) $\dot{U}(x) \leq 0 \quad \forall x \neq 0, x \in \Omega$,

où \dot{U} est la dérivée de U par rapport au temps et Ω est une région autour de 0. Si de plus (3) est remplacée par $\dot{U}(x) < 0$ alors l'état d'équilibre est asymptotiquement stable.

Le fonction $U(x)$ est appelée *fonction de LYAPUNOV*.

Ce théorème est une condition suffisante de stabilité mais ne permet pas de guider l'utilisateur dans le choix de la fonction de LYAPUNOV et ne permet pas de conclure si on ne trouve pas une telle fonction. Une *fonction de LYAPUNOV candidate* est une fonction définie positive dont on teste la décroissance autour du point d'équilibre. L'étude des méthodes qui permettent de construire une *fonction de LYAPUNOV candidate* pour un système donné a motivé une littérature très abondante ces dernières décennies dont la revue dépasse le cadre de ce document. Les formes quadratiques sont les plus utilisées notamment les fonctions définies positives qui sont des intégrales premières (c'est-à-dire dont la dérivée temporelle est nulle) du système idéalisé (par exemple l'énergie totale d'un système mécanique idéalement conservatif, voir exemple suivant).

Théorème 1.2 (Stabilité globale) *L'état d'équilibre x_e est globalement asymptotiquement stable si il existe une fonction continuellement dérivable $U(x)$ telle que :*

- (1) $U(0) = 0$,
- (2) $U(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$,
- (3) $\dot{U}(x) < 0 \quad \forall x \neq 0$,
- (4) $\dot{U} \rightarrow -\infty \quad \text{quand} \quad \|x\| \rightarrow \infty$.

Exemple 1.2 *Considérons le système décrit par une équation différentielle ordinaire non-linéaire :*

$$\ddot{x}(t) - \epsilon x^2(t)\dot{x} + x(t) = 0$$

Sous forme d'état, avec les définitions $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, nous obtenons :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \epsilon x_1^2 x_2 \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que “cet oscillateur avec une fonction d'amortissement non-linéaire” a un état d'équilibre à l'origine $(x_1, x_2) = (0, 0)$. Pour l'analyse de la stabilité nous choisirons la fonction de LYAPUNOV candidate suivante :

$$U(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}$$

Ce choix est fondé sur une considération physique : c'est une intégrale première (énergie mécanique totale) du système idéalement conservatif obtenu pour $\epsilon = 0$. Le calcul de \dot{U} donne :

$$\begin{aligned} \dot{U}(x_1, x_2) &= x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 \\ &= x_1 x_2 + x_2 (-x_1 + \epsilon x_1^2 x_2) \\ &= \epsilon x_1^2 x_2^2 \end{aligned}$$

Donc U est une fonction définie positive qui est strictement décroissante le long de toutes les trajectoires du système si $\epsilon < 0$. D'après les théorèmes précédents, l'état d'équilibre $(0, 0)$ est globalement stable pour $\epsilon = 0$, est globalement asymptotiquement stable si $\epsilon < 0$, globalement instable sinon. Dans cet exemple, l'analyse est complète car elle a permis de caractériser la stabilité globale du système. Ce n'est pas toujours le cas et cela dépend de la fonction de LYAPUNOV candidate comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 1.3 Considérons maintenant le système défini par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1(x_2^2 - 1) \\ \dot{x}_2 = -x_2(x_1^2 + 1) \end{cases}$$

qui présente un point d'équilibre à l'origine et considérons la même fonction de LYAPUNOV candidate que précédemment :

$$U_1(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \dot{U}_1(x_1, x_2) &= x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 \\ &= x_1^2 x_2^2 - 2x_1^2 - x_2^2. \end{aligned}$$

$\dot{U}_1 < 0$ si $x_1^2 x_2^2 - 2x_1^2 - x_2^2 < 0$. Dans le plan (x_1^2, x_2^2) , on peut tracer le domaine de stabilité suggéré par cette fonction de LYAPUNOV candidate. On obtient alors la figure 1.1.

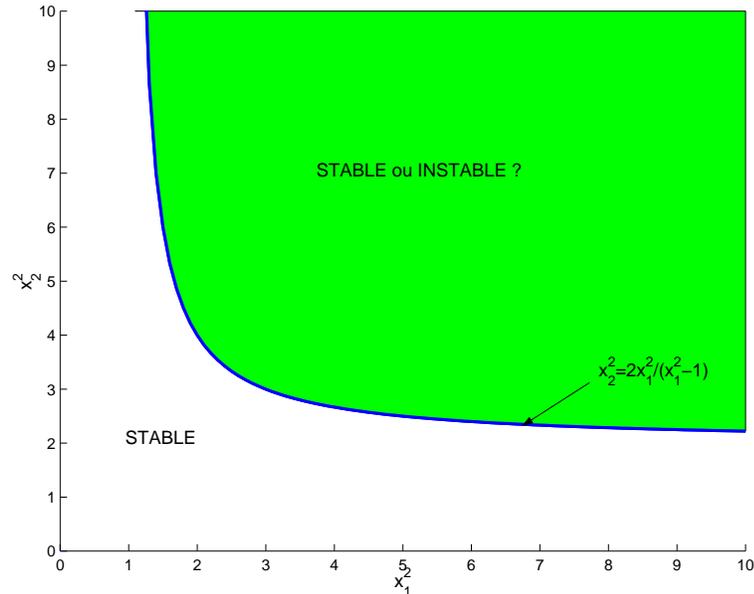


FIG. 1.1 – *Domaine stabilité suggéré par $U_1(x_1, x_2)$.*

Si l'on considère maintenant la fonction de LYAPUNOV candidate suivante :

$$U_2(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + 2x_2^2}{2},$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{U}_2(x_1, x_2) &= x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 \\ &= -2x_1^2 - 2x_2^2 \end{aligned}$$

et nous pouvons conclure que le système est globalement asymptotiquement stable dans tout l'espace d'état (x_1, x_2) . On dit que la première fonction de LYAPUNOV U_1 est conservative car elle donne un résultat pessimiste sur le domaine de stabilité du système.

1.4 Stabilité des systèmes linéaires

Si le système est linéaire :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad x \in \mathcal{R}^n \quad (1.2)$$

alors le système est globalement asymptotiquement stable (le point d'équilibre étant à l'origine) si toutes les valeurs propres de A sont strictement négatives, soit :

$$R_e(\lambda_i(A)) < 0 \quad i = 1, \dots, n$$

Théorème 1.3 (Stabilité de Lyapunov des systèmes linéaires) *Le système linéaire 1.2 est asymptotiquement stable (ou les valeurs propres de A sont à partie réelles négatives) si et seulement si, pour toute matrice symétrique définie positive Q , il existe une matrice P définie positive (symétrique) satisfaisant l'équation de LYAPUNOV*

$$A^T P + P A + Q = 0 \quad (1.3)$$

Démonstration de la condition suffisante : considérons la fonction de LYAPUNOV candidate

$$U(x) = x^T P x$$

alors :

$$\begin{aligned} \dot{U}(x) &= x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x \\ &= x^T P A x + x^T A^T P x \\ &= x^T (P A + A^T P) x . \end{aligned}$$

Soit Q une matrice définie positive, si P est solution positive de 1.3 alors

$$U(x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \quad \text{et}$$

$$\dot{U}(x) = -x^T Q x \Rightarrow \dot{U}(x) < 0 \quad \forall x \neq 0 .$$

Donc, d'après le théorème général, le système est asymptotiquement stable. □

Démonstration de la condition nécessaire : pour un couple (A, Q) quelconque donné, l'équation 1.3 d'inconnue P peut ne pas admettre une solution unique. Mais si A est stable alors l'équation de LYAPUNOV admet une solution unique :

$$P = \int_0^{\infty} e^{A^T t} Q e^{A t} dt . \quad (1.4)$$

En effet :

$$\begin{aligned} A^T P + P A &= \int_0^{\infty} A^T e^{A^T t} Q e^{A t} dt + \int_0^{\infty} e^{A^T t} Q e^{A t} A dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} (e^{A^T t} Q e^{A t}) dt \\ &= e^{A^T t} Q e^{A t} \Big|_0^{\infty} \\ &= -Q \end{aligned} \quad (1.5)$$

car $e^{A t} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$ si A est stable. □

Dans la chapitre suivant, pour démontrer les résultats de la commande LQ, on utilise une variante de la condition nécessaire de stabilité : soit A une matrice stable alors P solution de 1.3 est définie positive si Q est définie positive (évident d'après 1.4).

Chapitre 2

La commande LQ

2.1 Principe

Considérons un système linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) & x \in \mathcal{R}^n; u \in \mathcal{R}^m \\ z(t) = Nx(t) & z \in \mathcal{R}^q. \end{cases} \quad (2.1)$$

2.1.1 Hypothèse

La paire (A, B) est stabilisable, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de mode instable et ingouvernable dans le système.

2.1.2 Résultats

La commande par retour d'état qui stabilise le système et minimise le critère LQ :

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty (z^T(t)Qz(t) + u^T(t)Ru(t))dt \\ &= \int_0^\infty (x^T(t)Q_x x(t) + u^T(t)Ru(t))dt \end{aligned} \quad (2.2)$$

avec $R > 0$, $Q \geq 0$ et $Q_x = N^T Q N$, s'écrit :

$$u(t) = -K_c x(t) \text{ avec } K_c = R^{-1} B^T P_c \quad (2.3)$$

et P_c solution positive (**symétrique**) de l'équation de RICCATI :

$$P_c A + A^T P_c - P_c B R^{-1} B^T P_c + Q_x = 0. \quad (2.4)$$

On a alors : $J_{\min} = x_0^T P_c x_0$ (x_0 : état initial à $t = 0$).

Démonstration :¹ La dynamique du système en boucle fermée sur la loi de commande $u(t) = -Kx(t)$ obéit à l'équation :

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) . \quad (2.5)$$

La réponse autonome de $x(t)$ s'écrit alors : $x(t) = e^{A_f t}x_0$ avec $A_f = A - BK$ et $x_0 = x(t = 0)$.

Le critère J devient :

$$J = \int_0^{\infty} (x^T(t)Q_x x(t) + u^T(t)Ru(t))dt \quad (2.6)$$

$$= \int_0^{\infty} x^T(t)(Q_x + K^T RK)x(t)dt \quad (2.7)$$

$$= x_0^T \left(\int_0^{\infty} e^{A_f^T t} (Q_x + K^T RK) e^{A_f t} dt \right) x_0 \quad (2.8)$$

$$= x_0^T P x_0 \quad (2.9)$$

avec :

$$P = \int_0^{\infty} e^{A_f^T t} (Q_x + K^T RK) e^{A_f t} dt.$$

La contrainte A_f stable entraîne que P vérifie l'équation de LYAPUNOV (voir théorème 1.3) :

$$A_f^T P + P A_f + Q_x + K^T RK = 0 \quad (2.10)$$

Par ailleurs $P \geq 0$ car $J = x_0^T P x_0$ et $J \geq 0 \quad \forall x_0$ (critère quadratique).

Soit K_c la valeur optimale de K qui minimise J et P_c la solution correspondante de l'équation de LYAPUNOV 2.10, soit :

$$(A - BK_c)^T P_c + P_c (A - BK_c) + Q_x + K_c^T R K_c = 0 \quad (2.11)$$

Considérons une variation Δ_K autour de K_c ; soit $K = K_c + \Delta_K$, alors il en résulte une variation Δ_P autour de P_c ; soit $P = P_c + \Delta_P$ qui vérifie :

$$(A - B(K_c + \Delta_K))^T (P_c + \Delta_P) + (P_c + \Delta_P) (A - B(K_c + \Delta_K)) + \dots \quad (2.12)$$

$$\dots Q_x + (K_c + \Delta_K)^T R (K_c + \Delta_K) = 0$$

K_c est la valeur optimale au sens du critère J , ssi le critère augmente pour toute variation Δ_K autour de K_c ; soit :

$$\Delta_P > 0 \quad \forall \Delta_K \quad / \quad A - B(K_c + \Delta_K) \text{ stable}$$

1. Cette démonstration s'appuie sur le théorème de LYAPUNOV. Une démonstration plus générale utilise le principe du maximum (voir [4], par rapport à ce cadre plus général, le cas qui nous traitons ici est celui de la régulation à horizon libre des systèmes linéaires avec un critère quadratique).

Transfert du système : (s désigne la variable de LAPLACE).

$$G_{zu}(s) = \frac{Z}{U}(s) = N(sI - A)^{-1}B . \quad (2.15)$$

Transfert de boucle ouverte corrigée : (on coupe en (1))

$$L_c(s) = K_c(sI - A)^{-1}B . \quad (2.16)$$

2.1.4 Robustesse de la commande LQ

Le transfert de la boucle ouverte corrigée $L_c(s)$ vérifie la propriété :

$$(I + L_c^T(-s))R(I + L_c(s)) = R + G_{zu}^T(-s)QG_{zu}(s) \quad (2.17)$$

Démonstration : en ajoutant et retranchant sP_c à l'équation de RICCATI (2.4), nous obtenons :

$$N^TQN - P_cBR^{-1}B^TP_c - (-sI - A^T)P_c - P_c(sI - A) = 0 . \quad (2.18)$$

En multipliant chaque terme de cette dernière expression, à gauche par $B^T(-sI - A^T)^{-1}$ et à droite par $(sI - A)^{-1}B$ nous obtenons :

$$\begin{aligned} & B^T(-sI - A^T)^{-1}N^TQN(sI - A)^{-1}B \\ & - B^T(-sI - A^T)^{-1}P_cBR^{-1}B^TP_c(sI - A)^{-1}B \\ & - B^TP_c(sI - A)^{-1}B - B^T(-sI - A^T)^{-1}P_cB = 0 \end{aligned} .$$

En tenant compte de la définition de G_{zu} en (2.15) et du fait que $K_c = R^{-1}B^TP_c$ nous obtenons :

$$G_{zu}^T(-s)QG_{zu}(s) - L_c^T(-s)RL_c(s) - RL_c(s) - L_c^T(-s)R = 0 \quad (2.19)$$

que l'on peut réécrire sous la forme :

$$(I + L_c^T(-s))R(I + L_c(s)) = R + G_{zu}^T(-s)QG_{zu}(s)$$

□

Dans le cas mono-variable ($\dim u = 1$), on obtient² :

$$|1 + L_c(j\omega)| \geq 1 \quad \text{ou} \quad |S_u(j\omega)| \leq 1 \quad , \forall \omega .$$

La figure 2.2 illustre cette propriété dans le plan de Nyquist. Il en résulte des marges de stabilité confortables :

$$\text{Marge de gain} \notin [0.5; +\infty], \quad \text{Marge de phase} \notin [-60^\circ; +60^\circ] \quad (2.20)$$

2. On note $S_u(s) = (I + L_c(s))^{-1}$ la fonction de sensibilité en entrée.

Cette propriété n'est plus vérifiée pour les synthèses LQ dont le critère tient compte de pondérations croisées état/commande :

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q_x x + 2x^T S u + u^T R u) dt . \quad (2.21)$$

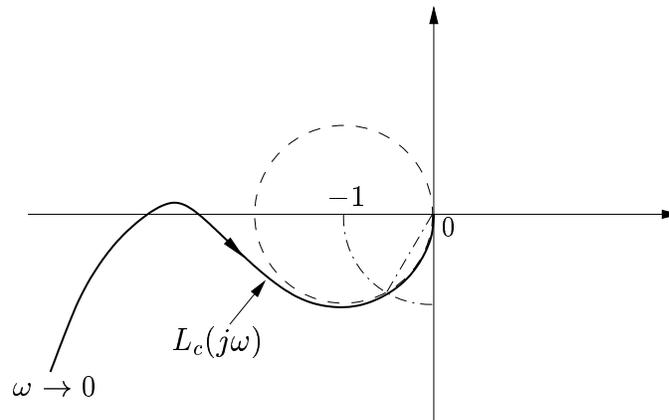


FIG. 2.2 – Lieu de NYQUIST de la fonction de transfert de boucle LQ.

2.2 Résolution de l'équation de Riccati :

L'équation (2.4) s'écrit aussi³ :

$$\begin{bmatrix} P_c & -I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q_x & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ P_c \end{bmatrix} = 0 .$$

$H = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q_x & -A^T \end{bmatrix}$ est appelée la matrice hamiltonienne associée à l'équation de RICCATI 2.14.

2.2.1 Propriété de la matrice hamiltonienne H

Les $2n$ valeurs propres de H sont :

- les n valeurs propres stables de la boucle fermée $\text{spec}(A - BK_c)$,
- les n valeurs propres opposées par rapport à l'axe imaginaire (donc instables).

3. I_n désigne la matrice identité de dimension n .

Démonstration : Effectuons une transformation régulière sur H :

$$\tilde{H} = M^{-1}HM \quad \text{avec} \quad M = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ P_c & I_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -P_c & I_n \end{bmatrix},$$

alors :

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -P_c & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - BR^{-1}B^T P_c & -BR^{-1}B^T \\ -Q_x - A^T P_c & -A^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A - BR^{-1}B^T P_c & -BR^{-1}B^T \\ -P_c A - A^T P_c - Q_x - P_c BR^{-1}B^T P_c & -A^T + P_c BR^{-1}B^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A - BK_c & -BR^{-1}B^T \\ 0 & -(A - BK_c)^T \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Donc :

$$\det(sI_{2n} - \tilde{H}) = \det(sI_{2n} - H) = \det(sI_n - (A - BK_c)) \det(sI_n + (A - BK_c)^T)$$

□

2.2.2 Résolution par les sous espaces invariants

La démonstration précédente nous montre que $\begin{bmatrix} I_n \\ P_c \end{bmatrix}$ est la matrice des vecteurs (de longueur $2n$) qui engendrent le sous espace invariant associé aux n valeurs propres stables de H ($\text{spec}(A - BK_c)$). Soit Λ la matrice $n \times n$ (diagonale ou non) des n valeurs propres stables et soit X la matrice des vecteurs propres de H associés à Λ calculés par exemple par une décomposition spectrale ou une décomposition de SCHUR de H :

$$HX = X\Lambda,$$

si l'on partitionne X en deux sous-matrices X_1 et X_2 de dimension $n \times n$:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix},$$

alors on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q_x & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ X_2 X_1^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n \\ X_2 X_1^{-1} \end{bmatrix} X_1 \Lambda X_1^{-1}$$

et donc

$$P_c = X_2 X_1^{-1}.$$

P_c est unique car il n'existe qu'un seul ensemble de n valeurs propres stables de H .

2.3 Propriétés asymptotiques

Le critère LQ peut être qualitativement perçu comme un compromis entre performance (décrite par la pondération sur z) et consommation (décrite par la pondération sur u). Que ce passe t'il pour les réglages extrêmes de ce compromis?.

Théorème 2.1 (Comportement asymptotique) (*extrait de [6], p.306*) *Considérons un système linéaire :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) & x \in \mathcal{R}^n; u \in \mathcal{R}^m \\ z(t) = Nx(t) & z \in \mathcal{R}^q. \end{cases} \quad (2.22)$$

La commande par retour d'état qui minimise le critère LQ :

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty (z^T(t)z(t) + \rho u^T(t)u(t))dt \\ &= \int_0^\infty (x^T N^T N(t)x(t) + \rho u^T(t)u(t))dt \end{aligned} \quad (2.23)$$

avec ρ scalaire positif, s'écrit⁴ :

$$u(t) = -K_c x(t) \text{ avec } K_c = \frac{1}{\rho} B^T P_c \text{ et } P_c = \text{Ric} \begin{bmatrix} A & -\frac{1}{\rho} B B^T \\ -N^T N & -A^T \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

Nous avons alors :

- $\lim_{\rho \rightarrow 0} (P_c) = P_0$ existe et $\lim_{\rho \rightarrow 0} (J) = x^T(0)P_0 x(0)$
- enfin, si les hypothèses suivantes sont vérifiées :

- * $\dim(z) \leq \dim(u)$ ($q \leq m$),
- * le transfert $Z/U(s) = N(sI_n - A)^{-1}B$ n'a pas de zéros dans le demi-plan droit,

$$\text{alors } P_0 = 0.$$

La dernière hypothèse illustre le fait que, dans le cas de système à déphasage non minimal (c'est-à-dire avec des zéros "instables"), on ne peut pas "pousser" indéfiniment

⁴ Pour rappel, $X = \text{Ric}[H]$ désigne la solution symétrique définie positive de l'équation de RICCATI :

$$XA + A^T X - X R_x X + Q_x = 0 \quad (2.24)$$

associée à la matrice hamiltonienne :

$$H = \begin{bmatrix} A & -R_x \\ -Q_x & -A^T \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

les performances (c'est-à-dire avoir une valeur de P_c très faible) même si l'on s'autorise des commandes sans aucune limitation ; ceci est tout à fait logique puisque les zéros (du système comme du correcteur) attirent les pôles en boucle fermée quand le gain de boucle augmente (où lorsque la pondération sur u diminue dans le critère LQ).

Pour analyser qualitativement les propriétés asymptotiques de la commande LQ, on peut utiliser un outil graphique : le **Root square locus**.

2.3.1 Le Root square locus

C'est le lieu des valeurs propres dans le plan complexe de la matrice hamiltonienne H lorsque ρ varie de 0 à l'infini. La partie stable de ce lieu montre l'évolution selon ρ de la dynamique en boucle fermée de la commande LQ ($\text{spec}(A - BK_c)$).

$$H = \begin{bmatrix} A & -\frac{1}{\rho}BB^T \\ -N^TN & -A^T \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

$$= \begin{bmatrix} A & 0 \\ -N^TN & -A^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} 0 & B^T \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

$$= A - \mathcal{B}k\mathcal{C} \quad (2.30)$$

Le *root square locus* correspond donc au lieu des racines du système fictif :

$$\mathcal{S} = \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \hline \mathcal{C} & 0 \end{array} \right] \quad (2.31)$$

pour un gain de boucle $k = 1/\rho$ variant de l' ∞ à 0 quand ρ varie de 0 à l' ∞ .

$$\text{Notons : } G_{zu}(s) = \frac{Z}{U}(s) = N(sI - A)^{-1}B \quad (= G_e \frac{\prod_0^{n_z}(s - z_i)}{\prod_0^n(s - p_i)} \text{ en monovariable}). \quad (2.32)$$

Alors il est facile de démontrer que :

$$\mathcal{S}(s) = \mathcal{C}(sI - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B} = G_{zu}^T(-s)G_{zu}(s). \quad (2.33)$$

Règles de construction du lieu : dans le cas mono-variable, ce sont les règles classiques appliquées au système \mathcal{S} compte tenu des remarques suivantes

- d'après la propriété de H :

$$\det(\lambda I - H) = \det(\lambda I - (A - BK_c)) \det(\lambda I + A^T - K_c^T B^T) \quad (2.34)$$

ce lieu des racines est symétrique par rapport à l'axe imaginaire \Rightarrow le signe du gain d'Évans est celui pour lequel l'axe imaginaire ne fait pas partie du lieu,

- les $2n$ pôles en boucle ouverte de \mathcal{S} sont les n pôles de $G_{zu}(s)$ complétés par leurs opposés,

- les zéros de \mathcal{S} sont les zéros de $G_{zu}(s)$ complétés par leurs opposés (évident d'après 2.33).

Dans le cas multi-variable, on ne peut plus parler du signe du gain d'Evans (c'est une matrice de gains) mais la propriété de symétrie par rapport à l'axe imaginaire est toujours vérifiée et on peut affirmer que le lieu direct (celui qui nous intéresse) est celui qui ne contient pas l'axe imaginaire et le lieu complémentaire est celui qui contient l'axe imaginaire. Enfin, la partie du lieu qui nous intéresse pour analyser la dynamique en boucle fermée est celle du demi-plan gauche car la commande LQG est **toujours stabilisante**.

Ces règles de symétrie conduisent aux conclusions suivantes.

Lorsque $\rho \rightarrow \infty$: (commande à énergie minimale)

- les valeurs propres stables de A ne sont pas modifiées par la commande LQ. Si le système est stable en boucle ouverte alors $K_c = 0$,
- les valeurs propres instables de A sont placées en boucle fermée sur leurs images stables $\rightarrow K_c \neq 0$.

Lorsque $\rho \rightarrow 0$: (aucune limitation sur la commande) soit n_z le nombre de zéros dans le transfert $G_{zu}(s) = Z/U(s)$, alors :

- n_z valeurs propres de la boucle fermée sont placées sur les zéros stables de $G_{zu}(s)$ et sur les images stables des zéros instables de $G_{zu}(s)$,
- les $n - n_z$ valeurs propres restantes sont rejetées à l'infini dans le demi plan gauche,
- $P_c = 0$ si $G_{zu}(s)$ est à déphasage minimal (pas de zéros instables),

2.3.2 Exemple mono-variable

Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ z = \begin{bmatrix} 1 & -0.1 \end{bmatrix} x \end{cases} \quad (2.35)$$

et le critère :

$$J = \int_0^{\infty} [z^2(t) + \rho u^2(t)] dt \quad \text{avec} \quad \rho > 0.$$

La session Matlab suivante permet de tracer le *root square locus* associé à ce problème (voir figure 2.3).

```
>> a=[0 1;-1 0];b=[0;1];n=[1 -0.1];
```

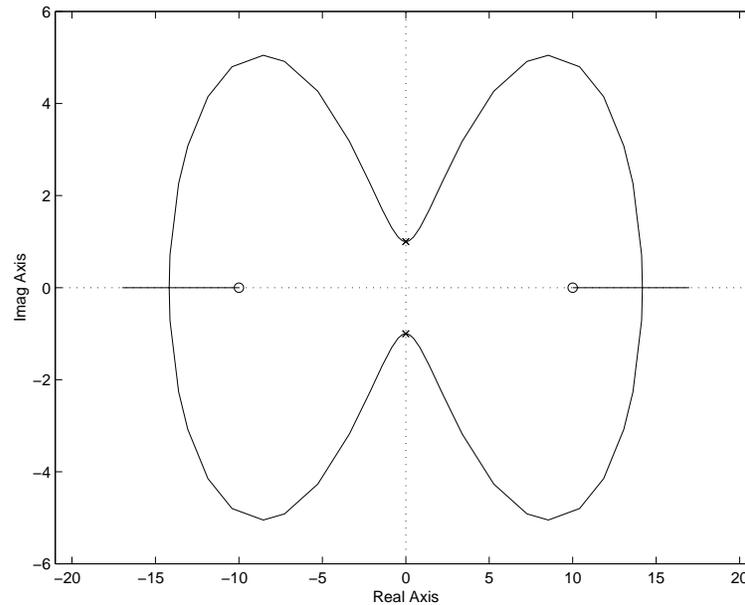


FIG. 2.3 – *Root square locus sur un exemple mono-variable.*

```
>> At=[a 0*a;-n'*n -a'];Bt=[b;0*b];Ct=[0*b' b'];
>> rlocus(At,Bt,Ct,0)
```

2.3.3 Exemple multi-variable

Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \\ z = \begin{bmatrix} 1 & -0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.2 \end{bmatrix} x(t) \end{cases} \quad (2.36)$$

et le critère :

$$J = \int_0^{\infty} [z^T z + \rho u^T u] dt \quad \text{avec} \quad \rho > 0.$$

À titre d'exercice on développera une fonction `rsqlocus` permettant de tracer le *root square locus* dans le cas général (la fonction `rlocus` n'accepte que des systèmes mono-variables). La syntaxe d'appel sera la même que celle de la fonction `lqr`. On obtient alors la session suivante et la figure 2.4.

```
>> a=[0 1 0 0;-1 0 0 0;1 0 0 1;0 0 0 0];
```

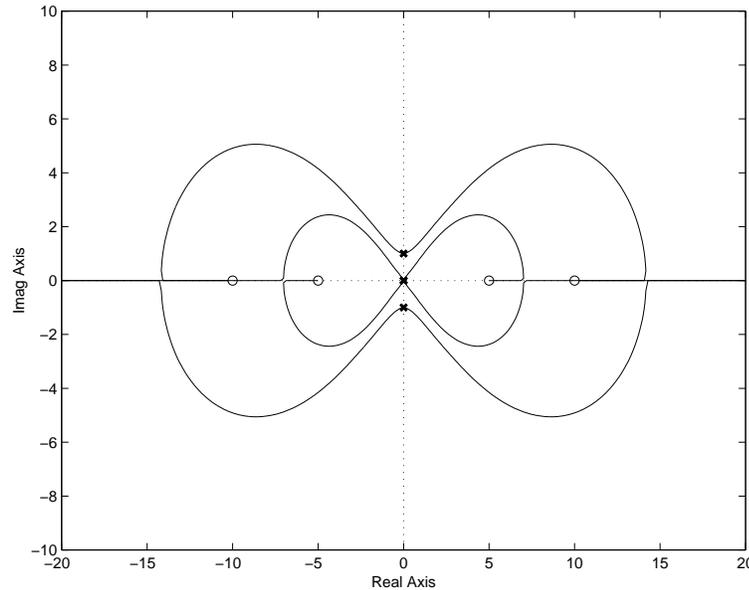


FIG. 2.4 – Root square locus sur un exemple multi-variable.

```
>> b=[0 0;1 0;0 0;0 1];n=[1 -0.1 0 0;0 0 1 0.2];
>> rsqlocus(a,b,n'*n,eye(2,2));
```

2.4 Exercices ...

2.4.1 ... sur la double intégration

Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e(t) \\ z(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x(t) \end{cases} \quad (2.37)$$

Nous recherchons le régulateur $u = -K_c x$ ($e(t) = 0$) qui minimise le critère

$$J = \int_0^{\infty} [z^2(t) + \rho u^2(t)] dt \quad \text{avec} \quad \rho = r^2 > 0.$$

- Calculer le retour d'état K_c sans résoudre l'équation de Riccati,
- tracer l'évolution de la dynamique en boucle fermée lorsque ρ varie de 0 à ∞ ,
- quelle valeur de ρ permet d'avoir en boucle fermée un système du second ordre amorti à 1?. Valeur de la pulsation correspondante? Lieu de Black correspondant?

- quel est le transfert $Z/E(s)$ en boucle fermée?
- Calculer P_c la solution de l'équation de Riccati en fonction de ρ et $\lim_{\rho \rightarrow 0}(P_c)$.

2.4.2 ... sur le “root square locus”

On considère le système du second ordre :

$$G(s) = \frac{Y}{U}(s) = \frac{s + 3}{(s + 2)(s - 1)}$$

Tracer qualitativement le “root square locus” associé au critère LQ :

$$J = \int_0^{\infty} (y^2 + \rho u^2) dt.$$

Peut-on rendre les valeurs propres du système en boucle fermée arbitrairement rapides en jouant sur ρ ?

2.4.3 ... sur l'introduction d'un terme intégral

On considère le système :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{1 - s}.$$

On souhaite stabiliser ce système et suivre une consigne $e(t)$ (échelon) avec une erreur statique nulle. Pour cela, on pondère dans le critère LQ l'intégrale x_i de l'erreur d'asservissement. Le critère s'écrit donc :

$$J = \int_0^{\infty} (x_i^2 + r u^2) dt \quad (\text{A.N: } r = 1),$$

associé au modèle représenté sur la figure suivante :

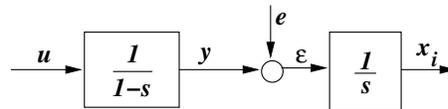


FIG. 2.5 – Modèle du système augmenté de l'intégration de l'erreur d'asservissement.

- Donner une représentation d'état du modèle augmenté de l'intégrateur en prenant y et x_i comme variables d'état : $x = [y \quad x_i]^T$.
- Calculer la loi $u = -Kx$ qui minimise le critère J .
- Dessiner le schéma fonctionnel du système en boucle fermée.

Chapitre 3

Le filtre de Kalman en régime permanent

Le but de ce chapitre est de démontrer les résultats du filtre de KALMAN en régime permanent afin de donner les éléments théoriques juste nécessaires pour comprendre son utilisation dans le cadre de la commande stationnaire des systèmes linéaires et de montrer la dualité parfaite entre commande et estimation. En effet dans une utilisation en boucle fermée telle que nous allons la présenter, on oublie rapidement les considérations stochastiques qui sont à la base du filtre de KALMAN. Les paramètres de réglages du filtre (c'est-à-dire les matrices de covariance des bruits d'état et de mesure) sont utilisés comme des paramètres de réglages du correcteur LQG finalement obtenu (au même titre que les matrices de pondérations du critère LQ) et sont réglés, non pas sur des critères de qualités stochastiques des estimés, mais sur des critères de qualités du système commandé (marges de stabilité, dynamique en boucle fermée, ...). Le lecteur confronté à des problèmes de trajectographie, balistique, ..., et désireux de connaître les résultats du filtre de KALMAN en régime non-stationnaire ou en réponse à des conditions initiales pourra se reporter à la référence [8] pour plus de détails. On notera qu'il y a également une dualité parfaite entre le problème de l'estimation des états en réponse à des conditions initiales et le problème de la commande LQ à horizon borné (voir aussi [4]).

3.1 Principe du filtre de Kalman

Considérons le système linéaire continu d'ordre n suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Mw(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) + v(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

où $w(t)$ et $v(t)$ représentent respectivement.

- le bruit sur l'équation d'état (on note $w_x = Mw$ le **bruit d'état**) sensé

représenter les perturbations extérieures agissant sur le système ou même les erreurs de modélisation : w_x est un signal "majorant" tout ce qui fait que l'état n'évolue pas exactement comme le prédit le modèle traduit par l'équation $\dot{x} = Ax + Bu$. Le signal w peut être scalaire ($q = 1$) ou vectoriel (avec q composantes) ; la matrice d'entrée M est alors une matrice de gains de taille $n \times q$,

- le bruit de mesure lié aux capteurs utilisés.

Un filtre de KALMAN est un système dynamique avec 2 entrées : la commande u et la mesure y , c'est-à-dire tous les signaux connus du système. L'état \hat{x} ou la sortie de ce système dynamique est un estimé de l'état x du système.

L'équation du filtre de KALMAN s'écrit :

$$\hat{\dot{x}} = (A\hat{x} + Bu) + K_f (y - C\hat{x} - Du) \quad (3.2)$$

On reconnaît dans le premier terme du second membre de cette équation, le modèle du système ($A\hat{x} + Bu$) qui est exploité pour prédire l'état du système. Cette prédiction est en fait une simulation en ligne du modèle du système. Le modèle étant faux, l'état prédit est recalé en fonction de l'erreur entre la mesure y et la mesure prédite $\hat{y} = C\hat{x} + Du$ et du gain du filtre K_f . Le signal d'erreur $y - \hat{y}$ est aussi appelé l'*innovation*. Le schéma correspondant (dans le cas où $D = 0$) est représenté sur la figure 3.1. Le gain K_f est calculé en fonction de la *confiance* que l'on a dans le modèle relativement à la *confiance* que l'on a dans la mesure. Si le modèle est très bon et la mesure très bruitée alors le gain K_f devra être très petit.

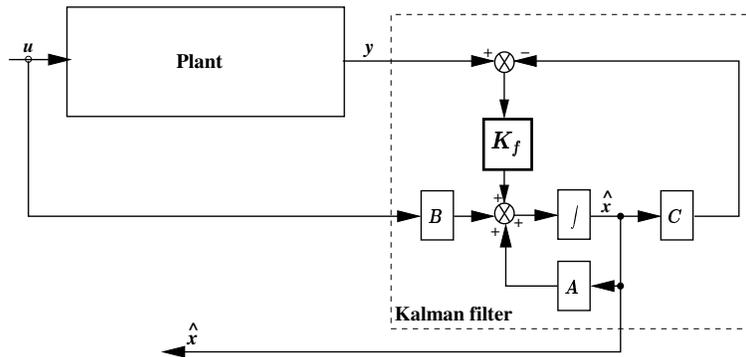


FIG. 3.1 – Schéma fonctionnel du filtre de KALMAN (cas $D = 0$).

3.2 Rappels, définitions et hypothèses

Toute l'information déterministe que l'on peut connaître du système doit être regroupée dans le modèle (soit $\dot{x} = Ax + Bu$ et la matrice M) ; toute l'information aléatoire doit être regroupée dans le **signal aléatoire** $w(t)$.

3.2.1 Hypothèses

Nous supposons que :

- La paire (A, C) est détectable, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de mode instable et inobservable dans le système,
- les signaux $w(t)$ et $v(t)$ sont des **bruits blancs gaussiens centrés**.

Nous faisons maintenant quelques rappels sur les probabilités et les processus stochastiques afin d'expliquer ce qu'est un **bruit blanc gaussien centré** et quel est le critère que l'on cherche à minimiser dans le calcul de K_f .

Les différentes définitions et rappels donnés ci-dessous sont extraits de la référence [8] (chapitre II et annexe A.I).

3.2.2 Caractérisation d'une variable aléatoire scalaire

Soit \mathcal{X} une variable aléatoire scalaire prenant ses valeurs dans \mathbb{R} . La **fonction de répartition** $F(x)$ associe à tout réel x la probabilité de l'événement $\mathcal{X} < x$. On note :

$$F(x) = P[\mathcal{X} < x] .$$

Propriétés :

- $\forall x_1 < x_2 \quad P[x_1 \leq \mathcal{X} < x_2] = F(x_2) - F(x_1)$,
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1 ; \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$.
- $F(x)$ est monotone, non décroissante, et peut être continue ou discontinue selon que \mathcal{X} prenne des valeurs continues ou discrètes.

Si $F(x)$ est dérivable, alors sa dérivée est appelée **densité de probabilité** et notée $p(x)$:

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad \text{soit : } p(x)dx = P[x \leq \mathcal{X} < x + dx] .$$

Pour caractériser et manipuler mathématiquement une variable aléatoire \mathcal{X} , on utilise également les **moments** de cette variable. Le **moment** d'ordre 1 est plus connu sous le nom de **moyenne** ou **espérance mathématique**. Le moment centré d'ordre 2 est appelé **variance** que l'on note $var_x = \sigma_x^2$; σ_x désigne alors l'**écart type**. Soit :

- l'**espérance mathématique** ou **moyenne** :

$$E[\mathcal{X}] = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x) ,$$

- le **moment d'ordre k** :

$$E[\mathcal{X}^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k p(x) dx ,$$

– le moment centré d'ordre k :

$$E[(\mathcal{X} - E[\mathcal{X}])^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E[\mathcal{X}])^k p(x) dx .$$

Les moments d'ordre supérieur ou égal à 3 sont très peu utilisés car ils se prêtent mal au calcul théorique. L'intérêt (mathématique) des variables aléatoires **gaussiennes** est qu'elles sont entièrement caractérisées par leurs moments d'ordre 1 et 2. Soit \mathcal{X} une variable aléatoire gaussienne de moyenne m et d'écart type σ , alors :

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad E[x] = m, \quad E[(x - m)^2] = \sigma^2 .$$

3.2.3 Caractérisation d'une variable aléatoire à plusieurs dimensions

Soit $\mathcal{X} = [\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_q]^T$ une variable aléatoire à q dimensions prenant ses valeurs dans \mathbb{R}^q .

Fonction de répartition

$$F(x_1, \dots, x_q) = P(\mathcal{X}_1 < x_1 \text{ et } \mathcal{X}_2 < x_2 \text{ et } \dots \text{ et } \mathcal{X}_q < x_q) .$$

Densité de probabilité

$$p(x_1, \dots, x_q) = \frac{\partial^q F(x_1, \dots, x_q)}{\partial x_1 \dots \partial x_q} .$$

Moments

On note: $x = [x_1, \dots, x_q]^T$ et on ne s'intéressera qu'au vecteur des moments d'ordre 1 (c'est-à-dire le vecteur moyen) et à la matrice des moments d'ordre 2 centrés (c'est à dire la matrice de covariance).

- Moyenne: $E[\mathcal{X}] = [E[\mathcal{X}_1], \dots, E[\mathcal{X}_q]]^T$.
- Covariance: $\text{Cov}_x = E[(\mathcal{X} - E[\mathcal{X}])(\mathcal{X} - E[\mathcal{X}])^T]$. L'élément $\text{Cov}_x(i, j)$ de la ligne i et colonne j de cette matrice de covariance vérifie :

$$\text{Cov}_x(i, j) = \int_{\mathbb{R}^2} (x_i - E[\mathcal{X}_i])(x_j - E[\mathcal{X}_j]) dF(x_i, x_j) .$$

La matrice de covariance est définie, positive et symétrique.

Vecteur aléatoire gaussien de moyenne m et de covariance Δ

$$p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{q/2} \sqrt{\det \Delta}} e^{-\frac{1}{2}(x-m)^T \Delta^{-1}(x-m)}.$$

Le vecteur aléatoire gaussien de moyenne m et de covariance Δ peut être généré à partir du **vecteur gaussien normalisé** \mathcal{N} (c'est-à-dire de moyenne nulle et de covariance unité) de la façon suivante :

$$\mathcal{X} = m + G\mathcal{N}$$

où G est une matrice vérifiant : $GG^T = \Delta$.

Indépendance

Deux variables aléatoires \mathcal{X}_1 et \mathcal{X}_2 sont indépendantes si et seulement si :

$$F(x_1, x_2) = F(x_1)F(x_2).$$

Une condition nécessaire d'indépendance s'écrit :

$$E[\mathcal{X}_1 \mathcal{X}_2] = E[\mathcal{X}_1]E[\mathcal{X}_2]. \quad (3.3)$$

Dans ce qui suit, on parle de variable (resp. signal) aléatoire qu'il s'agisse d'une variable (resp. signal) scalaire ($q = 1$) ou vectorielle à q composantes.

3.2.4 Signal aléatoire ou processus stochastique

Etant donné une variable aléatoire \mathcal{X} , le **signal aléatoire** ou **processus stochastique** $x(t)$ est un signal fonction du temps t tel que pour tout t fixé, $x(t)$ corresponde à une valeur de la variable aléatoire \mathcal{X} .

3.2.5 Moments d'un signal aléatoire

Le **moment** d'ordre 2 d'un signal aléatoire est appelé la **fonction d'auto-corrélation**.

Soit $w(t)$ un signal aléatoire, alors :

$$\text{moment d'ordre 1 : } m(t) = E[w(t)] \quad (3.4)$$

$$\text{moment d'ordre 2 : } \phi_{ww}(t, \tau) = E[w(t)w(t + \tau)^T]. \quad (3.5)$$

Remarque : si $w(t)$ est un signal vectoriel à q composantes alors $\phi_{ww}(t, \tau)$ est une matrice de taille $q \times q$ définie positive pour chaque valeur de t et de τ . Les termes de

la diagonales sont les fonctions scalaires d'auto-corrélation de chaque composantes et les termes hors-diagonaux sont les fonctions scalaires d'**inter-corrélation** entre composantes.

La moyenne $m(t)$ d'un signal aléatoire, que l'on appelle aussi **biais**, est considérée comme déterministe et doit être, le cas échéant, extraite du signal $w(t)$ pour que celui-ci satisfasse l'hypothèse de signal **centré**. Par exemple si le signal aléatoire $w(t)$ qui perturbe le système linéaire défini par (3.1) est biaisé et si ce biais $E[w(t)]$ est connu alors on appliquera le filtre de KALMAN sur le modèle suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + [B \quad M] \begin{bmatrix} u(t) \\ E[w(t)] \end{bmatrix} + M(w(t) - E[w(t)]) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) + v(t) \end{cases} .$$

Un **signal aléatoire gaussien centré** est donc entièrement défini par sa fonction d'auto-corrélation.

3.2.6 Stationnarité

Un signal aléatoire est dit **stationnaire** à l'ordre 2 si sa moyenne est constante ($m(t) = m$) et si sa fonction d'auto-corrélation ne dépend que de τ ($\phi_{ww}(t, \tau) = \phi_{ww}(\tau)$).

La moyenne quadratique ou variance d'un signal aléatoire centré stationnaire est la valeur de la fonction d'auto-corrélation à l'origine :

$$\sigma_w^2 = \phi_{ww}(\tau)|_{\tau=0}$$

3.2.7 Spectre complexe

On peut également caractériser les signaux aléatoires, s'ils sont **stationnaires**, par leurs réponses fréquentielles ou leurs **spectres complexes** (on passe de l'un à l'autre en remplaçant s par $j\omega$). On parle alors d'**analyse harmonique**. Le spectre complexe d'un signal aléatoire stationnaire est la transformée de LAPLACE bilatérale de sa fonction d'auto-corrélation.

$$\Phi_{ww}(s) = \mathcal{L}_{II}(\phi_{ww}(\tau)) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{ww}(\tau) e^{-\tau s} d\tau . \quad (3.6)$$

Cette représentation fréquentielle des signaux aléatoires est particulièrement utile :

- pour étudier la transmission des signaux aléatoires à travers les **systèmes linéaires stationnaires** : la sortie d'un système linéaire défini par la matrice de transfert $G(s)_{p \times m}$ et attaqué par un signal aléatoire de spectre $\Phi_{ee}(s)_{m \times m}$ est un signal aléatoire de spectre $\Phi_{ss}(s)_{p \times p} = G(-s)\Phi_{ee}(s)G^T(s)$ (voir page 35 de la référence [8]),

- réciproquement, si on connaît le spectre complexe $\Phi_{ww}(s)$ d'un signal aléatoire $w(t)$ centré et coloré qui perturbe un système linéaire défini par (3.1), la décomposition $\Phi_{ww}(s) = G(-s)G^T(s)$ permettra de déterminer une **représentation Markovienne** du signal aléatoire $w(t)$ c'est-à-dire une représentation d'état de $G(s)$:

$$\begin{cases} \dot{x}_G(t) = A_G x_G(t) + B_G p(t) \\ w(t) = C_G x_G(t) \end{cases}$$

où $p(t)$ est maintenant un signal aléatoire de spectre complexe unitaire $\Phi_{pp}(s) = I_{q \times q}$ (c'est-à-dire un bruit blanc normalisé; voir section suivante).
Le modèle augmenté :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_G(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & MC_G \\ 0 & A_G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_G(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ B_G \end{bmatrix} p(t) \\ y(t) = [C \quad 0] \begin{bmatrix} x(t) \\ x_G(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

satisfait maintenant les hypothèses du modèle de KALMAN.

3.2.8 Bruit blanc

Enfin, un **bruit blanc** est un signal aléatoire stationnaire de puissance infinie dont la fonction d'auto-corrélation est proportionnelle à un dirac (c'est-à-dire un spectre complexe constant sur toute la plage des fréquences). Cela traduit que les valeurs du signal pris à deux instants, même très proches, ne sont pas du tout corrélées.

Les bruits blancs gaussiens centrés $w(t)$ et $v(t)$ que nous allons utiliser dans le cadre du filtre de KALMAN sont donc entièrement définis par leur **densités spectrales** respectives $W(t)$ et $V(t)$:

$$E[w(t)w(t+\tau)^T] = W(t)\delta(\tau), \quad E[v(t)v(t+\tau)^T] = V(t)\delta(\tau) \quad (3.7)$$

Bien que toute la théorie de KALMAN soit valable dans le cas non-stationnaire, nous supposons de plus que les bruits blancs gaussiens centrés $w(t)$ et $v(t)$ sont de plus stationnaires et indépendants :

$$E[w(t)w(t+\tau)^T] = W\delta(\tau), \quad (3.8)$$

$$E[v(t)v(t+\tau)^T] = V\delta(\tau), \quad (3.9)$$

$$E[v(t)w(t+\tau)^T] = 0. \quad (3.10)$$

Remarque : Le bruit blanc gaussien normalisé est tel que $W(t) = I_{q \times q}$ (q : nombre de composantes dans le bruit).

3.3 Calcul du gain du filtre de Kalman

Du fait que les signaux d'entrée w et v du système 3.1 soient gaussiens et du fait que le système soit linéaire, on peut affirmer que tous les signaux qui "circulent" dans le schéma 3.1 sont des variables aléatoires gaussiennes. Nous allons maintenant calculer le gain de KALMAN K_f afin de minimiser **la variance de l'erreur d'estimation** $\varepsilon_x = x - \hat{x}$ **de l'état du système en régime permanent** (c'est-à-dire lorsque ce signal aléatoire est devenu stationnaire et que l'effet de conditions initiales a disparu).

Remarque: si x est un vecteur de longueur n (l'ordre du système) alors on note :

$$P_f = E[\varepsilon_x \varepsilon_x^T]$$

la matrice $n \times n$ de **covariance de l'erreur d'estimation**. Le critère mathématique que l'on cherche à minimiser s'écrit en fait :

$$\min_{K_f} J_G \quad \text{avec} \quad J_G = \text{trace}(P_f) = E[\varepsilon_x^T \varepsilon_x].$$

En pratique on ne s'intéressera pas au critère J_G mais à la matrice P_f et on cherchera, de façon tout à fait analogue au calcul du retour d'état LQ optimal (chapitre 2), le gain optimal K_f tel que toutes variations Δ_{K_f} autour de K_f entraînent une variation Δ_{P_f} de P_f qui soit positive (positive au sens des matrices, voir définition 1.5).

A partir des équations 3.1 et 3.2, on déduit l'équation d'évolution de l'erreur d'estimation :

$$\dot{\varepsilon}_x = A\varepsilon_x + Mw - K_f(C\varepsilon_x + v) \quad (3.11)$$

$$= (A - K_f C)\varepsilon_x + [M \quad -K_f] \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Le vecteur d'entrée augmenté $[w^T \quad v^T]^T$ est un bruit blanc gaussien centré de densité spectrale :

$$\begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix}$$

car w et v sont indépendants.

Le théorème suivant va permettre de caractériser le signal $\varepsilon_x(t)$.

Théorème 3.1 (Passage d'un bruit blanc dans un système linéaire) *Soit le système linéaire :*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bw(t). \quad (3.13)$$

$w(t)$ est un bruit blanc gaussien centré de densité spectrale Q . On note $m(t_0)$ et $P(t_0)$ la moyenne et la covariance de l'état initial $x(t_0)$ (lui aussi aléatoire). Alors $x(t)$ est un signal aléatoire gaussien :

- de moyenne :

$$m(t) = E[x(t)] = e^{A(t-t_0)}m(t_0)$$

– de covariance $P(t) = E[(x(t)-m(t))(x(t)-m(t))^T]$ vérifiant l'équation différentielle :

$$\dot{P}(t) = AP(t) + P(t)A^T + BQB^T . \quad (3.14)$$

En régime permanent¹ : $\dot{P} = 0$ et $P(t) = P$ vérifie alors l'équation de LYAPUNOV continue :

$$AP + PA^T + BQB^T = 0 . \quad (3.15)$$

Démonstration : (voir annexe A).

L'application directe de ce théorème à l'équation 3.12 permet de calculer :

– La moyenne de l'erreur d'estimation :

$$m(t) = E[\varepsilon_x(t)] = e^{(A-K_fC)(t-t_0)}\varepsilon_x(t_0) .$$

Si le filtre est stable (si les valeurs propres de $A - K_fC$ sont à partie réelle négative) alors, après un régime transitoire au cours duquel l'erreur d'estimation initiale $\varepsilon_x(t_0)$ est **recalée**, la moyenne de l'erreur d'estimation en régime permanent s'annule. On dit que l'estimateur est **non-biaisé**.

– La covariance de l'erreur d'estimation P_f : la matrice de covariance P_f recherchée vérifie en régime permanent :

$$(A - K_fC)P_f + P_f(A - K_fC)^T + [M \quad -K_f] \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M^T \\ -K_f^T \end{bmatrix} = 0$$

$$(A - K_fC)P_f + P_f(A - K_fC)^T + MWM^T + K_fVK_f^T = 0 . \quad (3.16)$$

Cette équation est l'équation duale de l'équation 2.10 dans laquelle nous avons noté $Q_x = N^TQN$. Les correspondances **dual/primal**, résumées dans le tableau 3.1, vont donc nous permettre d'exprimer directement les conditions d'optimalité du gain K_f à partir de celles obtenues pour le gain K_c de la commande LQ :

$$\boxed{K_f = P_fC^TV^{-1}} \quad \text{avec } P_f \text{ solution positive de :} \quad (3.17)$$

$$\boxed{P_fA^T + AP_f - P_fC^TV^{-1}CP_f + MWM^T = 0} . \quad (3.18)$$

La **dualité estimation commande** va également permettre de transposer au filtre de KALMAN toutes les propriétés établies pour la commande LQ dans le chapitre 2 :

– propriété de robustesse : le lieu de NYQUIST du transfert de boucle ouverte du filtre $L_f(s) = C(sI - A)^{-1}K_f$ reste à l'extérieur du cercle de rayon 1 centré sur le point critique (cas mono-sortie),

¹. On ne parle de régime permanent que si la matrice A est stable (toutes les valeurs propres de A sont à parties réelles négatives).

primal	dual
A	A^T
B	C^T
C	B^T
N	M^T
Q	W
R	V
$Q_x = N^T Q N$	$W_x = M W M^T$
P_c	P_f
$K_c = R^{-1} B^T P_c$	$K_f^T = V^{-1} C P_f$
$G_{zu}(s) = N(sI - A)^{-1} B$	$G_{yw}^T(s) = M^T (sI - A^T)^{-1} C^T$
$L_c(s) = K_c (sI - A)^{-1} B$	$L_f^T(s) = K_f^T (sI - A^T)^{-1} C^T$

TAB. 3.1 – *Système primal/ système dual*

- propriétés asymptotiques: la dynamique de $(A - K_f C)$ est toujours stable. Si le bruit d'état est nul ($W = 0$) et si le système est stable alors $K_f = 0$ et $P_f = 0$ (l'estimé est parfaite en régime permanent). Si le bruit d'état est nul ($W = 0$) et si le système est instable alors les valeurs propres de $(A - K_f C)$ seront constituées des valeurs propres stables de A et des images stables des valeurs instables,
- règles de construction du root square locus associé au filtre de KALMAN: ...
- ...

3.4 Exercices

3.4.1 Système du second ordre :

Une masse m se déplace le long d'un axe Ox sous l'effet d'une commande en force $u(t)$. Une force perturbatrice $w(t)$ agit également sur cette masse. $w(t)$ est modélisé comme un bruit blanc gaussien centré de densité spectrale W . On mesure la position $x(t)$ de cette masse. On note $x_m(t)$ cette mesure. La mesure $x_m(t)$ est entachée d'un bruit blanc gaussien centré $v(t)$ de densité spectrale V .

A.N.: $m = 1$ (Kg); $W = 1$ (N^2); $V = \rho^2$ (m^2).

A partir de la mesure x_m et de la commande u , on désire construire un filtre de KALMAN permettant d'estimer la position $x(t)$ et la vitesse $\dot{x}(t)$ de cette masse. On note $\hat{x}(t)$ et $\hat{\dot{x}}(t)$ ces estimés.

- 1) Donnez les équations d'état du modèle de KALMAN.
- 2) Calculez le gain de KALMAN en régime permanent (en fonction de ρ).

3) Calculez la matrice de transfert $F(s)$ du filtre :

$$\begin{bmatrix} \widehat{X}(s) \\ \widehat{\dot{X}}(s) \end{bmatrix} = F(s) \begin{bmatrix} X_m(s) \\ U(s) \end{bmatrix}$$

4) Commentez ce transfert (réponses des différentes composantes, évolution en fonction de ρ).

3.4.2 Estimation d'un biais :

Un mobile se déplace le long d'un axe Ox . On mesure la vitesse \dot{x} et la position x de ce mobile et on note v_m et x_m ces mesures.

La mesure x_m est entachée d'un bruit blanc gaussien centré $v(t)$ de densité spectrale unitaire $V = 1 (m^2)$: $x_m(t) = x(t) + v(t)$.

La mesure v_m est biaisée par un signal $b(t)$ modélisé comme un échelon d'amplitude b_0 inconnue : $v_m(t) = \dot{x}(t) + b(t)$.

A partir des 2 mesures v_m et x_m , on désire construire un filtre de KALMAN permettant d'estimer la position $x(t)$ et le biais $b(t)$.

- 1) Donnez les équations d'état du modèle de KALMAN avec x et b comme variable d'état, v_m comme variable d'entrée, x_m comme variable de sortie.
- 2) Interpréter ce résultat à l'aide d'un schéma fonctionnel.

En fait le biais $b(t)$ est susceptible de dériver avec le temps. Pour tenir compte de ces variations éventuelles, on suppose que la dérivée du biais est polluée par un bruit blanc $w(t)$ de densité spectrale $W = q^2$ indépendant de $v(t)$:

$$\dot{b}(t) = w(t) .$$

- 3) Donnez les nouvelles équations du modèle de KALMAN, calculez le gain de KALMAN en régime permanent (en fonction de q) et donner la représentation d'état du filtre permettant de calculer les estimés \widehat{x} et \widehat{b} à partir de x_m et de v_m .
- 4) Comment procéderiez vous pour estimer la vitesse du mobile $\widehat{\dot{x}}$?
- 5) Calculer la matrice de transfert $F(s)$ du filtre :

$$\begin{bmatrix} \widehat{X}(s) \\ \widehat{\dot{X}}(s) \end{bmatrix} = F(s) \begin{bmatrix} X_m(s) \\ V_m(s) \end{bmatrix} .$$

- 6) Commentez ce transfert (notamment $\widehat{X}(s)/V_m(s)$) en fonction q . Montrer que ce filtre $F(s)$ donne toujours des estimés parfaites si les mesures sont parfaites.

PAGE SANS TEXTE

Chapitre 4

La commande LQG

4.1 Principe général de la commande LQG

Considérons le système linéaire d'ordre n suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Mw \\ y = Cx + Du + v \\ z = Nx \end{cases} \quad (4.1)$$

où w et v représentent des bruits blancs, de moyenne nulle, indépendants, avec respectivement pour matrice de covariance W et V .

$$\begin{aligned} E [w(t)w(t + \tau)^T] &= W\delta(\tau) & E [v(t)v(t + \tau)^T] &= V\delta(\tau) & E [w(t)v(t + \tau)^T] &= 0. \\ &\text{avec } W \geq 0 & \text{et } V > 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

On note aussi $W_x = MWM^T$ la matrice de covariance du bruit d'état.

A partir du vecteur y de mesures bruitées (retour de sortie), nous recherchons une loi de commande qui minimise le critère

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\int_0^T (z^T Q z + u^T R u) dt \right] \quad (4.3)$$

où $z = Nx$ désigne le vecteur à réguler et Q et R deux matrices de pondération avec, comme précédemment,

$$Q = Q^T \geq 0 \quad \text{et} \quad R = R^T > 0.$$

La solution de ce problème s'appuie sur le **principe de séparation** qui établit que la commande optimale est obtenue

- a) en recherchant l'estimé optimal \hat{x} (au sens de la variance d'erreur minimale) de l'état x par la méthode du Filtre de KALMAN, c'est-à-dire on estime l'état

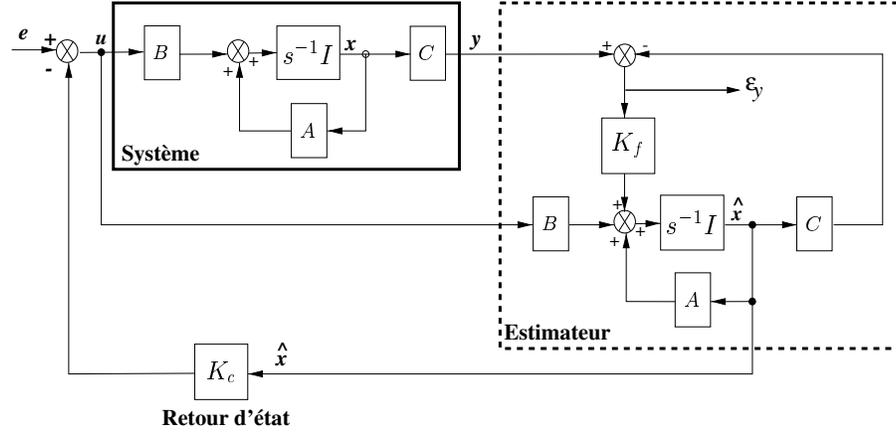


FIG. 4.1 – La structure du correcteur LQG (la transmission directe D n'est pas représentée pour des raisons de clarté).

x par l'équation classique du filtre de KALMAN à condition que le triplet $(A, MW^{1/2}, C)$ soit détectable et stabilisable.

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K_f(y - C\hat{x} - Du)$$

avec $K_f = P_f C^T V^{-1}$ où P_f obéit à l'équation de RICCATI suivante :

$$P_f A^T + A P_f - P_f C^T V^{-1} C P_f + M W M^T = 0 \quad (4.4)$$

avec $P_f = P_f^T > 0$.

- b) en employant cet estimé comme s'il était la mesure exacte du vecteur d'état, pour résoudre le problème de commande optimale linéaire déterministe (méthode LQ) ; soit (si $(A, B, Q^{1/2}N)$ est détectable et stabilisable) :

$$u = -K_c \hat{x}$$

avec

$$\begin{cases} K_c = R^{-1} B^T P_c \\ P_c A + A^T P_c - P_c B R^{-1} B^T P_c + N^T Q N = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

La figure 4.1 représente la structure du correcteur LQG dans le boucle de régulation.

La représentation d'état du correcteur LQG s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK_c - K_f C + K_f D K_c & K_f \\ -K_c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ y \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

4.2 Propriétés

On peut montrer que la représentation d'état du transfert en boucle fermée entre e et ε_y (voir figure 4.1) s'écrit

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\varepsilon}_x \\ \varepsilon_y \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} A - BK_c & BK_c & B \\ 0 & A - K_f C & 0 \\ 0 & C & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x \\ \varepsilon_x \\ e \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

ou $\varepsilon_x = x - \hat{x}$ désigne l'erreur d'estimation de l'état.

A partir de cette représentation, le **principe de séparation** apparaît clairement et peut être formulé de la façon suivante :

- les valeurs propres de la boucle fermée peuvent être séparées selon les n valeurs propres du retour d'état ($\text{spec}(A - BK_c)$) et les n valeurs propres du filtre d'estimation ($\text{spec}(A - K_f C)$),
- les n valeurs propres du filtre d'estimation sont ingouvernables par e ,
- les n valeurs propres du retour d'état sont inobservables par ε_y .

Le transfert de e vers ε_y est donc toujours nul.

4.3 Synthèse LQG/LTR (Loop Transfer Recovery)

L'objectif de la procédure de réglage LTR est de restaurer les marges de stabilité "idéale" du retour d'état de la commande LQ (ou dualement du filtre de KALMAN).

4.3.1 Hypothèses d'application

Le système strictement propre défini par la représentation (A , B , C et D) vérifie :

- $D = 0$ (strictement propre),
- $C(sI - A)^{-1}B$ à minimum de phase (pas de zéros instables),
- nombre égal d'entrées et de sorties.

4.3.2 Recouvrement en entrée

La procédure de synthèse LQG/LTR consiste à :

a) Synthétiser, dans une première étape, le correcteur LQ par un choix approprié des pondérations Q_x et R obéissant aux exigences du cahier des charges. Les aspects de cette première synthèse concernent le comportement basse fréquence

des valeurs singulières du transfert $-K_c(sI - A)^{-1}B$, les fréquences de coupures correspondantes, l'affaiblissement haute fréquence, etc ...

b) Dans une seconde étape, à partir d'un réglage nominal W_{x_0} et V_0 du filtre de KALMAN, on augmentera le paramètre q du nouveau réglage :

$$W_x = W_{x_0} + qBB^T, \quad V = V_0$$

jusqu'à ce que le transfert de boucle $K(s)G(s)$ du correcteur LQG recouvre, sur une bande de fréquence suffisamment large, le transfert de boucle de retour d'état LQ :

$$\lim_{q \rightarrow \infty} K(s)G(s) = -K_c(sI - A)^{-1}B .$$

4.3.3 Recouvrement en sortie

a) Synthétiser le filtre de KALMAN en manipulant les covariances W_x et V afin que le transfert $-C(sI - A)^{-1}K_f$ soit satisfaisant à la sortie du système.

b) Dans une seconde étape, à partir d'un réglage nominal Q_{x_0} et R_0 du retour d'état LQ, on augmentera le paramètre q du nouveau réglage :

$$Q_x = Q_{x_0} + qC^TC, \quad R = R_0$$

jusqu'à ce que le transfert de boucle $G(s)K(s)$ du correcteur LQG recouvre, sur une bande de fréquence suffisamment large, le transfert de boucle du filtre de KALMAN :

$$\lim_{q \rightarrow \infty} G(s)K(s) = -C(sI - A)^{-1}K_f .$$

La figure 4.3 visualise l'effet du paramètre q (noté α sur la figure) sur le lieu de black du gain de boucle $K(s)G(s)$ (recouvrement en entrée).

4.4 Synthèse LQG discrète

On considère le système linéaire discret :

$$\begin{cases} x_{n+1} = A_d x_n + B_d u_n + M_d w_n \\ y_n = C_d x_n + D u_n + v_n \\ z_n = N_d x_n \end{cases} \quad (4.8)$$

où les bruits w_n et v_n sont des processus stationnaires de moyenne nulle, pseudo-blancs et de matrice de covariance $W_d \geq 0$ et $V_d > 0$:

$$E[w_k w_l^T] = W_d \delta_{k-l}, \quad E[v_k v_l^T] = V_d \delta_{k-l}, \quad E[w_k v_l^T] = 0 . \quad (4.9)$$

Nous cherchons une loi de commande par retour de sortie qui minimise le critère :

$$J = \lim_{N \rightarrow \infty} E \left[\sum_{n=1}^N z_n^T Q_d z_n + \sum_{n=0}^{N-1} u_n^T R_d u_n \right] \quad Q_d \geq 0 \quad \text{et} \quad R_d > 0, \quad (4.10)$$

donc un problème de régulation à horizon libre (comme dans le cas continu). La solution s'appuie également sur le **principe de séparation**, c'est-à-dire un filtre de KALMAN et un retour d'état estimé ou prédit.

4.4.1 Filtre de Kalman discret (régime permanent)

En discret, on distingue :

- l'état estimé $\hat{x}_{n/n}$ à l'instant n compte tenu de la mesure y_n et la variance de l'erreur d'estimation associée :

$$P_e = E[(\hat{x}_{n/n} - x_n)(\hat{x}_{n/n} - x_n)^T] \quad \text{matrice symétrique } n \times n,$$

- l'état prédit $\hat{x}_{n/n-1}$ à l'instant n juste avant la mesure y_n et la variance de l'erreur de prédiction associée :

$$P_f = E[(\hat{x}_{n/n-1} - x_n)(\hat{x}_{n/n-1} - x_n)^T] \quad \text{matrice symétrique } n \times n,$$

Les équations du filtre de KALMAN en **régime permanent** s'écrivent alors :

$$\hat{x}_{n+1/n} = A_d \hat{x}_{n/n-1} + B_d u_n + K_f (y_n - C_d \hat{x}_{n/n-1} - D u_n) \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_{n/n} &= \hat{x}_{n/n-1} + K_e (y_n - C_d \hat{x}_{n/n-1} - D u_n) \quad \text{soit encore :} \\ \hat{x}_{n/n} &= (I - K_e C_d) \hat{x}_{n/n-1} - K_e D u_n + K_e y_n \end{aligned} \quad (4.12)$$

avec :

$$K_f = A_d K_e \quad \text{gain de prédiction,} \quad (4.13)$$

$$K_e = P_f C_d^T (C_d P_f C_d^T + V_d)^{-1} \quad \text{gain d'estimation,} \quad (4.14)$$

avec P_f solution positive de l'équation de RICCATI discrète :

$$P_f = A_d P_f A_d^T - A_d P_f C_d^T (C_d P_f C_d^T + V_d)^{-1} C_d P_f A_d^T + M_d W_d M_d^T \quad (4.15)$$

On a alors :

$$P_e = (I - K_e C_d) P_f \quad (4.16)$$

Remarque : en présence de bruits corrélés entre l'équation d'état et de mesure :

$$E[w_k v_l^T] = T_d \delta_{k-l}$$

les équations 4.11, 4.12, 4.14 et 4.16 sont inchangés et les équations 4.13 et 4.15 deviennent respectivement :

$$\begin{aligned} K_f &= A_d K_e + K_{pc} \quad \text{avec} \quad K_{pc} = T_d (C_d P_f C_d^T + V_d)^{-1} \quad \text{gain de "prédi-correction"}, \\ P_f &= F P_f F^T - F P_f C_d^T (C_d P_f C_d^T + V_d)^{-1} C_d P_f F^T + M_d W_d M_d^T - T_d V_d^{-1} T_d^T \quad \text{avec} \quad F = A_d - T_d V_d^{-1} C_d. \end{aligned}$$

4.4.2 Retour d'état optimal en discret

Le gain de retour d'état s'écrit :

$$\begin{cases} K_c = (R_d + B_d^T P_c B_d)^{-1} B_d^T P_c A_d \\ \text{avec } P_c = A_d^T P_c A_d - A_d^T P_c B_d (R_d + B_d^T P_c B_d)^{-1} B_d^T P_c A_d + N_d^T Q_d N_d \end{cases} \quad (4.17)$$

On retrouve une dualité parfaite entre ces équations et les équations de prédictions 4.13 à 4.15. Par rapport au cas continu, on peut distinguer deux formes d'implantation du correcteur LQG discret : la forme prédicteur et la forme estimateur.

4.4.3 Forme "prédicteur"

On retourne les états prédits dans le gain K_c :

$$u_n = -K_c \hat{x}_{n/n-1},$$

c'est-à-dire que pour calculer et appliquer la commande à l'instant n on ne connaît pas y_n . La représentation d'état du correcteur s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{n+1/n} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_d - B_d K_c - K_f C_d + K_f D K_c & K_f \\ -K_c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{n/n-1} \\ y_n \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

Cette représentation est analogue à celle obtenue dans le cas continu.

4.4.4 Forme "estimateur"

Cette forme est plus usuelle. On retourne les états estimés :

$$u_n = -K_c \hat{x}_{n/n},$$

c'est-à-dire que l'on connaît y_n au moment de calculer et d'appliquer la commande u_n . En l'absence de transmission directe D (qui alourdit considérablement les notations), la représentation d'état du correcteur s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{n+1/n} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A_d - B_d K_c)(I - K_e C_d) & (A_d - B_d K_c) K_e \\ -K_c(I - K_e C_d) & -K_c K_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{n/n-1} \\ y_n \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

Par rapport à la forme précédente, on constate que ce correcteur présente une transmission directe entre y_n et u_n . Mais dans les deux cas, le principe de séparation est vérifié : les $2n$ valeurs propres de la boucle fermée sont :

- les n valeurs propres du retour d'état ($\text{spec}(A_d - B_d K_c)$) qui sont inobservables par l'innovation $\varepsilon_y = y_n - (C_d \hat{x}_{n/n-1} + D u_n)$.

- les n valeurs propres du filtre d'estimation ($\text{spec}(A_d - K_f C_d) = \text{spec} A_d (I - K_e C_d)$) qui sont ingouvernables par e_n (le signal de consigne sur u_n),

Les deux correcteurs 4.18 et 4.19, bien qu'ils soient différents, donnent les $2n$ mêmes valeurs propres en boucle fermée. Ceci est illustré par l'exercice 4.5.3. Enfin, dans les deux formes, l'état du correcteur correspond à l'état prédit et non estimé.

Remarque : En régime permanent, on peut donc implanter le correcteur LQG discret par sa représentation d'état. Dans le cas non stationnaire ou en réponse transitoire à la condition initiale :

$$\hat{x}_{0/0} \quad \text{et} \quad P_{\epsilon 0}, \quad (4.20)$$

les équations d'implantation de la commande sont celles du filtre de KALMAN discret non stationnaire :

$$\begin{cases} \hat{x}_{n+1/n} & = A_d \hat{x}_{n/n} + B_d u_n & \text{Prédiction} \\ \hat{x}_{n+1/n+1} & = \hat{x}_{n+1/n} + K_{en+1} (y_{n+1} - C_d \hat{x}_{n+1/n} - D u_{n+1}) & \text{Correction} \\ u_{n+1} & = -K_{cn+1} \hat{x}_{n+1/n+1} \quad (\text{ou} \quad -K_{cn+1} \hat{x}_{n+1/n}) & \text{Commande} . \end{cases} \quad (4.21)$$

avec les équations de propagation des covariances et du gain qui sont indépendantes de y_n et peuvent donc être intégrées hors ligne :

$$\begin{cases} K_{en} & = P_{fn} C_d^T (C_d P_{fn} C_d^T + V_d)^{-1} \\ P_{fn+1} & = A_d P_{en} A_d^T + M_d W_d M_d^T \\ P_{en} & = (I - K_{en} C_d) P_{fn} . \end{cases} \quad (4.22)$$

4.4.5 Cas particulier : commande LQG discrète pour systèmes continus

En pratique, même pour les systèmes continus, on implante la loi de commande sur un ordinateur numérique. Les mesures sont donc échantillonnées à la cadence dt (on note $y(n) = y(n dt)$), le calculateur élabore un ordre de commande ($u(n) = u(n dt)$) qui est bloqué sur une période d'échantillonnage (bloqueur d'ordre 0) selon le schéma de la figure 4.2. On peut donc chercher la représentation d'état discrète du système continu échantillonné bloqué pour appliquer la commande LQ discrète présentée dans la section précédente mais il est légitime de spécifier le critère LQ (ou LQG) sur le système continu. Il faut donc dans ce cas là discrétiser le critère LQ. De façon tout à fait duale, il est également légitime de spécifier les bruits d'état et de mesure sur le modèle continu, il faut donc également discrétiser ces bruits. Les résultats sur la discrétisation du critère LQ et des bruits d'états/mesures sont présentés dans les paragraphes suivants mais il faut savoir que ce cas particulier est si courant, qu'il existe des macro-fonctions Matlab qui permettent de calculer

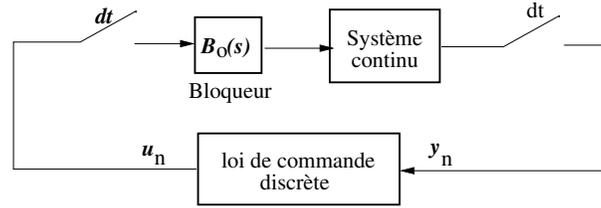


FIG. 4.2 – *Système échantillonné-bloqué / correcteur discret.*

tous les paramètres de la commande LQG discrète directement à partir des données continues ($A, B, C, D, Q_x, R, W_x, V$) (voir les macros : `lqrd`, `lqed`, `kalmd`).

On considère donc un système continu linéaire défini par la représentation d'état (4.1), c'est-à-dire par les matrices A, B, C et D ; les bruits d'état et de mesure sont définis par (4.2), c'est-à-dire les matrices $W_x = MWM^T$ et V . Le critère continu est défini par (4.3), c'est-à-dire par les matrices $Q_x = N^TQN$ et R (et S si l'on tient compte des termes croisés état/commande ; voir équation (2.21)) .

Discrétisation du modèle (voir fonction Matlab `c2d`)

En tenant compte des bloqueurs d'ordre 0 sur les entrées u et en notant $x_n = x(n dt)$ ($u_n = u(n dt)$, $y_n = y(n dt)$), l'intégration de l'équation d'état sur une période d'échantillonnage donne (voir [8]) :

$$x_{n+1} = e^{A dt} x_n + \left(\int_0^{dt} e^{Av} B dv \right) u_n + \int_0^{dt} e^{Av} M w((n+1)dt - v) dv .$$

L'équation de sortie aux instants d'échantillonnage s'écrit :

$$y_n = C x_n + D u_n + v_n$$

L'équation d'état discrète est donc bien de la forme (4.8) avec :

$$\boxed{A_d = e^{A dt}, \quad B_d = \int_0^{dt} e^{Av} B dv, \quad M_d = I_n, \quad C_d = C,} \quad (4.23)$$

Discrétisation des bruits (voir fonction Matlab `lqed`)

Les bruits d'états et de mesure discrets s'écrivent :

$$w_n = \int_0^{dt} e^{Av} M w((n+1)dt - v) dv, \quad v_n = v(ndt) ,$$

il faut les caractériser par leur matrices de covariances respectives.

Du fait de l'échantillonnage, la matrice de covariance du bruit de mesure devient :

$$\boxed{V_d = V/dt} . \quad (4.24)$$

Calculons maintenant la matrice de covariance W_d du bruit d'état bruit d'état $w(n)$:

$$\begin{aligned} W_d &= E[w_n w_n^T] = E \left[\int_0^{dt} e^{Av} M w((n+1)dt - v) dv \int_0^{dt} w^T((n+1)dt - \tau) M^T e^{A^T \tau} d\tau \right] \\ &= \int \int_0^{dt} e^{Av} M E[w((n+1)dt - v) w^T((n+1)dt - \tau)] M^T e^{A^T \tau} dv d\tau \\ &= \int \int_0^{dt} e^{Av} M W \delta(\tau - v) M^T e^{A^T \tau} dv d\tau \end{aligned}$$

$$\boxed{W_d = \int_0^{dt} e^{Av} M W M^T e^{A^T v} dv} . \quad (4.25)$$

Discrétisation du critère (voir fonction Matlab lqrd)

Le développement du critère LQ entraîne :

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty x^T Q_x x + 2x^T S u + u^T R u dt = \int_0^\infty [x^T \quad u^T] \begin{bmatrix} Q_x & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} dt \\ &= \sum_{n=0}^\infty \int_{n dt}^{(n+1)dt} [x(t)^T \quad u(t)^T] \begin{bmatrix} Q_x & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} dt . \end{aligned} \quad (4.26)$$

Soit $t = n dt + \tau$ alors $\forall \tau \in [0, dt[$:

$$x(n dt + \tau) = e^{A\tau} x_n + \left(\int_0^\tau e^{Au} B du \right) u_n, \quad u(n dt + \tau) = u_n .$$

On note $\Phi(\tau) = e^{A\tau}$ et $\Gamma(\tau) = \int_0^\tau e^{Au} B du$, on a alors :

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi(\tau) & \Gamma(\tau) \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ u_n \end{bmatrix} .$$

Le critère J peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned} J &= \sum_{n=0}^\infty [x_n^T \quad u_n^T] \left(\int_0^{dt} \begin{bmatrix} \Phi^T(\tau) & 0 \\ \Gamma^T(\tau) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_x & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi(\tau) & \Gamma(\tau) \\ 0 & I \end{bmatrix} d\tau \right) \begin{bmatrix} x_n \\ u_n \end{bmatrix} \\ &= \sum_{n=0}^\infty x_n^T Q_{x_d} x_n + 2x_n^T S_d u_n + u_n^T R u_n , \end{aligned}$$

avec :

$$\boxed{\begin{bmatrix} Q_{x_d} & S_d \\ S_d^T & R_d \end{bmatrix} = \int_0^{dt} \begin{bmatrix} \Phi^T(\tau) & 0 \\ \Gamma^T(\tau) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_x & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi(\tau) & \Gamma(\tau) \\ 0 & I \end{bmatrix} d\tau} . \quad (4.27)$$

Nous ne détaillerons pas davantage les calculs, des algorithmes numériques (voir "Computing integrals involving the matrix exponential" de C.F. VAN LOAN, IEEE, *Transaction on Automatic Control*, AC-23(3), pp395-404, 1978) permettent de calculer très facilement les exponentielles de matrices et leurs intégrales dans les formules (4.23), (4.25) et (4.27). Ces algorithmes sont implantés dans la fonction Matlab `lqrd` (taper `type lqrd` dans une fenêtre de commande Matlab pour plus de détails).

4.5 Exercices

4.5.1 Système du premier ordre

On considère le système du premier ordre :

$$\frac{Y}{U}(s) = G(s) = \frac{s}{1-s} \quad (4.28)$$

- donner une représentation d'état (A, B, C, D) du système et calculer le retour d'état K_c solution du problème LQ à énergie minimale,
- calculer le gain de Kalman K_f en fonction de ρ : la variance du bruit d'état ($E[w(t)w(t)^T] = \rho\delta(t)$); le variance du bruit de mesure étant unitaire ($E[v(t)v(t)^T] = 1$).
- calculer la fonction de transfert du correcteur en fonction de ρ . Quelle est la particularité de ce correcteur? Que devient la fonction de transfert du correcteur lorsque ρ tends vers l'infini?. On notera K_{LTR} ce correcteur.
- tracer les lieux de NYQUIST de $K_c(sI - A)^{-1}B$ et $K_{LTR}G(s)$. Conclusions sur les propriétés de recouvrement?.

4.5.2 Système du second ordre

On reprend ici l'exercice sur la commande LQ (voir section 2.4.1) que l'on complète par la prise en compte de l'équation de mesure et des bruits sur le système ; soit :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(t) \quad (4.29)$$

$$y(t) = [1 \quad 0] x(t) + v(t) \quad (4.30)$$

$$z(t) = [1 \quad -1] x(t) \quad (4.31)$$

où $w(t)$ et $v(t)$ désignent deux bruits blancs indépendants, de moyenne nulle et de variance

$$E [ww^T] = \alpha^2, \quad E [vv^T] = 1 .$$

- synthétiser le régulateur minimisant le critère :

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\int_0^T [z^2(t) + r^2 u^2(t) dt] \right] \quad (4.32)$$

- faire le schéma fonctionnel de la boucle fermée (système + régulateur),
- démontrer la propriété LTR :

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} K(s)G(s) = -K_c(sI - A)^{-1}B. \quad (4.33)$$

- sous Matlab, vérifier cette propriété sur le lieu de Black (dans le cas $r = 1/2$).

4.5.3 LQG discret

On considère le modèle discret suivant (il s'agit d'un intégrateur) :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + u_n + w_n \\ y_n = x_n + v_n \end{cases}$$

où w_n et v_n sont des bruits d'état et de mesure normalisés (centrés, indépendants et de variance unitaire). On souhaite calculer la commande LQG qui minimise le critère :

$$J = \lim_{N \rightarrow \infty} E \left[\sum_{n=1}^N x_n^2 + \sum_{n=0}^{N-1} u_n^2 \right]$$

Calculer les formes “prédicteur” et “estimateur” correspondantes à ce problème. Tracer et commenter les diagrammes de BODE des deux correcteurs.

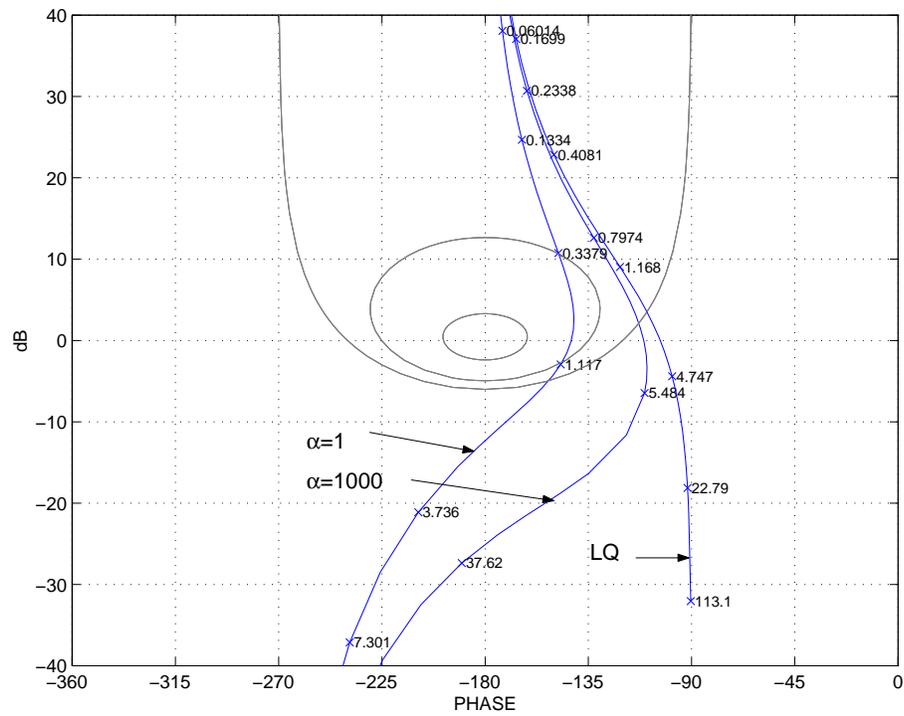


FIG. 4.3 – Lieux de Black relatifs aux exercices des sections 2.4.1 et 4.5.2.

Chapitre 5

Réalisation d'un correcteur sous forme estimation/commande

5.1 Principe général

La paramétrisation de YOULA sur la structure LQG consiste à exploiter le principe de séparation énoncé page 41 : le transfert entre la consigne e et l'innovation ε_y étant nul, on peut reboucler ce transfert sur n'importe quel paramètre $Q(s)$ stable (dit paramètre de YOULA) selon la figure 5.1 sans que cela ne perturbe ce transfert. Cette technique permet de paramétriser (avec trois paramètres: K_c , K_f et $Q(s)$) l'ensemble des correcteurs stabilisant le système.

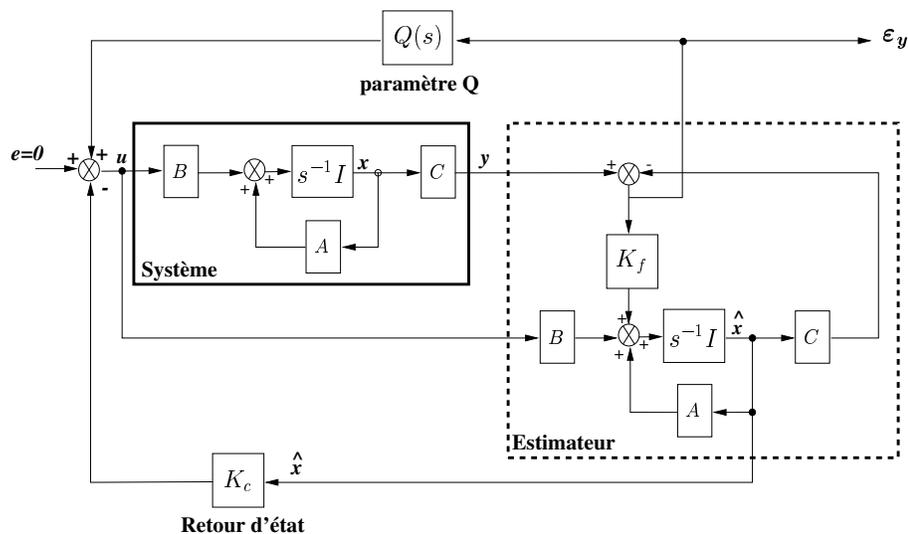


FIG. 5.1 – La paramétrisation de YOULA sur la structure LQG.

5.2 Calcul des paramètres

Considérons maintenant un système d'ordre n que nous supposons sans perte de généralité strictement propre :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx \end{cases}, \quad (5.1)$$

et un correcteur d'ordre n :

$$\begin{cases} \dot{x}_K = A_K x_K + B_K y \\ u = C_K x_K + D_K y \end{cases}. \quad (5.2)$$

Problème : trouver les 3 paramètres K_c , K_f et Q (statique car le système et le correcteur ont le même ordre) tels que le correcteur LQG équivalent défini par les équations :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K_f(y - C\hat{x}) \\ u = -K_c\hat{x} + Q(y - C\hat{x}) \end{cases} \quad (5.3)$$

soit équivalent au correcteur 5.2 du point de vue du comportement entrée/sortie.

Solution : elle consiste à calculer la matrice de passage T entre les deux représentations 5.2 et 5.3 :

$$x_K = T\hat{x}. \quad (5.4)$$

On peut montrer que T est solution de l'équation de RICCATI (GNARE : Generalized Non-symmetric Algebraic RICCATI Equation) :

$$[-T \ I] \begin{bmatrix} A + BD_K C & BC_K \\ B_K C & A_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ T \end{bmatrix} = 0 \quad (5.5)$$

dont la matrice hamiltonienne est la matrice dynamique en boucle fermée A_{cl} . Cette équation peut alors être résolue par la recherche d'un sous espace invariant associé à un ensemble de n valeurs propres ; c'est-à-dire :

- rechercher un sous-espace invariant ($\mathcal{S} = \text{Im}(U)$) de dimension n de la matrice A_{cl} , soit :

$$A_{cl}U = U\Lambda. \quad (5.6)$$

Ce sous-espace est associé à un ensemble de n valeurs propres, $\text{spec}(\Lambda)$, parmi les $2n$ valeurs propres de A_{cl} .

- partitionner les vecteurs U qui engendrent ce sous-espace de la façon suivante :

$$U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}, \quad U_1 \in \mathcal{R}^n. \quad (5.7)$$

- calculer la solution : $T = U_2 U_1^{-1}$.

Les 3 paramètres sont alors calculés par les relations suivantes :

- $Q = D_K$,
- $K_c = -C_K T - D_K C$,
- $K_f = T^{-1} B_K - B D_K$.

Remarques :

- cette technique peut-être généralisée aux cas des correcteurs d'ordre supérieur ou même inférieur à l'ordre du modèle. Le lecteur se reportera au chapitre 9 de la référence [1] pour plus de détails,
- la résolution de l'équation de RICCATI 5.5 fait apparaître une combinatoire de solutions selon le choix des n valeurs propres parmi les $2n$ valeurs propres de A_{cl} dans le calcul du sous-espace invariant. Cette combinatoire de solutions peut-être réduite compte tenu des considérations suivantes :
 - choisir une ensemble de n valeurs propres auto-conjugées pour trouver une paramétrisation réelle,
 - les n valeurs propres choisies, associées au sous-espace invariant pour la résolution de 5.5, correspondent à la dynamique de commande ($\text{spec}(A - BK_c)$),
 - une valeur propre ingouvernable dans le système doit donc être toujours sélectionnée dans ce choix,
 - une valeur propre inobservable dans le système ne doit jamais être sélectionnée dans ce choix,
 - enfin, on choisit couramment la dynamique d'estimation ($\text{spec}(A - K_f C)$) plus rapide que la dynamique de commande ($\text{spec}(A - BK_c)$).

5.3 Intérêts pratiques

Le principal intérêt de la structure Estimation/Commande réside dans le fait que les variables d'état du correcteur ont un sens physique évident puisque ce sont les estimés des états du système commandé, alors que les états d'un correcteur issu d'une synthèse H_∞ ou d'une μ -synthèse n'ont pas de signification immédiate. Si les variables d'état du modèle sur lequel est développée la forme Estimation/Commande équivalente ont des unités physiques, alors il est possible de donner une unité physique à tous les gains qui définissent le correcteur. D'où l'intérêt de cette technique du point de vue de l'implantation des correcteurs :

- une fois le correcteur synthétisé par une technique quelconque, son passage sous la forme Estimation/Commande permettra de visualiser en ligne ou hors ligne une estimation des états du système (voir section 5.4). De même, l'initialisation des états du correcteur, au démarrage de l'asservissement ou lors des commutations de lois de commande, s'appuiera sur les états physiques du système pris

- en compte dans la modélisation. Toujours pour des raisons d'interprétation physique des états du correcteur, cette structure offre également des alternatives intéressantes sur la façon d'injecter les consignes dans la boucle,
- la structure Estimation/Commande faisant apparaître le modèle du système, il sera également plus aisé d'adapter le correcteur au point de fonctionnement par la simple adaptation du modèle supposé connu. On peut également envisager la prise en compte de non-linéarités du système si elles sont modélisées (saturation d'actionneur, par exemple),
 - enfin, une fois le modèle du système donné, le correcteur sous forme Estimation/Commande est entièrement défini par les matrices de gains statiques d'estimation et de retour d'état. Les éventuelles interpolations de correcteurs entre deux points de fonctionnement seront également allégées si l'on considère cette paire de gains statiques au lieu des quatre matrices de la représentation d'état du correcteur.

5.4 Illustration

À titre d'exemple, nous avons représenté figures 5.2 et 5.3 les réponses en boucle fermée des états du système et du correcteur relatifs à l'exercice suivant (section 5.5) :

- lorsque ce correcteur est implanté sous forme compagne horizontale canonique (figure 5.2),
- lorsque ce correcteur est implanté sous forme Estimation/Commande équivalente (figure 5.3).

Il s'agit des réponses à des conditions initiales sur le système (+1 sur y , -1 sur \dot{y} et 0 sur les états du correcteur). Nous pouvons constater que :

- les réponses des états du système sont les mêmes étant donné que la loi de commande est la même du point de vue de la relation entrée/sortie,
- par contre, les deux états du correcteur sous forme Estimation/Commande (\hat{x}) permettent maintenant d'estimer les deux états du système de façon tout à fait satisfaisante. Ces simulations permettent de plus d'apprécier la dynamique d'estimation (la durée du transitoire de recalage est de 3 s)

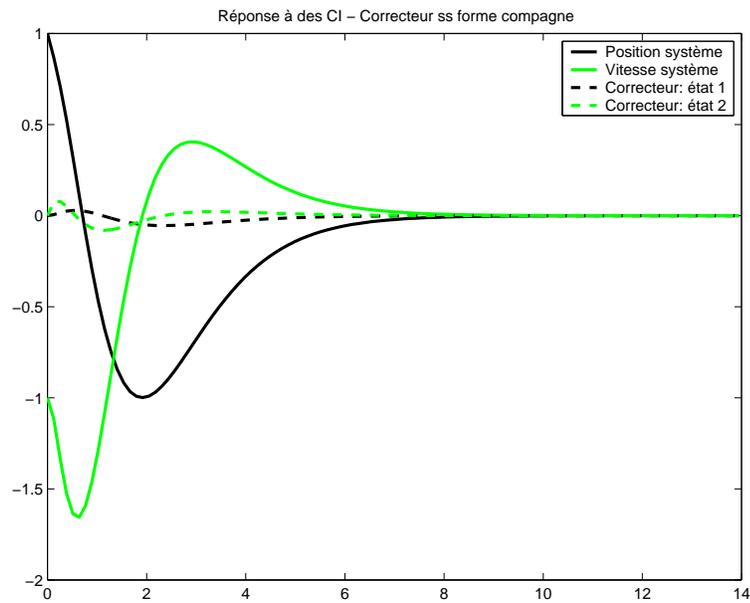


FIG. 5.2 – Simulation en boucle fermée avec le correcteur sous forme compagne horizontale canonique.

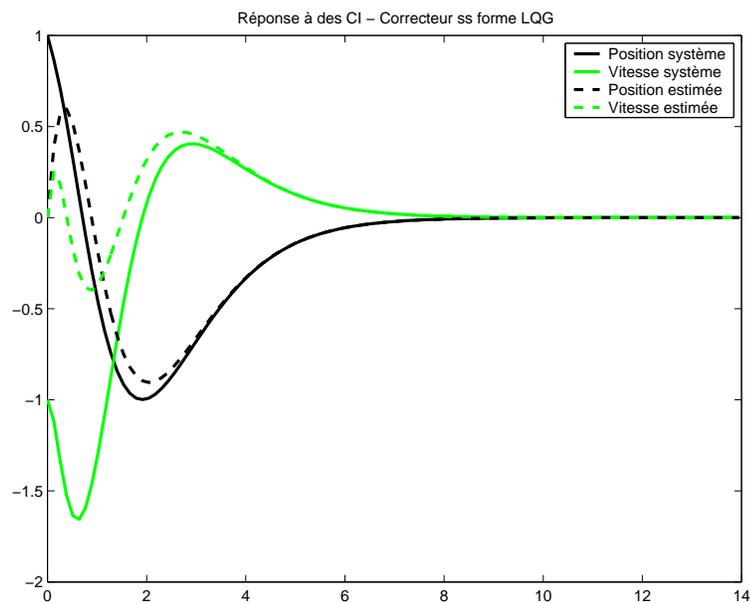


FIG. 5.3 – Simulation en boucle fermée avec le correcteur sous forme LQG équivalente.

5.5 Exercice

On considère le système suivant (double intégration) :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (5.8)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x. \quad (5.9)$$

Un correcteur $K(s)$ a été préalablement synthétisé par une technique inconnue :

$$K(s) = \frac{U}{Y}(s) = -\frac{20s + 8}{s^2 + 7s + 18} \quad (5.10)$$

- Donner une représentation d'état du correcteur et calculer les valeurs propres de la boucle fermée,
- mettre le correcteur sous forme LQG (on affectera les valeurs propres les plus lentes à la dynamique de commande $\text{spec}(A - BK_c)$).

Chapitre 6

La forme standard

6.1 Introduction

La forme standard regroupe dans un modèle augmenté, noté $P(s)$ sur la Figure 6.1, le modèle et le critère de synthèse. On distingue deux types d'entrées : les commandes (u) et les perturbations ou consignes (w) dites entrées exogènes ; et deux types de sorties : les mesures (y) et les sorties régulées (z).

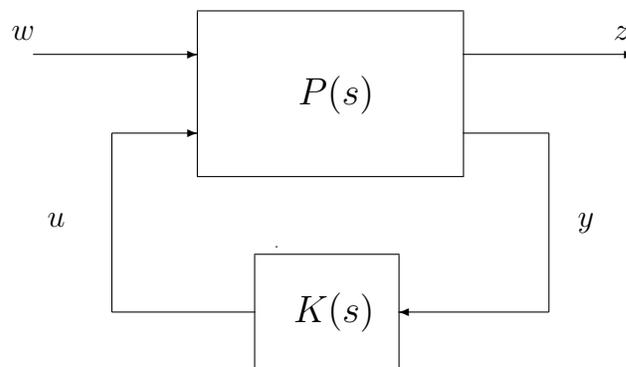


FIG. 6.1 – La forme standard.

Si le correcteur $K(s)$ est connu (*problème d'analyse*), cette représentation donne la fonction de transfert en boucle fermée et permet de manipuler les normes. Si $K(s)$ est à déterminer (*problème de synthèse*), la seule donnée de la matrice de transfert $P(s)$ suffit à exprimer complètement le problème.

La forme standard est représentée par le quadripôle fréquentiel :

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix}. \quad (6.1)$$

ou la représentation d'état augmentée :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix}, \quad (6.2)$$

On reconnaît cependant dans les matrices A , B_2 , C_2 , D_{22} les matrices A , B , C , D classiques, dans le cas particulier où le vecteur y du quadripôle est effectivement le vecteur de mesures et le vecteur u le vecteur de commandes. Ce n'est pas toujours le cas, comme nous le verrons par exemple avec la forme standard de la sensibilité mixte.

Le transfert $G_{zw}(s)$ en boucle fermée entre w et z , noté aussi par définition $F_l(P, K)$, s'écrit :

$$G_{zw}(s) = F_l(P, K) = P_{11}(s) + P_{12}(s)K(s)(I - P_{22}(s)K(s))^{-1}P_{21}(s). \quad (6.3)$$

Le *problème de synthèse* consiste à trouver $K(s)$ stabilisant et minimisant le transfert $G_{zw}(s)$ au sens :

- de la norme H_2 qui s'exprime par :
 - $\|G_{zw}\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Trace}(G_{zw}(-j\omega)^T G_{zw}(j\omega)) d\omega}$ dans le domaine fréquentiel,
 - $\|G_{zw}\|_2 = \sqrt{\int_0^{+\infty} \text{Trace}(z(t)^T z(t)) dt}$ dans le domaine temporel ($z(t)$ désigne alors la matrice des réponses impulsionnelles de $G_{zw}(s)$).

On parle alors de synthèse H_2 ,

- de la norme H_∞ qui s'exprime dans le domaine fréquentiel par :
 $\|G_{zw}\|_\infty = \sup_\omega \sigma_{max}(G_{zw}(j\omega))$. On parle alors de synthèse H_∞ .

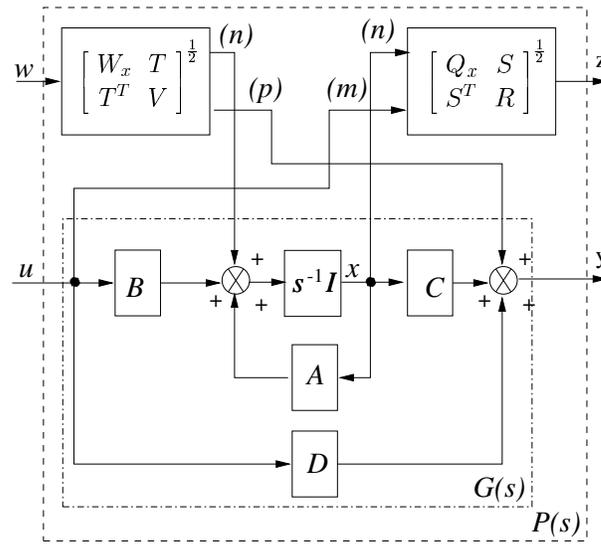
6.2 Liens entre synthèse H_2 et synthèse LQG

D'une façon générale, une synthèse LQG sur un système représenté par un quadripôle $(A_{n \times n}, B_{n \times m}, C_{p \times n}, D_{p \times m})$ et réglée à partir de trois matrices de pondération $(Q_x, R, S)^1$ et de trois matrices de covariance $(W_x, V, T)^2$ est équivalente à la synthèse H_2 sur la forme standard présentée Figure 6.2.

Réciproquement : la synthèse H_2 sur la forme standard générale $P(s)$ décrite par (6.2) est rigoureusement équivalente à une synthèse LQG sur le système représenté par

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_2 u + w_x \\ y = C_2 x + D_{22} u + v \end{cases}, \quad (6.4)$$

1. Rappel : dans le cas général le critère LQ s'écrit $J = \int_0^\infty (x^T Q_x x + 2x^T S u + u^T R u) dt$.
 2. T est la matrice de corrélation entre les bruits d'état $w_x(t)$ et de mesure $v(t)$: $E[w_x(t)v^T(t)] = T\delta(t)$.

FIG. 6.2 – *Forme standard associée à la synthèse LQG.*

si :

- les trois matrices de pondération (Q_x, R, S) du critère LQ vérifient :

$$\begin{bmatrix} Q_x & S \\ S^T & R \end{bmatrix} = [C_1 \ D_{12}]^T [C_1 \ D_{12}] = \begin{bmatrix} C_1^T C_1 & C_1^T D_{12} \\ D_{12}^T C_1 & D_{12}^T D_{12} \end{bmatrix}, \quad (6.5)$$

- les trois matrices de covariance (W_x, V, T) des bruits d'état et de mesures vérifient :

$$\begin{bmatrix} W_x & T \\ T^T & V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} B_1 B_1^T & B_1 D_{21}^T \\ D_{21} B_1^T & D_{21} D_{21}^T \end{bmatrix}. \quad (6.6)$$

Il n'y a donc pas de limite quant à l'interprétation de la synthèse H_2 en terme de synthèse LQG et on retrouvera les mêmes propriétés et les mêmes comportements asymptotiques.

6.3 Pondérations fréquentielles

L'intérêt de la forme standard réside donc dans la clarté de son formalisme et l'interprétation physique du critère de synthèse puisqu'il est défini par une fonction de transfert voire même un schéma fonctionnel faisant apparaître des pondérations placées sur les signaux physiques d'entrée et de sortie du système et cela indépendamment de la norme que l'on désire minimiser (H_2 ou H_∞). Cette formulation est propice à l'introduction de pondérations fréquentielles sur certains signaux (par exemple: la

commande) pour satisfaire des spécifications fréquentielles (par exemple: le “roll-off” aux fréquences élevées) pour lesquelles l’approche optimale de type LQG est mal adaptée (on notera toutefois que l’approche LQG fréquentielle proposait une solution dès le début des années 70 pour prendre en compte des spécifications fréquentielles, voir aussi la section 3.4 de [1]).

Des formes standards particulières (notamment la sensibilité mixte présentée figure 6.3) ont fait l’objet d’études détaillées et sont directement adaptées à la formulation des spécifications de robustesse fréquentielle sur les fonctions de sensibilité $S = (I + GK)^{-1}$ et $T = GKS$ (voir cours sur la synthèse H_∞)

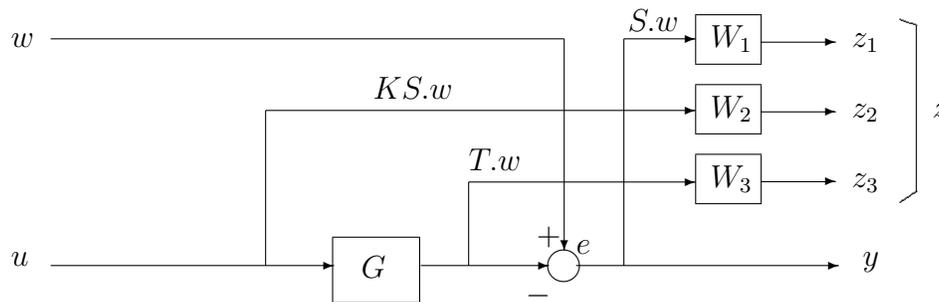


FIG. 6.3 – *Forme standard de la sensibilité mixte.*

Références

- 1 “Robustesse et Commande Optimale” : D. Alazard, C. Cumer, P. Apkarian, M. Gauvrit et G. Ferrères - Cépaduès Éditions,
- 2 “Commande robuste des systèmes linéaires” : M. Gauvrit et P. Apkarian, Polycopié de cours Supaéro,
- 3 “Asservissement Non-Linéaire - facicule 3 - méthode de Lyapunov” A.Fossard, Polycopié de cours Supaéro- 1970.
- 4 “Commande optimale des processus déterministe” : M. Llibre, Polycopié de cours Supaéro,
- 5 “Techniques de commande robuste, approche par multiplicateurs et approche stochastique” : C. Manceaux-Cumer, thèse de l’École Nationale Supérieure de l’Aéronautique et de l’Espace-1998,
- 6 “Commande numérique des systèmes : application aux engins mobiles et aux robots” : Ouvrage collectif publié sous la direction de C. Fargeon, Éditions Masson.
- 7 “Linear optimal control systems” : H. Kwakernaak and R. Sivan, Wiley interscience, John Wiley and Sons, 1972.
- 8 “Le filtrage et ses applications” : M. Labarrère, J. P. Krief et B. Gimonet, Cépaduès Editions.
- 9 “Introduction au filtre de KALMAN” : D. Alazard, Note de cours SUPAERO.

PAGE SANS TEXTE

Annexe A

Passage d'un bruit blanc dans un système linéaire

Les démonstrations qui suivent sont extraites de la référence [8] et adaptées aux notations de ce document.

Théorème A.1 *Soit le système linéaire :*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bw(t) . \quad (\text{A.1})$$

$w(t)$ est un bruit blanc gaussien centré de densité spectrale W . On note $m(t_0)$ et $P(t_0)$ la moyenne et la covariance de l'état initial $x(t_0)$ (lui aussi aléatoire mais indépendant de $w(t)$). On montre que $x(t)$ est un signal aléatoire gaussien :

– de moyenne :

$$m(t) = E[x(t)] = e^{A(t-t_0)}m(t_0)$$

– de covariance $P(t) = E[(x(t)-m(t))(x(t)-m(t))^T]$ vérifiant l'équation différentielle :

$$\dot{P}(t) = AP(t) + P(t)A^T + BWB^T . \quad (\text{A.2})$$

En régime permanent : $\dot{P} = 0$ et $P(t) = P$ vérifie alors l'équation de LYAPUNOV continue :

$$AP + PA^T + BWB^T = 0 . \quad (\text{A.3})$$

Démonstration : l'intégration de l'équation (A.1) entre l'instant initial t_0 et le l'instant courant t s'écrit :

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bw(\tau)d\tau$$

$x(t)$ est donc une combinaison linéaire de signaux aléatoires gaussiens ($x(t_0)$ et $w(\tau)$), $x(t)$ est donc également un signal aléatoire gaussien. Calculons sa moyenne $m(t) = E[x(t)]$ et sa matrice de covariance $P(t) = E[(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T]$.

Moyenne $m(t)$:

$$m(t) = e^{A(t-t_0)} E[x(t_0)] + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B E[w(\tau)] d\tau ,$$

or $E[w(\tau)] = 0$ (bruit centré) et $E[x(t_0)] = m(t_0)$ donc :

$$\boxed{m(t) = e^{A(t-t_0)} m(t_0)} .$$

Covariance $P(t)$:

$$\begin{aligned} x(t) - m(t) &= e^{A(t-t_0)} \left(x(t_0) - m(t_0) \right) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B w(\tau) d\tau \\ &= e^{A(t-t_0)} \left(x(t_0) - m(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t_0-\tau)} B w(\tau) d\tau \right) . \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} \left(x(t) - m(t) \right) \left(x(t) - m(t) \right)^T &= e^{A(t-t_0)} \left(\left(x(t_0) - m(t_0) \right) \left(x(t_0) - m(t_0) \right)^T + \right. \\ &+ \int_{t_0}^t e^{A(t_0-\tau)} B w(\tau) \left(x(t_0) - m(t_0) \right)^T d\tau + \\ &+ \int_{t_0}^t \left(x(t_0) - m(t_0) \right) w^T(\tau) B^T e^{A^T(t_0-\tau)} d\tau + \\ &\left. + \int \int_{t_0}^t e^{A(t_0-\tau)} B w(\tau) w^T(u) B^T e^{A^T(t_0-u)} d\tau du \right) e^{A^T(t-t_0)} . \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} P(t) &= e^{A(t-t_0)} \left(P(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t_0-\tau)} B E \left[w(\tau) \left(x(t_0) - m(t_0) \right)^T \right] d\tau + \right. \\ &+ \int_{t_0}^t E \left[\left(x(t_0) - m(t_0) \right) w^T(\tau) \right] B^T e^{A^T(t_0-\tau)} d\tau + \\ &\left. + \int \int_{t_0}^t e^{A(t_0-\tau)} B E \left[w(\tau) w^T(u) \right] B^T e^{A^T(t_0-u)} d\tau du \right) e^{A^T(t-t_0)} . \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Du fait des hypothèses ($x(t_0)$ et $w(\tau)$ sont indépendants $\forall \tau > t_0$ et $w(t)$ est un bruit blanc centré), on peut affirmer :

$$\begin{aligned} - E \left[w(\tau) \left(x(t_0) - m(t_0) \right)^T \right] &= 0 \\ - E \left[w(\tau) w^T(u) \right] &= W \delta(\tau - u) . \end{aligned}$$

On a donc :

$$P(t) = e^{A(t-t_0)} \left(P(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t_0-\tau)} B W B^T e^{A^T(t_0-\tau)} d\tau \right) e^{A^T(t-t_0)}. \quad (\text{A.7})$$

et

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= \frac{dP(t)}{dt} = A e^{A(t-t_0)} \left(P(t_0) + \dots \right) e^{A^T(t-t_0)} + e^{A(t-t_0)} \left(P(t_0) + \dots \right) e^{A^T(t-t_0)} A^T \\ &+ e^{A(t-t_0)} \left(e^{A(t_0-t)} B W B^T e^{A^T(t_0-t)} \right) e^{A^T(t-t_0)}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Soit :

$$\boxed{\dot{P}(t) = AP(t) + P(t)A^T + B W B^T}. \quad (\text{A.9})$$

Remarque : à partir de l'équation A.7 on retrouve l'équation de LYAPUNOV discrète. Il suffit de prendre $t_0 = n dt$ et $t = (n+1) dt$ où dt désigne la période d'échantillonnage. On note alors $P(t) = P_{n+1}$ et $P(t_0) = P_n$, on obtient :

$$P_{n+1} = e^{A dt} P_n e^{A^T dt} + \int_0^{dt} e^{Au} B W B^T e^{A^T u} du$$

On note :

- $e^{A dt} = M$: la matrice dynamique discrète,
- $\int_0^{dt} e^{Au} B W B^T e^{A^T u} du = W_d$ la matrice de covariance du bruit intégrée sur une période d'échantillonnage,

pour obtenir :

$$\boxed{P_{n+1} = M P_n M^T + W_d}$$

(dont le régime permanent s'écrit : $P_n = M P_n M^T + W_d$).

PAGE SANS TEXTE

Annexe B

BE sur Matlab

Commande des systèmes multivariables

BE sur Matlab/Simulink - Commande modale, régulation LQ

Commande de vol latérale d'un avion

Le modèle G de vol latéral d'un avion rigide est donné par la représentation d'état :

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{p} \\ \dot{r} \\ \dot{\phi} \\ n_y \\ p \\ r \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.140 & 0.053 & -0.999 & 0.047 & 0 & 0.030 \\ -2.461 & -0.992 & 0.262 & 0 & 0.404 & 0.260 \\ 1.585 & -0.041 & -0.267 & 0 & 0 & -0.680 \\ 0 & 1.000 & 0.053 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0433 & -0.0003 & 0.0016 & 0 & 0.0001 & -0.0075 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ p \\ r \\ \phi \\ dp \\ dr \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

- 4 états : β (dérapage), P (vitesse de roulis), R (vitesse de dérapage), ϕ (assiette latérale),
- 2 commandes : dp (braquage ailerons) et dr (braquage gouverne),
- 4 mesures : n_y (accélération latérale), P (vitesse de roulis), R (vitesse de lacet), ϕ (assiette latérale),

On souhaite synthétiser une loi de commande de vol selon le schéma présenté figure 1 où H est une pré-commande statique calculée pour satisfaire la contrainte en régime permanent :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \beta(t) \\ \phi(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{consigne} \\ \phi_{consigne} \end{bmatrix}$$

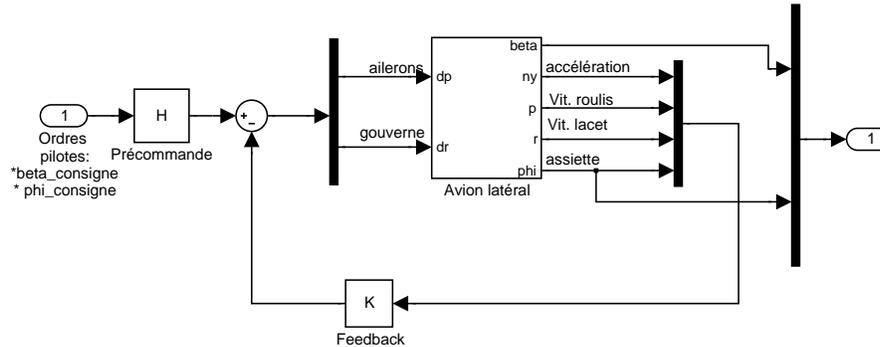


FIG. B.1 – Architecture de commande

Pour toutes les synthèses qui suivent :

- on calculera d’abord le retour d’état ($u = -K_x x$),
- le nombre de sorties étant égal au nombre d’états, on calculera le retour de sortie K équivalent au retour d’état K_x ,
- on calculera ensuite la pré-commande H ,
- on tracera enfin les réponses indicielles (macro **step**) du système en boucle fermée décrit par la figure 1 et la marge de module en fonction de la pulsation.

Approche modale

Le cahier des charges est le suivant :

- placer le mode de roulis pur en -1.1 et le découpler de β ,
 - placer le mode spiral en -1 et le découpler de β ,
 - placer le mode de roulis hollandais en $-1 \pm 1.3i$ et le découpler de ϕ .
- calculer et analyser la loi de commande qui assure seulement le placement des valeurs propres (macro **place**),
- calculer et analyser la loi de commande qui assure également les spécifications de découplage.

Approche LQ

On cherche la loi de commande qui minimise le critère :

$$J = \int_0^{\infty} (q_{\beta} \beta^2 + q_p p^2 + q_r r^2 + q_{\phi} \phi^2 + dr^2 + dp^2) dt$$

- évaluer qualitativement l’influence des pondérations q_{β} , q_p , q_r et q_{ϕ} sur la dynamique du système (on tracera par exemple la carte des pôles pour différents jeux de pondérations ou des “root square locus” à l’aide de la macro **rsqlocus**),

- en jouant sur q_r et q_ϕ , calculer un retour d'état qui amortisse au moins à 0.6 le mode de roulis hollandais et place le mode spiral au delà de -1 (rd/s). Analyser cette solution. Qu'en est-il du découplage?,
- chercher un jeu de pondérations tel que le taux de couplage (mesuré sur les réponses indicielles) soit inférieur à 15%.

PAGE SANS TEXTE