



**Représentation et analyse des systèmes  
multi-variables**

*Notes de cours*

D.Alazard



# Contents

<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>Notations</b>	<b>9</b>
<b>1 Rappels d'algèbre linéaire</b>	<b>13</b>
1.1 Introduction . . . . .	13
1.2 Problème de l'inversion . . . . .	13
1.2.1 Introduction des moindres carrés (LMS) . . . . .	13
1.2.2 Méthodes numériques pour résoudre les LMS . . . . .	16
1.2.3 Illustration: problème de l'approximation polynomiale . . . . .	17
1.2.4 Formule d'inversion des matrices partitionnées - Lemme d'inversion matricielle . . . . .	19
1.3 Décomposition des matrices . . . . .	20
1.3.1 Décomposition spectrale ( <code>help eig</code> ) . . . . .	20
1.3.2 Décomposition de SCHUR ( <code>help schur</code> ) . . . . .	22
1.3.3 Décomposition de CHOLESKY ( <code>help chol</code> ) . . . . .	23
1.3.4 Décomposition en valeurs singulières -SVD ( <code>help svd</code> ) . . . . .	24
<b>2 Analyse des systèmes multi-variables par les valeurs singulières</b>	<b>27</b>
2.1 Généralités . . . . .	27
2.2 Application des valeurs singulières: marge de module . . . . .	28
2.2.1 Rappel mono-variable: insuffisance des notions de marge de gain et de phase . . . . .	28
2.2.2 Marge de module dans le cas multi-variable . . . . .	30
2.2.3 Illustration . . . . .	32
2.3 Exercice sur l'analyse par les valeurs singulières (sous Matlab) . . . . .	33
<b>3 Représentation d'état des systèmes multivariables définis par des ma- trices de transfert</b>	<b>37</b>

3.1	Problème général . . . . .	37
3.2	Rappels: gouvernabilité, observabilité, minimalité . . . . .	39
3.2.1	Critères généraux . . . . .	39
3.2.2	Critères particuliers . . . . .	40
3.3	Rappel: passage transfert/état dans le cas SISO (Single Input Single Output) . . . . .	40
3.3.1	Formes diagonales . . . . .	41
3.3.2	Formes compagnes . . . . .	41
3.3.3	Formes de JORDAN . . . . .	43
3.4	Cas SIMO (Single Input Multi Output) et MISO (Multi Input Single output) . . . . .	43
3.5	Cas MIMO avec des modes simples: méthode de GILBERT . . . . .	44
3.6	Cas général . . . . .	45
3.6.1	Diagonalisation d'une matrice polynomiale par opérations élémentaires . . . . .	45
3.6.2	Calcul algorithmique des invariants . . . . .	46
3.6.3	Invariants d'une matrice rationnelle . . . . .	47
3.6.4	Construction d'une réalisation minimale . . . . .	48
3.7	Calcul d'une réalisation non-minimale . . . . .	49
3.8	Méthode du graphe minimal (cas des valeurs propres multiples) . . . . .	51
3.9	Exercice . . . . .	53
<b>4</b>	<b>Représentation d'état des systèmes multivariables définis par un système d'équations différentielles</b> . . . . .	<b>55</b>
4.1	Notations et Problématique . . . . .	55
4.2	Rappel cas SISO . . . . .	56
4.3	Cas général multivariable . . . . .	56
4.3.1	Pré-multiplication du système: triangularisation (supérieure) de $L(D)$ . . . . .	56
4.3.2	Changement de variable (post-multiplication) . . . . .	57
4.3.3	Mise sous forme d'état . . . . .	57
4.4	Exemple . . . . .	59
4.5	Exercices . . . . .	61
<b>5</b>	<b>Gouvernabilité et observabilité: analyse pratique par les grammien</b> . . . . .	<b>63</b>
5.1	Introduction . . . . .	63
5.2	Définitions . . . . .	63
5.2.1	Grammien de gouvernabilité ( <code>help gram</code> ) . . . . .	64

---

5.2.2	Grammien d'observabilité . . . . .	65
5.3	Représentation équilibrée ( <code>help balreal</code> ) . . . . .	66
	<b>Références</b>	<b>69</b>



# Introduction

Ces notes de cours regroupent les outils mathématiques et les techniques utilisés pour l'analyse et la représentation des systèmes dynamiques linéaires multi-variables (ou MIMO: Multi Input Multi Output). On présentent principalement l'analyse par les valeurs singulières (chapitre 2) après quelques rappels d'algèbre linéaires (chapitre 1) et le calcul d'une réalisation minimale à partir d'une matrice de transfert (chapitre 3) ou d'un système d'équations différentielles (chapitre 4). Les notions pratiques de gouvernabilité et d'observabilité (grammiens) ainsi la réalisation équilibrée sont abordées dans le chapitre 5. Les méthodes de réduction, bien qu'elles auraient trouvées leur place dans ces notes, ne sont pas présentées ici et nous renvoyons le lecteur aux références [5] et [7] pour plus de détails.

Les pré-requis pour la lecture de ces notes sont principalement la théorie des asservissements linéaires et les notions de base sur la représentation d'état, la gouvernabilité et l'observabilité des systèmes linéaires [6]. Il s'adresse donc tout particulièrement aux étudiants de SUPAERO qui ont déjà suivi les cours de tronc commun en seconde année.

Il s'agit d'une édition provisoire qui sera complétée par les rappels d'automatique nécessaires pour rendre ce document autonome. La bibliographie (incomplète) est principalement constituée de références internes afin que les étudiants puissent positionner ces notes par rapport aux autres documents disponibles.





# Notations

## Symboles courants

$\mathbb{R}$	ensemble des réels
$\mathbb{C}$	ensemble des complexes
$\mathbb{R}^n$	ensemble des vecteurs réels de dimension $n$
$\mathbb{C}^n$	ensemble des vecteurs complexes de dimension $n$
$\mathbb{R}^{m \times n}$	ensemble des matrices réelles $m \times n$
$\mathbb{C}^{m \times n}$	ensemble des matrices complexes $m \times n$
$j$	index ou $j^2 = -1$
$ \cdot $	valeur absolue d'éléments dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
$\ln$	logarithme naturel
$\log_{10}$	logarithme en base 10
$\ x\ , \ x\ _2$	norme Euclidienne de vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$
$\operatorname{Re}(x)$	partie réelle du complexe $x$ dans $\mathbb{C}$
$E[x]$	espérance mathématique de la variable aléatoire $x$
$\bar{x}$	conjugué de $x$ dans $\mathbb{C}$
$\mathcal{N}(m, \sigma)$	loi gaussienne (normale) de moyenne $m$ et de variance $\sigma$
$I_n$	matrice identité $n \times n$
$0_n$ ou $0_{n \times m}$	matrices nulles $n \times n$ ou $n \times m$
$M_{i,j}$	$i, j$ élément de la matrice $M$
$M^T$	transposée de la matrice $M$
$M^*$	conjuguée transposée de $M$
$\operatorname{Herm}(M)$	$\frac{1}{2}(M + M^*)$
$M^{-1}$	inverse de $M$
$M^{-T}$	$(M^T)^{-1} = (M^{-1})^T$
$M^{-*}$	$(M^*)^{-1} = (M^{-1})^*$
$M^+$	inverse de MOORE-PENROSE de $M$ , $M^+ = (M^*M)^{-1}M^T$
$\sigma_i(M)$	$i$ -ème valeur singulière de $M$
$\sigma_{\min}(M)$	valeur singulière minimale de $M$
$\sigma_{\max}(M)$	valeur singulière maximale de $M$

$\lambda_i(M)$	$i$ -ème valeur propre de $M$
$\bar{\lambda}(M)$	valeur propre maximale de $M$
$\rho(M)$	rayon spectral de $M$ , $\rho(M) = \max_i  \lambda_i(M) $
$\kappa(M)$	conditionnement de $M$ : $\sigma_{max}(M)/\sigma_{min}(M)$
Trace ( $M$ )	trace de $M$ , $\text{trace}(M) = \sum_{i=1}^n M_{i,i}$
$\det(M)$	déterminant de $M$
$\text{spec}(M)$	ensemble des valeurs propres de $M$
$\ker(M)$	noyau de $M$ , $\ker(M) = \{x : Mx = 0\}$
$\text{Im}(M)$	espace image de $M$ , $\text{Im}(M) = \{Mx : x \in \mathbb{C}^n\}$
$\dim(V)$	dimension de l'espace $V$
$\text{rang}(M)$	$\dim(\text{Im}(M))$

### Notations système

$s$	variable de LAPLACE
$\omega$	fréquence (rad./ sec.)
$\left[ \begin{array}{c c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$	parfois matrice de transfert $C(sI - A)^{-1}B + D$
$\delta, \Delta$	incertitudes paramétriques

### Acronymes

B.F.	Boucle fermée
B.O.	Boucle Ouverte
LFT	Transformation Linéaire Fractionnaire
LMI	Inégalité Matricielle Linéaire
LQG	Linéaire Quadratique Gaussien
LTI	Linéaire à Temps Invariant
LTV	Linéaire à Temps Variant
SVD	Décomposition en Valeurs Singulières
VSS	Valeur Singulière Structurée

Propriété	définition	condition nécessaire et suffisante
Symétrique	$A = A^T$	
Hermitienne	$A = A^*$	
Anti-symétrique	$A = -A^T$	
Anti-hermitienne	$A = -A^*$	
Orthogonale	$AA^T = A^T A = I$	
Unitaire	$AA^* = A^* A = I$	
Idempotente	$A^2 = A$	
Nilpotente	$A^k = 0 \quad \forall k \geq 2$	
Positive définie	$x^* A x > 0 \quad \forall x \neq 0$	toutes les valeurs propres sont $> 0$
Positive semi-définie	$x^* A x \geq 0 \quad \forall x \neq 0$	toutes les valeurs propres sont $\geq 0$

Table 1: Classification des matrices



# Chapter 1

## Rappels d'algèbre linéaire

### 1.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de présenter les résultats importants du calcul matriciel, et plus particulièrement la décomposition des matrices, qui sont à la base des principaux algorithmes utilisés dans le domaine de l'automatique (résolution des équations de LYAPUNOV, RICCATI, LMI <sup>1</sup>, analyse des systèmes pas les valeurs singulières, ...)

Dans la section 1.2, les principales notions sont présentées autour du problème général de l'inversion d'une matrice.

Dans la section 1.3, on présente les principales décompositions de matrices et plus particulièrement la SVD (Singular Value Decomposition). On rappelle également les macro-fonctions MATLAB associées à ces opérations.

### 1.2 Problème de l'inversion

#### 1.2.1 Introduction des moindres carrés (LMS)

Considérons un ensemble d'équations linéaires algébriques :

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases} \quad (1.1)$$

---

<sup>1</sup>LMI: Linear Matrix Inequality

que l'on note matriciellement :

$$y = Ax \quad \text{avec} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

$A$  est une matrice de dimension  $m \times n$ . Le problème de l'inversion consiste à trouver  $x$  étant donné  $y$  et  $A$ . Ce problème n'a pas toujours de solution. 3 cas peuvent se présenter <sup>2</sup> :

a) **autant d'équations que d'inconnues**

$$m = n = \text{rang}(A) \quad \Rightarrow \quad \text{une solution unique: } \boxed{x = A^{-1}y}$$

a) **moins d'équations que d'inconnues**

$$m < n \quad \Rightarrow \quad \text{plusieurs solutions}$$

Introduction d'un critère: on choisit la solution de longueur minimale.

$$\text{Minimiser } J = \frac{1}{2} x^T x = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

C'est un problème d'optimisation sous les contraintes:  $y = Ax$ . On applique alors les principes d'optimisation (voir [3] : cours de de M.LLIBRE et M. CORRÈGE "Commande optimale") :

$$\text{Lagrangien: } J_a = \frac{1}{2} x^T x + \lambda^T (y - Ax)$$

( $\lambda$  : vecteur des paramètres de LAGRANGE).

$$\text{Principe: } \left. \frac{\partial J_a}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{x} - A^T \lambda = 0$$

$$\frac{\partial J_a}{\partial \lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = A\hat{x}$$

$$\Rightarrow y = AA^T \lambda \quad (AA^T \text{ de rang } m \text{ donc inversible}).$$

$$\Rightarrow \lambda = (AA^T)^{-1} y \quad \Rightarrow \quad \boxed{\hat{x} = A^T (AA^T)^{-1} y}$$

Rappel: (calcul de gradient)

<sup>2</sup>Pour distinguer les différents cas, on compare le nombre d'équations  $m$  et le nombre d'inconnues  $n$ . Il s'agit en fait du nombre d'équations indépendantes et du nombre d'inconnues minimal afin que:  $\text{rang}(A) = \min(m, n)$ .

- $\frac{\partial[x^T y]}{\partial x} = y, \frac{\partial[y^T x]}{\partial x} = y,$
- $\frac{\partial[x^T Mx]}{\partial x} = (M + M^T)x.$

a) **plus d'équations que d'inconnues**

$$m > n \quad \Rightarrow \quad \text{pas de solution exacte.}$$

On définit l'erreur  $e = y - Ax$  et on cherche la solution au sens de *moindres carrés* (LMS) :

$$\begin{aligned} \text{Minimiser } J &= \frac{1}{2} \|e\|^2 = \frac{1}{2} e^T e = \frac{1}{2} (y - Ax)^T (y - Ax) \\ &= \frac{1}{2} (y^T y - x^T A^T y - y A x + x^T A^T A x). \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial J}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}} = 0 \quad \Rightarrow \quad -2A^T y + 2A^T A \hat{x} = 0$$

(La dérivée s'annule à l'optimum et il s'agit bien d'un minimum car la fonction est quadratique).

$$\boxed{x = (A^T A)^{-1} A^T y}$$

Exemple: approximation polynômiale (macro `polyfit` sous matlab). Soit  $m$  couples de mesures  $(t_i, y_i)$ . On cherche les coefficients  $x_i$  du polynôme d'ordre  $n - 1$  passant par les points  $(t_i, y_i)$ ; soit :

$$y_i = x_1 + x_2 t_i + x_3 t_i^2 + \cdots + x_n t_i^{n-1} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

ou encore :

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_m & t_m^2 & \cdots & t_m^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (\text{soit: } y = Ax)$$

↓  
matrice de VANDERMONDE

Cette matrice est très mal conditionnée <sup>3</sup> pour  $m$  et  $n$  grands (avec  $m > n$ , voir exercice 1.2.3 sous Matlab).

<sup>3</sup>Le conditionnement d'une matrice est le rapport de la plus grande valeur singulière de cette matrice sur la plus petite:  $\kappa(A) = \sigma_{\max}(A)/\sigma_{\min}(A)$

### 1.2.2 Méthodes numériques pour résoudre les LMS

a) **Inversion brutale:**

$$\hat{x}_1 = (A^T A)^{-1} A^T y$$

⇒ problèmes numériques si  $A^T A$  est mal conditionnée.

b) **Elimination gaussienne:** on écrit

$$(A^T A)\hat{x}_2 = A^T y .$$

La solution est obtenue en pré-multipliant cette équation par une séquence de matrices élémentaires (opérations sur les lignes et les colonnes) pour mettre  $A^T A$  sous forme triangulaire supérieure.  $\hat{x}_2$  peut alors être calculé par substitution arrière.

⇒ méthode rapide.

c) **Factorisation QR:** soit  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  de rang  $n$  ( $m \geq n$ ) alors  $A$  peut-être factorisée sous la forme:

$$A = QR$$

avec  $Q$  matrice unitaire  $Q^*Q = I_{m \times m}$  et  $R = \begin{bmatrix} U \\ \emptyset \end{bmatrix}$  où  $U$  est une matrice  $n \times n$  triangulaire supérieure. On a donc :

$$\begin{bmatrix} U \\ \emptyset \end{bmatrix} \hat{x}_3 = Q^* y = \begin{bmatrix} Q_1^* \\ Q_2^* \end{bmatrix}$$

$$U\hat{x}_3 = Q_1^* y, \quad \text{résolue par substitution arrière}$$

⇒ méthode très efficace.

d) **Pseudo-inverse de Moore-Penrose ou (SVD)** (Singular Value decomposition): on note

$$\hat{x}_4 = A^+ y \quad (\text{pinv}(A) \text{ en syntaxe Matlab})$$

⇒ solution très stable numériquement.

**Remarque 1.2.1** La solution du problème de l'inversion (présenté section 1.2) peut-être exprimée dans les cas  $m > n$ ,  $m = n$ ,  $m < n$  à l'aide de la matrice pseudo-inverse de MOORE-PENROSE:  $\hat{x} = A^+ y$ . Le détail du calcul de  $A^+$  est présenté section 1.3.4 sur la SVD mais on retiendra que la pseudo-inverse peut-être calculée même si  $A$  n'est pas de rang plein (rang  $< \min(m, n)$ ).



### 1.2.3 Illustration: problème de l'approximation polynomiale

Soit :

- $[t_i] = [0, 1, 2, 3, \dots, m - 1]$ ,
- $x = [1, 1, 1, 1, \dots, 1]$  ( $n$  fois) la valeur vraie *vraie* du vecteur des coefficients du polynôme recherché d'ordre  $n-1$ .

La session Matlab qui suit présente les résultats obtenus par les méthodes a), c) et d) dans le cas  $m = 20$  et  $n = 8$ . Nous pouvons constater que l'*inversion directe* est très mauvaise et que les techniques de la *pseudo-inverse* et par *factorisation QR* donnent des résultats satisfaisants.

```
>>
>> %           LMS: problème de l'approximation polynomiale
>>
>>
>> clear all
>> format long e
>> m=20;
>> n=8;
>> t=[0:1:m-1]';
>> x=ones(n,1);
>> a=[];
>> for ii=1:n,a=[a t.^ii];end;
>> y=a*x;
>>
>> % Inversion directe:
>> xhat1=inv(a'*a)*a'*y
Warning: Matrix is close to singular or badly scaled.
         Results may be inaccurate. RCOND = 1.315754e-22.

xhat1 =

    4.990038871765137e-01
    1.020576477050781e+00
    1.205293655395508e+00
    1.030517876148224e+00
    9.941211566329002e-01
    1.000405412632972e+00
    9.999893351923674e-01
    1.000000218589548e+00

>> norm(xhat1-x)/norm(x)
```

```

ans =

    1.918762776683313e-01

>>
>> % Utilisation de la pseudo-inverse:
>> xhat4=pinv(a)*y

xhat4 =

    1.000003337860107e+00
    9.999985694885254e-01
    1.000000953674316e+00
    9.99998211860657e-01
    1.000000022351742e+00
    9.99999990686774e-01
    1.00000000014552e+00
    1.00000000000227e+00

>> norm(xhat4-x)/norm(x)

ans =

    1.328986586111962e-06

>>
>> % Utilisation de la décomposition QR de A:
>> [q,r]=qr(a);
>> u=r(1:n,1:n);
>> qt=q';
>> q1t=qt(1:n,:);
>> xhat3=zeros(n,1);
>> sec=q1t*y;
>> for ii=n:-1:1,
    prem=0;
    for jj=ii+1:n,
        prem=prem+u(ii,jj)*xhat3(jj);
    end
    xhat3(ii)=1/u(ii,ii)*(sec(ii)-prem);
end
>> xhat3

xhat3 =

```

```

9.999995821321698e-01
1.000000000037892e+00
1.000000094150625e+00
9.999999700429867e-01
1.000000004047405e+00
9.99999997290243e-01
1.000000000008738e+00
9.99999999998931e-01

```

```
>> norm(xhat3-x)/norm(x)
```

```
ans =
```

```
1.518188652864724e-07
```

### 1.2.4 Formule d'inversion des matrices partitionnées - Lemme d'inversion matricielle

Soit l'équation linéaire :

$y = Ax$  partitionnée en 2 ( $A : n \times n$ ) :

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \\ y_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 \end{cases} .$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} x_1 &= A_{11}^{-1}y_1 - A_{11}^{-1}A_{12}x_2 \\ y_2 &= A_{21}A_{11}^{-1}y_1 + (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})x_2 \end{aligned}$$

Posons:  $\Delta = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ , alors :

$$\begin{aligned} x_2 &= \Delta^{-1}y_2 - \Delta^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}y_1 \\ x_1 &= (A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}\Delta^{-1}A_{21}A_{11}^{-1})y_1 - A_{11}^{-1}A_{12}\Delta^{-1}y_2 \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}\Delta^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}\Delta^{-1} \\ -\Delta^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & \Delta^{-1} \end{bmatrix}$$

De façon analogue, on peut démontrer :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \nabla^{-1} & -\nabla^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ -A_{22}^{-1}A_{21}\nabla^{-1} & A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1}A_{21}\nabla^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

avec  $\nabla = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$ . D'où le lemme d'inversion :

$$A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}$$

Ce lemme est utilisé pour les méthodes d'inversion itératives (actualisation de la matrice de covariance en estimation).

## 1.3 Décomposition des matrices

Les méthodes de décomposition des matrices jouent un rôle important dans l'analyse, l'estimation et la commande des systèmes dynamiques linéaires.

### 1.3.1 Décomposition spectrale (help eig)

Soit  $A$  une matrice carrée  $n \times n$  alors :

$$A = V\Lambda V^{-1}$$

avec

- $\Lambda$  matrice diagonale des valeurs propres  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$  (ou quasi-diagonale dans le cas de blocs de JORDAN),
- $V$  matrice des vecteurs propres à droite (ou des vecteurs propres généralisés) :  
 $V = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ .

Par définition:  $Av_i = \lambda_i v_i$ .

**Problème des valeurs propres généralisées:** soit la paire  $A, B$  de dimension  $n \times n$ , la valeur propre généralisée  $\lambda_i$  associée au vecteur propre généralisé  $v_i$  est telle que :

$$Av_i = \lambda_i Bv_i .$$

(Les valeurs propres généralisées sont utiles pour les systèmes dont la dynamique est décrite par une équation du type :  $B\dot{x} = Ax + \dots$ .)

**Intérêt de la décomposition spectrale pour l'analyse des systèmes:** Soit le système:

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{cases}$$

avec:  $\dim(A) = n \times n$ ,  $\dim(B) = n \times m$ ,  $\dim(C) = p \times n$  et on suppose que  $A$  est diagonalisable.

Effectuons le changement de variable :

$$x = V\tilde{x} \quad \text{avec } V \text{ matrice des vecteurs propres}$$

alors le système peut-être décrit par la nouvelle représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} &= \Lambda\tilde{x} + UBu \\ y &= CV\tilde{x} \end{cases}$$

avec :

- $\Lambda = \text{diag}(\lambda_i) = V^{-1}AV$  (matrice diagonale),

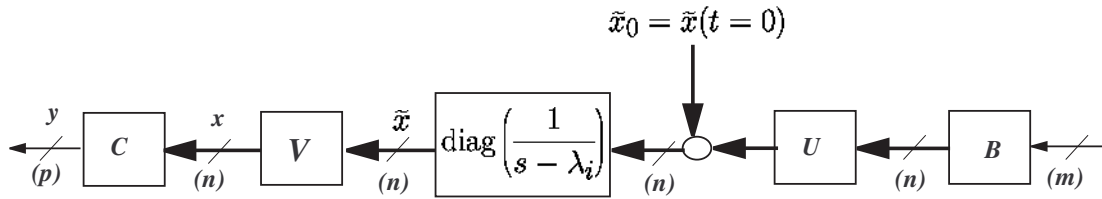


Figure 1.1: Représentation modale du système.

- $U = V^{-1}$  matrice des vecteurs propres à gauche:

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad u_i A = \lambda_i u_i .$$

Le système peut-être représenté de la façon suivante (figure 1.1) :

**Réponse autonome:** ( $u = 0$ ) les  $\tilde{x}_i(t)$  évoluent de façon découplée

$$\tilde{x}_i(t) = \tilde{x}_{0_i} e^{\lambda_i t} .$$

Ce sont les modes du système. Les sorties  $y$  et les états  $x$  du modèle ne sont que des combinaisons linéaires des modes  $\tilde{x}$ .

- La matrice  $V$  décrit l'influence des modes  $\tilde{x}$  du systèmes sur les états  $x$ .
- La matrice  $C$  décrit l'influence des états  $x$  du systèmes sur les sorties  $y$ .
- La matrice  $B$  décrit l'influence des commandes  $u$  sur les variations des états  $\dot{x}$ .
- La matrice  $U$  décrit l'influence des variations des états  $\dot{x}$  sur les variations des modes  $\tilde{x}$ .

La décomposition en éléments simples de la matrice de transfert s'écrit :

$$Z(s) = C(sI - A)^{-1}B = \sum_{i=1}^n \frac{Cv_i u_i B}{s - \lambda_i} .$$

**Remarque 1.3.1** Pour une valeur propre complexe  $\lambda$ , on parle de mode du second ordre qui associe  $\tilde{x}_i(\lambda_i)$  et son conjugué  $\tilde{x}_i(\bar{\lambda}_i)$ .

- Soit  $n_r$  le nombre de modes réels  $\lambda_i^r \quad i = 1, \dots, n_r$ ,
- soit  $n_c$  le nombre de modes complexes  $\lambda_j^c \quad \text{et} \quad \bar{\lambda}_j^c \quad j = 1, \dots, n_c$ ,

alors  $n = n_r + 2n_c$  et :

$$\begin{aligned} Z(s) &= \sum_{i=1}^{n_r} \frac{Cv_i u_i B}{s - \lambda_i^r} + \sum_{j=1}^{n_c} \left( \frac{Cv_j u_j B}{s - \lambda_j^c} + \frac{C\bar{v}_j \bar{u}_j B}{s - \bar{\lambda}_j^c} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n_r} \frac{Cv_i u_i B}{s - \lambda_i^r} + \sum_{j=1}^{n_c} \frac{C(\alpha_j s + \beta_j) B}{s^2 + 2\xi_j \omega_j s + \omega_j^2} \end{aligned}$$

avec <sup>4</sup>:

- $\omega_j = |\lambda_j^c|$  (pulsation en rd/s),
- $\xi_j = -\text{Re}(\lambda_j^c)/\omega_j$  (amortissement),
- $\alpha_j = 2 \text{Re}(v_j u_j)$ ,
- $\beta_j = -(\bar{\lambda}_j^c v_j u_j + \lambda_j^c \bar{v}_j \bar{u}_j)$ .

**Remarque 1.3.2** • Si  $A$  est symétrique alors  $V$  est orthogonale  $V^T = V^{-1}$ ,

- on a supposé que les valeurs propres étaient distinctes. Dans le cas de valeurs propres multiples, la matrice bloc-diagonale fait apparaître des bloc de JORDAN. On parle alors de matrice de vecteurs propres généralisés.

### 1.3.2 Décomposition de Schur (help schur)

La décomposition de SCHUR est proche de la décomposition spectrale car elle fait également apparaître les valeurs propres sur la diagonale d'une matrice triangulaire supérieure. Soit  $A$  une matrice carrée  $n \times n$  alors :

$$A = UTU^*$$

avec

- $U$  matrice unitaire  $UU^* = I$ ,
- $T$  matrice triangulaire supérieure :

$$T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & * & \cdots & \vdots \\ & & \lambda_3 & \cdots & \vdots \\ & \emptyset & & \ddots & * \\ & & & & \lambda_n \end{bmatrix} .$$

<sup>4</sup> $|c|$  désigne le module du complexe  $c$ ,  $\text{Re}(c)$  sa partie réelle.

La décomposition de SCHUR réelle fait apparaître des blocs  $2 \times 2$  sur la diagonale qui correspondent aux valeurs propres complexes  $\lambda_i^c$  :

$$T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & * & * & \cdots & * \\ & \ddots & * & * & \cdots & \vdots \\ & & \operatorname{Re}(\lambda_i^c) & \operatorname{Im}(\lambda_i^c) & \cdots & \vdots \\ & & -\operatorname{Im}(\lambda_i^c) & \operatorname{Re}(\lambda_i^c) & \cdots & \vdots \\ & & & & \ddots & * \\ \emptyset & & & & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

La décomposition de SCHUR est utilisée pour calculer des sous-espaces invariants, c'est-à-dire des sous-espaces propres de dimensions supérieures à 1. En effet, à partir de la décomposition de SCHUR, on peut écrire :

$$AU = UT,$$

si l'on partitionne en 2 cette égalité, on obtient:

$$A [U_1, U_2] = [U_1, U_2] \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ \emptyset & T_{22} \end{bmatrix}.$$

La première composante de cette égalité s'écrit:

$$AU_1 = U_1 T_{11}$$

qui traduit que les vecteurs colonnes de  $U_1$  engendrent un sous-espace propre associé aux valeurs propres:  $\operatorname{diag}(T_{11})$ .

Les décompositions spectrale et de SCHUR sont utilisées pour résoudre les équations de RICCATI. la décomposition de SCHUR est réputée être plus stable numériquement pour les équations de taille élevée ( $n \geq 100$ ).

### 1.3.3 Décomposition de Cholesky (help chol)

Soit  $A_{n \times n}$  une matrice définie positive, alors  $A$  peut être décomposée de la façon suivante :

$$A = L L^T \quad \text{avec} \quad L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ l_{n1} & \cdots & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

C'est la généralisation aux matrices de la fonction *racine carrée*. Elle est utilisée pour

- paramétriser les matrices dont on veut garantir qu'elles sont définies positives (pondérations, covariances, ...),
- dans le forme *square root* de l'algorithme d'actualisation de la matrice de covariance du filtre de KALMAN.

### 1.3.4 Décomposition en valeurs singulières -SVD (help svd)

Les valeurs singulières d'une matrice  $A$  sont les racines carrées des valeurs propres de  $A^T A$ . on les note  $\sigma_i$  :

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(A^T A)}.$$

Alors que les valeurs propres sont liées aux directions invariantes par la transformation  $A$ , les valeurs singulières contiennent l'information "métrique" sur cette transformation. L'image du cercle unité par  $A$  est un ellipsoïde dont la longueur des demi-axes principaux correspondent aux valeurs singulières maximale et minimale :

$$\sigma_{max} = \max_{u \neq 0} \frac{\|Au\|}{\|u\|} \quad \text{et} \quad \sigma_{min} = \min_{u \neq 0} \frac{\|Au\|}{\|u\|}$$

où  $\|x\|$  désigne la norme euclidienne de  $x$ :  $\|x\| = \sqrt{x^T x}$ .

**Décomposition en valeurs singulières** Soit  $A$  une matrice de dimension  $m \times n$  et de rang  $r$  ( $r < \min(m, n)$ ).  $A$  peut être factorisée sous la forme:

$$\begin{aligned} A &= U_{m \times m} \Sigma_{m \times n} V_{n \times n}^* \\ &= [U_1, U_2] \begin{bmatrix} \Sigma_{1_r \times r} & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^* \\ V_2^* \end{bmatrix} \begin{array}{l} |r \times n \\ |r \times (n-r) \end{array} \end{aligned}$$

avec :

- $U \in \mathbb{C}^{m \times m}$  matrice unitaire ( $UU^* = I_{m \times m}$ ),
- $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$  matrice unitaire ( $VV^* = I_{n \times n}$ ),
- $\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_i)$ ,  $i = 1, \dots, r$  avec  $\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_r > 0$ ,
- $U_1$  et  $U_2$  de dimension  $m \times r$  et  $m \times (m - r)$  respectivement,
- $V_1$  et  $V_2$  de dimension  $n \times r$  et  $n \times (n - r)$  respectivement.

$U$  est la matrice des vecteurs singuliers  $U = [u_1, u_2, \dots, u_m]$  (voir figure 1.2).  $V$  est la matrice des vecteurs dont les images par  $A$  sont les vecteurs singuliers  $V = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ . En effet :

$$Av_i = U \Sigma V^* v_i \quad \text{or}$$

$$V^* v_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 1 \\ \vdots \\ \\ i \\ \\ \\ n \end{array} \quad \text{car } V \text{ est unitaire}$$



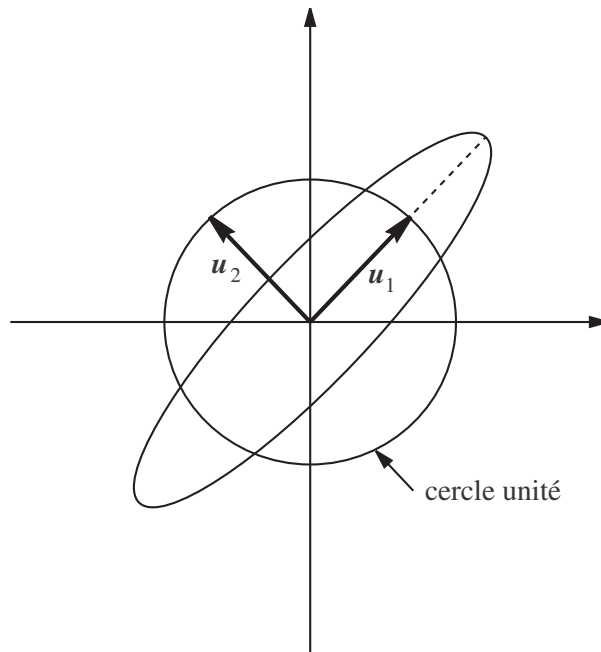


Figure 1.2: Illustration en dimension 2

$$A v_i = \sigma_i u_i .$$

Les dernières colonnes de  $V$  correspondantes aux valeurs singulières nulles engendrent le *noyau* de la matrice  $A$ , les autres colonnes correspondantes aux valeurs singulières non-nulles engendrent l'espace image de  $A$

### Pseudo-inverse de Moore-Penrose

$$A^+ = V \Sigma^+ U^* = V_1 \Sigma_1^+ U_1^*$$

avec  $\Sigma^+ = \begin{bmatrix} \Sigma_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  et  $\Sigma_1^{-1} = \text{diag}(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_r})$ .

- $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$  si  $m > n$  et  $r = n$  ( $A$  de rang plein en colonne),
- $A^+ = A^T (A A^T)^{-1}$  si  $m < n$  et  $r = m$  ( $A$  de rang plein en ligne).

(Il s'agit d'égalité algébrique, d'un point de vue numérique c'est totalement différent).

### Propriétés des valeurs singulières

- $\sigma_{\max}(\cdot)$  est une norme matricielle, on a donc toutes les propriétés des normes:  
 $\sigma_{\max}(AB) \leq \sigma_{\max}(A) \sigma_{\max}(B)$ .
- $\sigma_{\max}(A) = \max_{u / \|u\| \neq 0} \frac{\|Au\|}{\|u\|}$ .

- $\sigma_{\min}(A^{-1}) = \frac{1}{\sigma_{\max}(A)}$ ;  $\sigma_{\max}(A^{-1}) = \frac{1}{\sigma_{\min}(A)}$ .
- $\sigma_{\max}(VAU) = \sigma_{\max}(A) \quad \forall U, V$  unitaires.
- Si  $A$  est symétrique alors  $\sigma_i(A) = |\lambda_i(A)|$ .
- Propriété de singularité

$$\sigma_{\max}(E) < \sigma_{\min}(A) \Rightarrow \sigma_{\min}(A + E) > 0$$

$\sigma_{\min}(A)$  représente la taille minimale de la matrice  $E$  telle que  $A + E$  soit singulière.

## Chapter 2

# Analyse des systèmes multi-variables par les valeurs singulières

### 2.1 Généralités

Soit un système multi-variable ( $n$  états,  $m$  commandes,  $p$  sorties) définit:

- par sa matrice de transfert <sup>1</sup>:

$$\frac{Y}{U}(s) = G(s),$$

- par une réalisation minimale:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$$

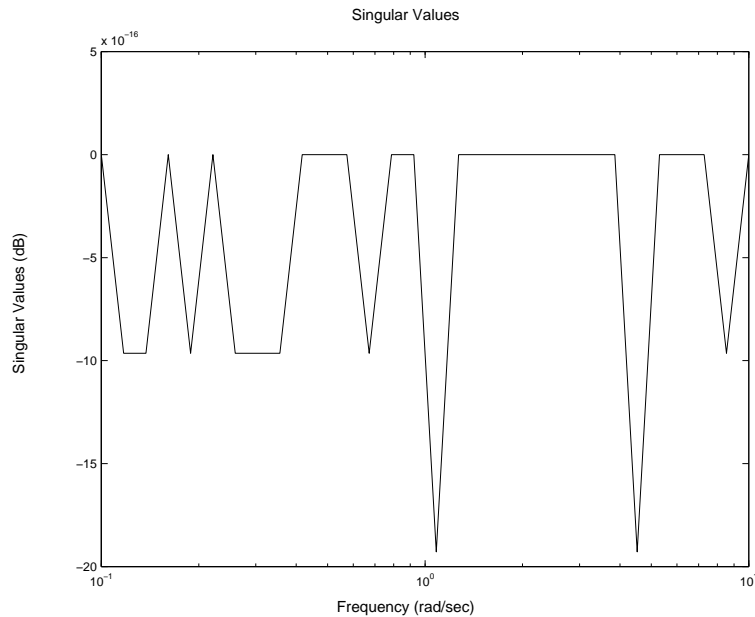
Pour analyser sa réponse fréquentielle, on peut :

- tracer les  $p \times m$  caractéristiques de BODE (BLACK ou NYQUIST)  $\Rightarrow 2 \times p \times m$  courbes !! (gain et phase),
- tracer les valeurs singulières (surtout la min et la max) de  $G(j\omega)$  en fonction de la pulsation  $\omega$  (`help sigma`).

\* Dans le cas mono-variable, le tracé de la valeur singulière correspond à la courbe de gain de la caractéristique de BODE.

---

<sup>1</sup>La notation  $\frac{Y}{U}(s)$  est abusive car dans le cas général  $u$  est un vecteur.

Figure 2.1: Valeur singulière de  $\frac{1-s}{1+s}$ 

- \* Dans le cas multi-variable, le tracé des  $r$  valeurs singulières ( $r = \min(m, p)$ ) offre une information plus synthétique, mais la perte de la notion de phase peut-être dommageable pour certaines analyses.

**Exercice:** tracer  $\sigma\left(\frac{1-s}{1+s}\right)\Big|_{s=j\omega}$ . La commande Matlab `sigma(tf([-1 1],[1 1]))` conduit alors au diagramme suivant (figure 2.1), c'est-à-dire une valeur singulière unitaire sur toute la plage de fréquence. Esquisser le tracé de  $\sigma\left(1 - \frac{1-s}{1+s}\right)\Big|_{s=j\omega}$ .

## 2.2 Application des valeurs singulières: marge de module

### 2.2.1 Rappel mono-variable: insuffisance des notions de marge de gain et de phase

Considérons la boucle générale d'asservissement présentée figure 2.2. On définit le gain de boucle:  $L(s) = G(s)K(s)$ . La figure 2.2.1 rappelle la définition des marges de gain et de phase dans le plan de NYQUIST. Ces notions indiquent l'éloignement du tracé de  $G(j\omega)K(j\omega)$  par rapport au point critique  $(-1, 0)$ . On peut également les interpréter sur les diagrammes de BODE et de BLACK.

Rappelons qu'il y a perte de stabilité lorsque ce tracé traverse le point critique.

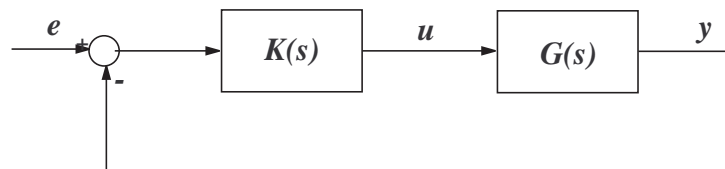


Figure 2.2: Boucle d'asservissement.

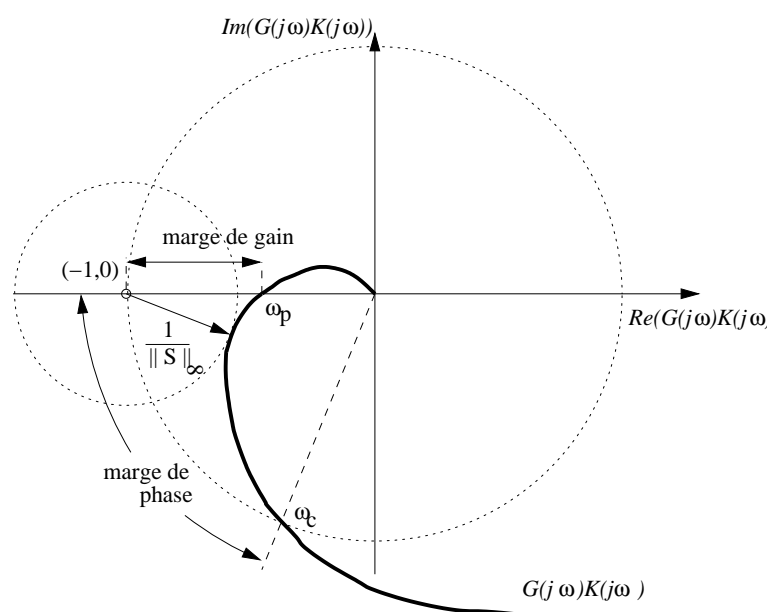


Figure 2.3: Marges de gain, de phase et de module dans le plan de NYQUIST.

La marge de gain en dB est:

$$\text{marge de gain} = -20 \log_{10} |G(j\omega_p)K(j\omega_p)| \quad (2.1)$$

où  $\omega_p$  est la pulsation à laquelle le tracé de NYQUIST traverse le demi-axe de phase  $180^\circ$  (*phase crossover*). Elle mesure de combien le gain peut varier à cet endroit avant de toucher le point critique. La marge de phase est:

$$\text{marge de phase} = \text{Arg}(G(j\omega_c)K(j\omega_c)) - 180^\circ \quad (2.2)$$

où  $\omega_c$  est la pulsation à laquelle le tracé de NYQUIST traverse le cercle unité centré à l'origine (pulsation de coupure). Elle mesure de combien la phase peut varier (rotation du tracé autour de l'origine) avant de rencontrer le point critique.

Enfin la marge de retard est liée à la marge de phase exprimée en degré par la relation :

$$\text{marge de retard} = \text{marge de phase} \frac{\pi}{180\omega_c} \quad (2.3)$$

Elle mesure la valeur minimale du retard pur introduit dans la boucle qui déstabilise le système. Cette marge est particulièrement pertinente lorsque le lieu de NYQUIST traverse plusieurs fois le cercle unité. C'est souvent le cas des structures flexibles où la présence de résonances et anti-résonances se traduisent par des boucles sur le lieu de NYQUIST. La marge de retard permet alors de mettre en évidence qu'une marge de phase même confortable peut être critique si la pulsation  $\omega_c$  correspondante est élevée.

En comparaison, la marge de module représente la plus petite distance de  $L(j\omega)$  au point critique et correspond donc au rayon  $r$  du cercle centré sur le point critique qui tangente le courbe  $L(j\omega)$ :

$$r = \min_{\omega} |1 + G(j\omega)K(j\omega)|$$

La figure 2.7 met en évidence un cas particulier où les marges de gain et de phase sont confortables mais la marge de module trop faible.

## 2.2.2 Marge de module dans le cas multi-variable

Les valeurs singulières permettent de généraliser directement au cas des systèmes multi-variables la notion de marge de module. La plus petite distance du gain de boucle  $G(j\omega)K(j\omega)$  au point critique s'écrit alors:

$$r = \min_{\omega} \sigma_{\min}(I + G(j\omega)K(j\omega))$$

soit encore:

$$r = \min_{\omega} \frac{1}{\sigma_{\max}(I + G(j\omega)K(j\omega))^{-1}}$$

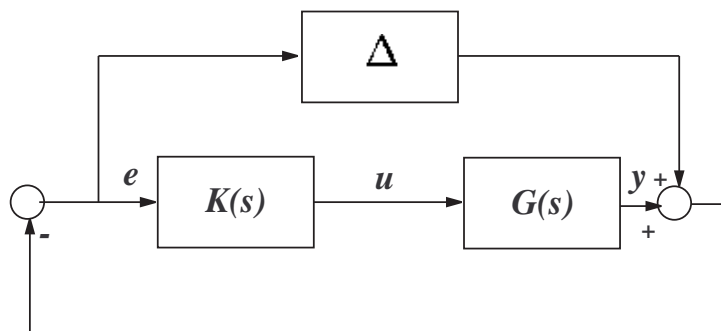


Figure 2.4: Boucle d'asservissement perturbé (perturbation additive).

$$\frac{1}{r} = \max_{\omega} \sigma_{max}(I + G(j\omega)K(j\omega))^{-1} = \|S(s)\|_{\infty}$$

avec  $S(s) = (I + G(s)K(s))^{-1}$  la fonction de sensibilité en sortie <sup>2</sup>.

On notera également que dans le cas multi-variable on peut distinguer :

- $L(s) = G(s)K(s)$  qui représente le transfert de boucle lorsque l'on coupe au niveau des sorties  $y$  du système,
- $L^*(s) = K(s)G(s)$  qui représente le transfert de boucle lorsque l'on coupe au niveau des commandes  $u$  du système.

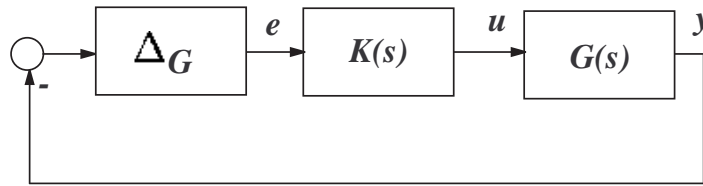
On peut pour chacun de ces transferts tracer les lieux de BLACK chaîne par chaîne, les autres chaînes étant ouverte et/ou fermée. Cela permet d'apprécier les couplages entre les chaînes. On notera toutefois qu'il faut fermer les autres chaînes, pour apprécier les marges de gain, de phase et de retard relatives à une chaîne. La marge de module (en sortie) permet de déterminer la taille de la plus petite perturbation additive  $\Delta$  déstabilisante selon le schéma de la figure 2.4. En effet l'application directe de la propriété de singularité des valeurs singulières énoncée page 26 permet d'écrire :

La boucle fermée est stable si (condition suffisante)  $\sigma_{max}(\Delta) < \min_{\omega} \sigma_{min}(I + G(j\omega)K(j\omega))$

**Exercice:** à partir de la plus petite perturbation additive  $\Delta$  déstabilisant la boucle représentée sur la figure 2.4, trouver le gain  $\Delta_G$  qui déstabilise la boucle présentée sur la figure 2.5.

<sup>2</sup>Comme nous le verrons ultérieurement la norme  $H_{\infty}$  d'un transfert  $T(s)$  est:

$$\|T\|_{\infty} = \max_{\omega} \sigma_{max}(T(j\omega))$$

Figure 2.5: Boucle d'asservissement perturbé (perturbation  $\Delta_G$  dans la boucle).

### 2.2.3 Illustration

Considérons la boucle d'asservissement présentée figure 2.2 dans le cas SISO. Le transfert de boucle (après développement) s'écrit :

$$L(s) = K(s)G(s) = \frac{2}{s-1} + \frac{3s^2 + 0.01s + 1}{2s^2 + 0.01s + 1}.$$

- Tracer les lieux de BLACK et de NYQUIST.
- Vérifier sur ces lieux la stabilité de la boucle fermée.
- Calculer les marges de gain, de phase et de module.

**Solution sous Matlab:** la séquence Matlab qui suit conduit aux figures 2.6 à 2.8. On peut vérifier dans le plan de NYQUIST que le lieu entoure effectivement une fois le point critique (le lieu complémentaire pour les pulsations "négatives" est automatiquement tracé). Etant donné qu'il y a un pôle instable en boucle ouverte, on peut garantir que la boucle fermée est stable. Dans le plan de BLACK, cela se traduit par un départ du lieu sur l'axe au dessus du point critique. Enfin, les marges de gain et phase sont correctes mais la marge de module (ou plutôt le minimum de la valeur singulière de  $1 + L$ ) permet de déceler la proximité du lieu avec le point critique à la pulsation de  $0.7 \text{ rds}$ .

```
>> L=tf(2,[1 -1])+0.01*tf([3 0.01 1],[2 0.01 1]);
>> black(L)
>> figure,nyquist(L)
>> [Mg,Mp,wc,wp]=margin(L)
```

```
Mg =
    0.5025
```

```
Mp =
    60.5275
```

```
wc =
    0
```



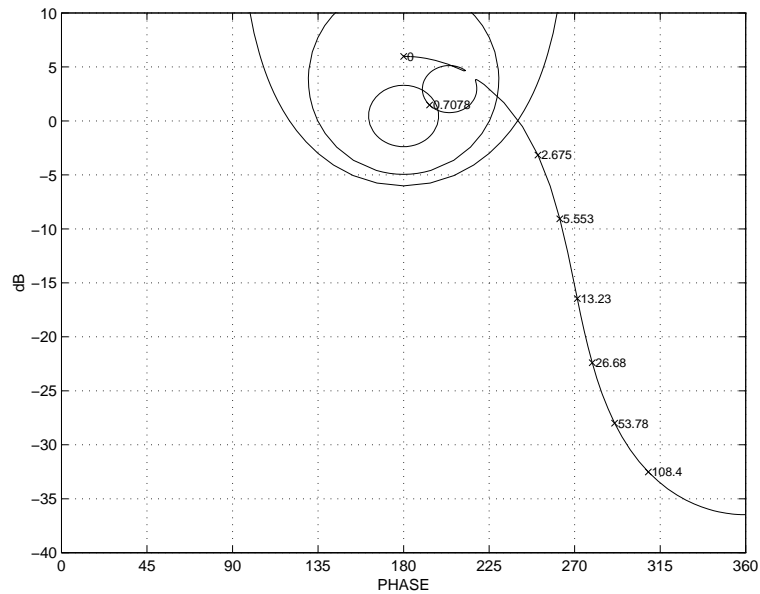


Figure 2.6: Lieu de BLACK de  $L(s)$

```
wp =
    1.7137
>> figure,sigma(1+L)
```

## 2.3 Exercice sur l'analyse par les valeurs singulières (sous Matlab)

Le modèle  $G$  de vol latéral d'un avion rigide est donné par la représentation d'état :

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{p} \\ \dot{r} \\ \dot{\phi} \\ n_y \\ p \\ r \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.080 & 0.104 & -0.995 & 0.045 & 0 & 0.016 \\ -2.016 & -0.843 & 0.280 & 0 & 0.342 & 0.192 \\ 1.711 & -0.179 & -0.293 & 0 & 0.010 & -0.782 \\ 0 & 1.000 & 0.104 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0.0224 & 0.0013 & 0.0015 & 0 & -0.0002 & -0.0023 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ p \\ r \\ \phi \\ \frac{dp}{dr} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Une loi de commande par retour statique de sortie a été synthétisée afin de placer correctement les modes rigides :

$$K = \begin{bmatrix} -122. & 2.71 & 0.225 & 2.71 \\ 25.3 & 0.102 & -1.88 & 0.042 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

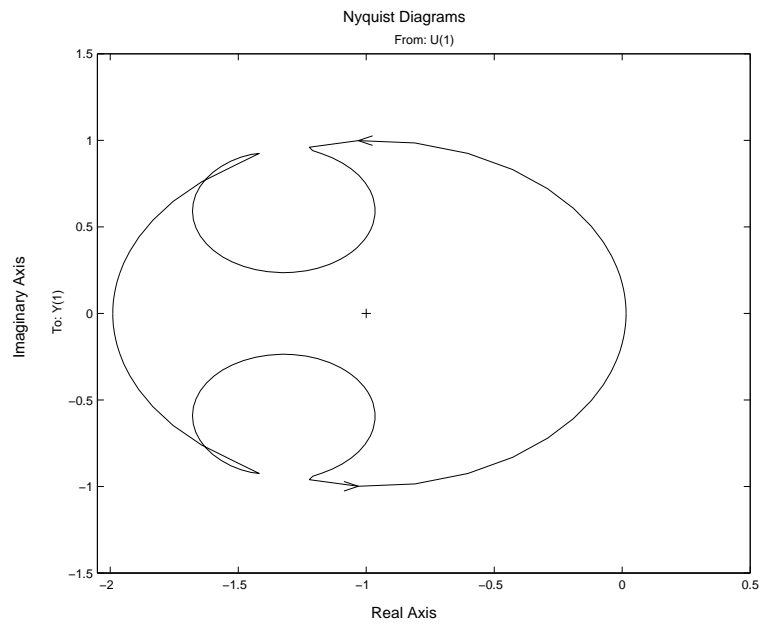


Figure 2.7: Lieu de NYQUIST de  $L(s)$

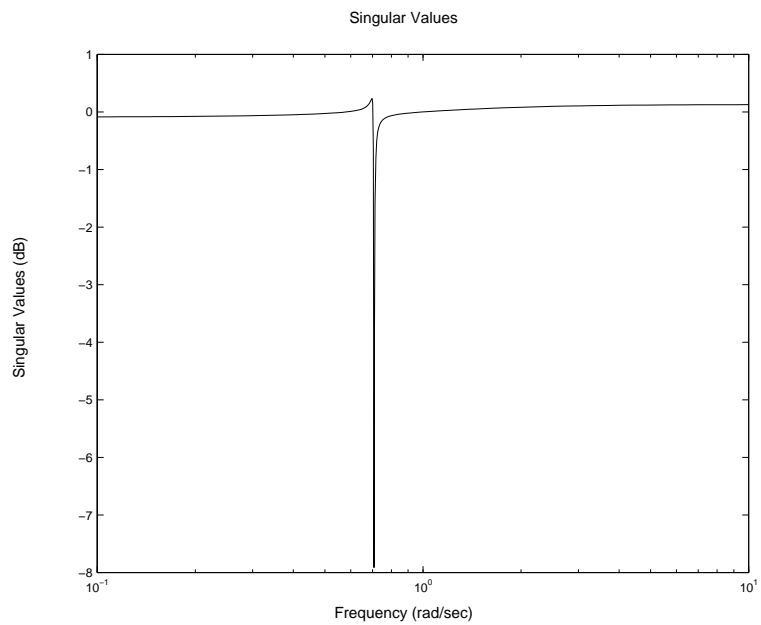


Figure 2.8: Valeur singulière de  $1 + L(s)$

## 2.3 EXERCISE SUR L'ANALYSE PAR LES VALEURS SINGULIÈRES (SOUS MATLAB) 35

---

- Analyser la boucle ouverte  $KG$  à l'aide des outils graphiques monovariabiles (`rlocus`, `black`, `nyquist`, `margin`, ...)
- Tracer les valeurs singulières de  $I + K(j\omega)G(\omega)$  en fonction de  $\omega$ . En déduire la marge de module et la pulsation critique  $\omega_c$  associée à cette marge.
- Déterminer par `svd` la plus petite perturbation additive  $\Delta$  qui déstabilise la boucle, c'est à dire tel que  $KG + \Delta$  passe par le point critique. En déduire le gain de boucle  $\Delta_G$  en entrée du système qui déstabilise la boucle (c'est à dire tel que  $KG\Delta_G$  passe par le point critique). Commentaires.
- Des retards purs de  $400\text{ ms}$  sur les entrées de  $G$  sont maintenant pris en compte (approximation de PADE (`pade`) à l'ordre 1). Modifiez en conséquence le modèle  $G$  et reprenez les analyses précédentes.



## Chapter 3

# Représentation d'état des systèmes multivariables définis par des matrices de transfert

### 3.1 Problème général

Soit un système à  $m$  entrées et  $p$  sorties défini par une matrice de transfert:

$$Z(s) = [z_{ij}(s)]_{p \times m}$$

trouver une représentation d'état:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$$

- telle que:  $Z(s) = D + C(sI - A)^{-1}B$ , c'est à dire une réalisation qui soit équivalente du point de vue du comportement entrée-sortie,
- qui soit minimale, c'est à dire entièrement gouvernable et observable car la matrice de transfert initiale ne représente que la partie gouvernable et observable du système.

**Exemple introductif:** si l'on prend l'exemple trivial de la double intégration en supposant disponible la mesure de position et la mesure dérivée (vitesse), soit:

$$Z(s) = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix}}{s^2}$$

une réalisation d'état correcte s'écrit immédiatement en choisissant la position et la vitesse comme vecteur d'état :

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \\ y \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ u \end{bmatrix}$$

Pourtant, il est facile de se rendre compte que MATLAB® fournit sur cet exemple une réalisation non-minimale (d'ordre 3) et donc incorrecte comme le montre la session qui suit :

```
>> sys=tf({1;1},{[1 0 0];[1 0]})
```

```
Transfer function from input to output...
```

```
      1
#1:  ---
     s^2
```

```
      1
#2:  -
     s
```

```
>> [a,b,c,d]=ssdata(sys)
```

```
a =
```

```
      0      0      0
      1      0      0
      0      0      0
```

```
b =
```

```
      1
      0
      1
```

```
c =
```

```
      0      1      0
      0      0      1
```

$d =$

0  
0

Cela est dû au fait que la fonction `tf2ss` ne garantit pas la minimalité de la réalisation. Ce problème de minimalité est délicat à résoudre dans le cas général comme nous allons le voir dans les sections qui suivent <sup>1</sup>.

## 3.2 Rappels: gouvernabilité, observabilité, minimalité

### 3.2.1 Critères généraux

- la paire  $(A_{n \times n}, B_{n \times m})$  est gouvernable si la matrice de gouvernabilité  $\mathcal{C} = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^n B]$  est de rang  $n$ ,
- les modes ingouvernables de la paire  $(A, B)$  sont les valeurs de  $s$  pour lesquelles la matrice  $[A - sI \ | \ B]$  perd son rang,
- Dualité: Observabilité de la paire  $(A, C) \Leftrightarrow$  Gouvernabilité  $(A^T, B^T)$ .

Plus généralement, toute paire  $(A, B)$  peut se décomposer par transformation orthogonale  $U_g$  (algorithme de ROSENBROCK) de la façon suivante (`help ctrbf`) :

$$U_g^T A U_g = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad U_g^T B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

avec  $(A_{11}, B_1)$  gouvernable.  $A_{22}$  représente la partie ingouvernable.

Dualement la paire  $(A, C)$  peut se décomposer de la façon suivante (`help obsvf`) :

$$U_o^T A U_o = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ 0 & A'_{22} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C U_o = [0 \ C_2],$$

avec  $(A'_{22}, C_2)$  observable.  $A'_{11}$  représente la partie inobservable.

Le calcul pratique d'une réalisation minimale utilise ces 2 transformations de façon séquentielle (`help minreal`):

- première transformation  $U_g$ : on réduit les lignes et les colonnes du bloc ingouvernable  $A_{22}$ ,
- deuxième transformation  $U_o$ : on réduit les lignes et les colonnes du bloc inobservable  $A'_{11}$ .

<sup>1</sup>A noter que MATLAB® permet de résoudre ce problème en utilisant la macro-fonction `minreal` (réalisation minimale). L'objectif n'était pas de mettre en défaut MATLAB® mais de montrer qu'il faut être vigilant lors des passages transfert -> état (`tf2ss`).

### 3.2.2 Critères particuliers

Il existe des critères particuliers dans le cas de matrices  $A$  compagnes ou sous forme bloc diagonale de JORDAN. Voir polycopié SUPAERO: A.J. Fossard "Représentation, observation et commande des systèmes linéaires dans l'espace d'état (systèmes mono-entré/mono-sortie)" (p 90-97).

On retiendra particulièrement le critère sur les formes de JORDAN : **Si la matrice formée des dernières lignes des  $p$  blocs de la matrice  $B$  correspondants aux  $p$  blocs de Jordan de la matrice  $A$  associés à une même valeur propre  $\lambda$  n'est pas de rang  $p$  alors le système est ingouvernable.**

Ce critère permet d'affirmer que dans le cas mono-variable, la présence de 2 blocs de JORDAN (ou plus) associés à une même valeur propre entraîne l'ingouvernabilité du système.

**Exemple :** Considérons un satellite d'inertie  $J_s$  autour de son axe de tangage. Pour contrôler son attitude  $\theta_{s/i}$  par rapport au repère inertiel, on applique des couple  $u_{s/r}$  sur une roue d'inertie  $J_r$  repérée par son attitude  $\theta_{r/s}$  par rapport au satellite.

Le principe d'action/réaction nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} J_s \ddot{\theta}_{s/i} &= -u_{s/r} \\ J_r (\ddot{\theta}_{r/s} + \ddot{\theta}_{s/i}) &= u_{s/r} \end{aligned}$$

d'où la représentation d'état :

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_{s/i} \\ \theta_{s/i} \\ \dot{\theta}_{r/s} \\ \theta_{r/s} \\ y \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/J_s \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/J_s + 1/J_r \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \theta_{s/i} \\ \theta_{s/i} \\ \theta_{r/s} \\ \theta_{r/s} \\ u \end{bmatrix}$$

On a bien 2 blocs de JORDAN d'ordre 2 associés à valeur propre 0. Ce système est donc ingouvernable. En pratique, on cherche à contrôler l'attitude du satellite mais la dérive de la roue ne pas être contrôlée sans un organe de commande supplémentaire (en l'occurrence les jets à réaction du système de contrôle d'orbite).

### 3.3 Rappel: passage transfert/état dans le cas SISO (Single Input Single Output)

(voir [4], pages 27 à 30). Dans le cas SISO, l'ordre de la représentation est directement le degré du dénominateur de la fonction de transfert.



### 3.3.1 Formes diagonales

S'il n'y a que des valeurs propres simples, on peut décomposer  $Z(s)$  en éléments simples :

$$F(s) = \frac{N(s)}{\prod_1^n (s + \lambda_i)} = \sum_1^n \frac{\alpha_i}{s + \lambda_i} .$$

On a alors directement une réalisation minimale :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \hline y \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cccc|c} -\lambda_1 & & & & \alpha_1 \\ & -\lambda_2 & & & 1 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & -\lambda_n & \alpha_n \\ \hline 1 & \alpha_2 & \cdots & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x \\ \hline u \end{bmatrix} .$$

Les éléments  $\alpha_i$  et 1 sont permutable dans  $B$  et  $C$ .

### 3.3.2 Formes compagnes

Soit :

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + b_{m-2} s^{m-2} + \cdots + b_1 s + b_0}{1 s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

Une solution générale consiste alors à chercher un forme compagne horizontale ou verticale (on suppose  $m < n$ , c'est-à-dire que l'on a préalablement isolé la transmission directe du transfert) .

#### Formes compagnes horizontales

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_h \\ \hline y \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ \hline -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} & 1 \\ b_0 & \cdots & b_m & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_h \\ \hline u \end{bmatrix}$$

Une formulation plus générale fait intervenir une factorisation du numérateur:

$$\boxed{N(s) = \mathcal{C}(s)\mathcal{B}(s)}$$

Les deux polynômes  $\mathcal{C}(s)$  et  $\mathcal{B}(s)$  ou, dans le cas multi-variable, les matrices polynomiales colonne  $\mathcal{C}(s)$  et ligne  $\mathcal{B}(s)$  (voir section 3.6.4), alimentent les matrices  $C$  et  $B$

de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}'_h = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x'_h + \mathcal{A}^{-1} \begin{bmatrix} \vdots \\ \ddot{\mathcal{B}}(0)/2! \\ \dot{\mathcal{B}}(0)/1! \\ \mathcal{B}(0) \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} \mathcal{C}(0) & \frac{\dot{\mathcal{C}}(0)}{1!} & \frac{\ddot{\mathcal{C}}(0)}{2!} & \cdots & \cdots \end{bmatrix} x'_h \end{array} \right.$$

avec:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \dot{\mathcal{N}}(0) = \left. \frac{\partial \mathcal{N}(s)}{\partial s} \right|_{s=0} \quad (\mathcal{N}(s) = \mathcal{C}(s) \text{ ou } \mathcal{B}(s)) \quad (3.1)$$

### Formes compagnes verticales

$$\begin{bmatrix} \dot{x}'_v \\ y \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cccc|ccc} -a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 & b_m & \\ -a_1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \vdots & \\ -a_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_0 & \\ \hline 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \end{array} \right] \begin{bmatrix} x'_v \\ u \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Comme précédemment, une formulation plus générale fait intervenir une factorisation du numérateur:

$$\boxed{N(s) = \mathcal{C}(s)\mathcal{B}(s)}$$

Les deux polynômes  $\mathcal{C}(s)$  et  $\mathcal{B}(s)$  ou, dans le cas multi-variable, les matrices polynomiales colonne  $\mathcal{C}(s)$  et ligne  $\mathcal{B}(s)$  (voir section 3.6.4), alimentent les matrices  $C$  et  $B$  de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}'_v = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ -a_1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} x'_v + \begin{bmatrix} \vdots \\ \ddot{\mathcal{B}}(0)/2! \\ \dot{\mathcal{B}}(0)/1! \\ \mathcal{B}(0) \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} \mathcal{C}(0) & \frac{\dot{\mathcal{C}}(0)}{1!} & \frac{\ddot{\mathcal{C}}(0)}{2!} & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \mathcal{A}^{-1} x'_v \end{array} \right.$$

avec  $\mathcal{A}$  définie par l'équation 3.1.

### 3.3.3 Formes de Jordan

Elles apparaissent en présence de valeurs propres multiples. Soit :

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s + \lambda)^n} = \frac{\mathcal{C}(s)\mathcal{B}(s)}{(s + \lambda)^n}$$

alors :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{ccccc|c} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \ddot{\mathcal{B}}(-\lambda)/2! \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & \dot{\mathcal{B}}(-\lambda)/1! \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\lambda & \mathcal{B}(-\lambda) \end{array} \right] \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$$

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} \mathcal{C}(-\lambda) & \frac{\dot{\mathcal{C}}(-\lambda)}{1!} & \frac{\ddot{\mathcal{C}}(-\lambda)}{2!} & \cdots & \cdots & 0 \end{array} \right]$$

Cas particuliers: pour les systèmes SISO on prend souvent:  $\mathcal{C}(s) = 1$  et  $\mathcal{B}(s) = N(s)$  ou  $\mathcal{C}(s) = N(s)$  et  $\mathcal{B}(s) = 1$ .

## 3.4 Cas SIMO (Single Input Multi Output) et MISO (Multi Input Single output)

Les méthodes précédentes peuvent s'étendre directement aux matrices de transfert ligne (cas MISO) ou colonne (cas SIMO). L'ordre de la représentation est également le degré de  $\Psi(s)$ : dénominateur commun de la matrice de transfert sous la forme:

$$Z(s) = \frac{M(s)}{\Psi(s)}$$

Comme dans le cas SISO il faut isoler préalablement la transmission directe et normalisé à 1 le coefficient de plus haut degré de  $\Psi(s)$ .

**Exemple:**

$$Z(s) = \frac{\begin{bmatrix} b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + b_{m-2} s^{m-2} + \cdots + b^1 s + b_0 \\ c_m s^m + c_{m-1} s^{m-1} + c_{m-2} s^{m-2} + \cdots + c^1 s + c_0 \end{bmatrix}}{1 s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

alors:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \\ \hline b_0 & \cdots & b_m & 0 & \cdots \\ c_0 & \cdots & c_m & 0 & \cdots \end{array} \right] \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$$

### 3.5 Cas MIMO avec des modes simples: méthode de Gilbert

S'il le dénominateur  $\Psi(s)$  n'a que des racines simples, alors on peut décomposer la matrice de transfert en éléments simples:

$$Z_{p \times m}(s) = \frac{M(s)}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2) \cdots (s + \lambda_q)} = \sum_{i=1}^q \frac{M_i}{s + \lambda_i}.$$

L'ordre du système est la somme des rangs des matrices  $M_i$  (de dimension  $p \times m$ ):

$$n = \sum_{i=1}^q \text{rang}(M_i) = \sum_{i=1}^q r_i \quad \text{avec} \quad r_i = \text{rang}(M_i)$$

$$\exists C_i(p \times r_i), \quad B_i(r_i \times m) \quad / \quad M_i = C_i B_i$$

La représentation d'état est sous forme diagonale (avec  $\lambda_i$  apparaissant  $r_i$  fois), les matrices  $B$  et  $C$  sont formées des matrices  $B_i$  et  $C_i$ .

**Exemple:**

$$Z(s) = \frac{\begin{bmatrix} s^2 + 4s + 1 & s \\ 4s & 3s + 1 \end{bmatrix}}{s^2 + s} = \frac{\begin{bmatrix} 3s + 1 & s \\ 4s & 3s + 1 \end{bmatrix}}{s(s + 1)} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{s} + \frac{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}}{s + 1} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{s} + \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} [2 \quad 1]}{s + 1} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Les valeurs propres 0 et -1 vont donc apparaître respectivement 2 fois et 1 fois dans la



représentation d'état qui s'écrit:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{ccc|cc} 0 & & & 1 & 0 \\ & 0 & & 0 & 1 \\ & & -1 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$$

## 3.6 Cas général

Dans le cas général, la première question à se poser est: quel est l'ordre de la réalisation minimale?. LA MÉTHODE DES INVARIANTS qui est présentée ci-dessous permet de répondre à cette question et permet également de trouver une réalisation minimale bloc-diagonale. On supposera dans ce qui suit que la matrice de transfert de départ est strictement propre (tous les polynômes du numérateur sont de degré strictement inférieur au degré du dénominateur commun  $\Psi(s)$ ). Dans le cas contraire, on prendra soin d'extraire préalablement la transmission directe et de la rajouter directement à la réalisation minimale finalement obtenue. On note:

$$Z(s)_{p \times m} = \frac{M(s)_{p \times m}}{\Psi(s)}$$

### 3.6.1 Diagonalisation d'une matrice polynomiale par opérations élémentaires

Etant donnée une matrice polynomiale  $M(s)$  de dimension  $p \times m$ , il est toujours possible de trouver des matrices polynomiales, mais à déterminant constant (i.e. indépendant de  $s$  et non nul)  $V(s)$  et  $W(s)$  de dimensions  $p \times p$  et  $m \times m$  telles que :

$$M(s) = V(s)\Gamma(s)W(s)$$

avec  $\Gamma(s)$  diagonale si  $m = p$  ou quasi diagonale si  $p \neq m$  (on complète avec des 0) :

$$\Gamma(s) = \begin{bmatrix} \gamma_1(s) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \gamma_m(s) & & \\ & & & & \end{bmatrix} \quad \text{cas } p = m$$

$$\Gamma(s) = \begin{bmatrix} \gamma_1(s) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \gamma_p(s) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{cas } p < m$$

$$\Gamma(s) = \begin{bmatrix} \gamma_1(s) & & & \\ & \ddots & & \\ & & \gamma_m(s) & \\ & & 0 & \\ & & \vdots & \\ & & 0 & \end{bmatrix} \quad \text{cas } p > m$$

Les éléments  $\gamma_i(s)$  sont appelés les *invariants* de la matrice  $M(s)$ . Ils ont la propriété suivante:  $\gamma_i$  divise  $\gamma_{i+1}$ .

On peut écrire:

$$V^{-1}(s)M(s)W^{-1}(s) = \Gamma(s)$$

$V^{-1}(s)$  et  $W^{-1}(s)$  sont des matrices de pré-multiplication et de post-multiplication calculées pour diagonaliser  $M(s)$ .

**Exemple:**

$$Z(s) = \frac{1}{(s+2)^2} \begin{bmatrix} s+3 & 3s+8 \\ 1 & s+4 \end{bmatrix} \searrow_{M(s)}$$

Diagonalisation de  $M(s)$  par pré et post multiplication:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -s-3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+3 & 3s+8 \\ 1 & s+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -s^2-4s-4 \\ 1 & s+4 \\ 1 & s+4 \\ 0 & -s^2-4s-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & s+4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$V^{-1}(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -s-3 \end{bmatrix} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (s+2)^2 \end{bmatrix}}_{\Gamma(s)} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & s+4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{W^{-1}(s)}$$

$$V(s) = \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad W(s) = \begin{bmatrix} 1 & s+4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Z(s) = \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+2)^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & s+4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(voir aussi les exemples 13,14 et 15 pages 38 et 39 de la référence [4].)

### 3.6.2 Calcul algorithmique des invariants

En pratique, l'étape de diagonalisation précédente est assez laborieuse. L'algorithme que nous présentons ici permet simplement de calculer les invariants  $\gamma_i(s)$  sans calculer les matrices  $V(s)$  et  $W(s)$ . On peut alors en déduire l'ordre du système et la structure de la matrice dynamique  $A$  dans une *certaine base*. Pour trouver les matrices  $B$

et  $C$  correspondantes, il sera préférable, dans certains cas (cas des pôles réels multiples), de ne pas chercher les matrices  $V(s)$  et  $W(s)$  mais d'appliquer la méthode du graphe minimal (voir section 3.8) connaissant l'ordre et la structure de la dynamique du système.

Calcul direct des  $\gamma_i(s)$ : on pose:

- $\Delta_0 = 1$ ,
- $\Delta_1 = \text{pgcd}^2$  des éléments  $m_{ij}(s)$  de  $M(s)$ ,
- $\Delta_2 = \text{pgcd}$  des mineurs d'ordre 2 de  $M(s)$ ,
- $\vdots$
- $\Delta_i = \text{pgcd}$  des mineurs<sup>3</sup> d'ordre  $i$  de  $M(s)$  ( $i = 1, \dots, \min(m, p)$ ).

On a alors:  $\boxed{\gamma_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_0}, \gamma_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \dots, \gamma_i = \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}}}$ .

**Exemple:**

$$M(s) = \begin{bmatrix} s+3 & 3s+8 \\ 1 & s+4 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_0 = 1$$

$$\Delta_1 = 1$$

$$\Delta_2 = s^2 + 7s + 12 - 3s - 8 = (s+2)^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \gamma_1 &= 1 \\ \gamma_2 &= (s+2)^2 \end{aligned}$$

### 3.6.3 Invariants d'une matrice rationnelle

$$M(s) = V(s)\Gamma(s)W(s) \quad \Rightarrow \quad Z(s) = V(s) \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1(s)}{\Psi(s)} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \frac{\gamma_i(s)}{\Psi(s)} & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} W(s)$$

Il faut alors simplifier les fractions rationnelles  $\frac{\gamma_i(s)}{\Psi(s)}$  autant que se peut:

$$\frac{\gamma_i(s)}{\Psi(s)} = \frac{\epsilon_i(s)}{\Psi_i(s)} \quad \text{avec } \epsilon_i(s) \text{ et } \Psi_i(s) \text{ premiers entre eux.}$$

<sup>2</sup>Plus Grand Commun Diviseur

<sup>3</sup>C'est-à-dire toutes les matrices  $i \times i$  que l'on peut extraire de  $M(s)$ .

Il peut y avoir éventuellement simplification totale:  $\frac{\gamma_i(s)}{\Psi(s)} = \epsilon_i$ .

$$Z(s) = V(s) \begin{bmatrix} \frac{\epsilon_1(s)}{\Psi_1(s)} & & & & & 0 \\ & \frac{\epsilon_2(s)}{\Psi_2(s)} & & & & \vdots \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & & & \frac{\epsilon_k(s)}{\Psi_k(s)} & & \vdots \\ & & & & \epsilon_{k+1} & \vdots \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & \epsilon_p & 0 \end{bmatrix} W(s) \quad (\text{hyp: } p < m).$$

**L'ordre du système est égal à la somme des degrés des dénominateurs des invariants rationnels réduits:**

$$n = \sum_{i=1}^{\min(m,p)} \text{degré}(\Psi_i(s)).$$

On peut également en déduire le polynôme caractéristique de la réalisation minimale :

$$\det(sI - A) = \prod_{i=1}^{\min(m,p)} \Psi_i(s) = n = \prod_{i=1}^k \Psi_i(s).$$

**Exemple:**

$$Z(s) = \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+2)^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & s+4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{système d'ordre 2.}$$

### 3.6.4 Construction d'une réalisation minimale

Il suffit de décomposer la matrice numérateur en matrices élémentaires de rang 1 en utilisant les vecteur colonnes de la matrice  $V(s)$  et les vecteurs lignes de la matrice  $W(s)$  (on supposera  $p < m$ , sinon c'est la plus petite valeur de  $p$  ou de  $m$  qu'il faut considérer) :

$$Z(s) = [v_1(s), v_2(s), \dots, v_p(s)] \begin{bmatrix} \frac{\epsilon_1(s)}{\Psi_1(s)} & & & & & 0 \\ & \frac{\epsilon_2(s)}{\Psi_2(s)} & & & & \vdots \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & & & \frac{\epsilon_k(s)}{\Psi_k(s)} & & \vdots \\ & & & & \epsilon_{k+1} & \vdots \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & \epsilon_p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(s) \\ w_2(s) \\ \vdots \\ w_m(s) \end{bmatrix}$$



$$Z(s) = \sum_{i=1}^k v_i \frac{\epsilon_i(s)}{\Psi_i(s)} w_i + \sum_{i=k+1}^{\min(m,p)} v_i \epsilon_i w_i = \sum_{i=1}^k Z_i + \sum_{i=k+1}^{\min(m,p)} D_i$$

**Remarque:** les invariants constants ou polynomiaux  $\epsilon_i$  ( $i \geq k + 1$ ) correspondent à des transmissions directes qui compensent éventuellement les transmissions directes des matrices élémentaires  $Z_i(s)$  (c'est le cas de l'exemple traité ci-dessous). On peut les ignorer dans la construction de la réalisation minimale car on a pris soin d'isoler préalablement la transmission directe ( $Z(s)$  est strictement propre).

On a donc:  $Z(s) = \sum_{i=1}^k Z_i(s)$

Chaque élément  $Z_i(s)$  est représenté par des matrices élémentaires  $A_i, B_i, C_i$  calculées selon le formulaire présenté section 3.3. On remarquera que les deux facteurs polynomiaux  $\mathcal{C}(s)$  et  $\mathcal{B}(s)$  de la décomposition du numérateur  $N(s) = \mathcal{C}(s)\mathcal{B}(s)$  proposée dans ce formulaire sont respectivement la matrice ligne  $v_i(s)$  et la matrice colonne  $w_i(s)$ .

L'assemblage des représentations élémentaires conduit donc à **une réalisation minimale bloc-diagonale**.

**Exemple:**

$$Z(s) = \begin{bmatrix} s+3 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{(s+2)^2} [1 \quad s+4] + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [0 \quad -1] \searrow \text{ignoré}$$

D'où la réalisation minimale d'ordre 2 :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cc|cc} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$$

### 3.7 Calcul d'une réalisation non-minimale

On peut obtenir directement une réalisation (pas forcément minimale) de  $Z(s)_{p \times m} = \frac{M(s)}{\Psi(s)}$  en décomposant la matrice numérateur  $M(s)$  en  $\min(m, p)$  matrices de rang 1. L'ordre de cette réalisation sera donc :

$$n = \text{degré}[\Psi(s)] \times \min(m, p)$$

- si  $p \geq m$ : décomposition en colonne:

$$Z(s) = \sum_{i=1}^m \frac{M_i(s)}{\Psi(s)} [0 \quad \dots \quad 0 \quad \underbrace{1}_{i\text{ème colonne}} \quad 0 \quad \dots \quad 0]$$

avec:  $M(s) = [M_1(s), M_2(s), \dots, M_m(s)]$ .



Pour chaque terme  $M_i(s)$ , on adoptera une forme compagne horizontale ou une forme de JORDAN (cas des valeurs propres multiples). La réalisation finalement obtenue est bloc-diagonale et gouvernable mais pas nécessaire observable.

- si  $p \leq m$ : décomposition en ligne

$$Z(s) = \sum_{i=1}^p \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \frac{M^i(s)}{\Psi(s)} \quad \text{avec} \quad M(s) = \begin{bmatrix} M^1(s) \\ M^2(s) \\ \vdots \\ M^p(s) \end{bmatrix}$$

Pour chaque terme  $M^i(s)$ , on adoptera une forme compagne verticale ou une forme de JORDAN (cas des valeurs propres multiples). La réalisation finalement obtenue est bloc-diagonale et observable mais pas nécessaire gouvernable.

**Exemple:**

$$Z(s) = \frac{1}{(s+2)^2} \begin{bmatrix} s+3 & 3s+8 \\ 1 & s+4 \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} s+3 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}{(s+2)^2} + \frac{\begin{bmatrix} 3s+8 \\ s+4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}{(s+2)^2}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \left[ \begin{array}{cc|cc} -2 & 1 & & \\ 0 & -2 & & \\ \hline & & -2 & 1 \\ & & 0 & -2 \end{array} \right] x_1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} x_1 \end{cases}$$

On peut constater que la matrice formée des 2 premières colonnes de la matrice  $C$  correspondantes aux 2 blocs de JORDAN, soit:  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  n'est pas de rang 2 et traduit donc l'inobservabilité de cette réalisation d'ordre 4.

En exprimant les blocs élémentaires sous forme compagne horizontale, on obtient une autre réalisation :

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & & \\ -4 & -4 & & \\ \hline & & 0 & 1 \\ & & -4 & -4 \end{array} \right] x_2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 8 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} x_2 \end{cases}$$

La décomposition en ligne:

$$Z(s) = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [s+3 \quad 3s+8]}{(s+2)^2} + \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \quad s+4]}{(s+2)^2},$$

conduit aux deux réalisations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_3 = \left[ \begin{array}{cc|cc} -2 & 1 & & \\ 0 & -2 & & \\ \hline & & -2 & 1 \\ & & 0 & -2 \end{array} \right] x_3 + \left[ \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{array} \right] u \\ y = \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] x_3 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_4 = \left[ \begin{array}{cc|cc} -4 & 1 & & \\ -4 & 0 & & \\ \hline & & -4 & 1 \\ & & -4 & 0 \end{array} \right] x_4 + \left[ \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 3 & 8 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{array} \right] u \\ y = \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] x_4 \end{array} \right.$$

### 3.8 Méthode du graphe minimal (cas des valeurs propres multiples)

On décompose  $Z(s) = \frac{M(s)}{(s+\lambda)^r}$  en éléments simples :

$$Z(s) = \frac{M_r}{(s+\lambda)^r} + \frac{M_{r-1}}{(s+\lambda)^{r-1}} + \dots + \frac{M_1}{s+\lambda}.$$

On décompose ensuite  $Z(s)$  suivant les sorties (décomposition en ligne). On note :

$$M_j = \begin{bmatrix} M_j^1 \\ \vdots \\ M_j^i \\ \vdots \\ M_j^p \end{bmatrix} \quad j = 1, \dots, r$$

$$\begin{aligned} Y_1(s) &= \frac{M_r^1}{(s+\lambda)^r} U + \frac{M_{r-1}^1}{(s+\lambda)^{r-1}} U + \dots + \frac{M_1^1}{s+\lambda} U \\ &\vdots \\ Y_i(s) &= \frac{M_r^i}{(s+\lambda)^r} U + \frac{M_{r-1}^i}{(s+\lambda)^{r-1}} U + \dots + \frac{M_1^i}{s+\lambda} U \\ &\vdots \\ Y_p(s) &= \frac{M_r^p}{(s+\lambda)^r} U + \frac{M_{r-1}^p}{(s+\lambda)^{r-1}} U + \dots + \frac{M_1^p}{s+\lambda} U \end{aligned}$$

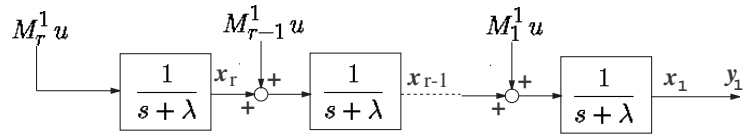


Figure 3.1: Graphe minimal associé à  $Y_1$ .

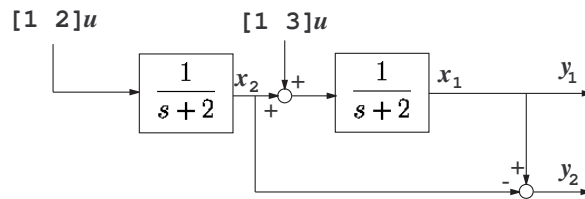


Figure 3.2: Graphe minimal associé à  $Z(s)$ .

On trace le graphe de la première mesure  $i$  où  $M_r^i$  n'est pas nul. On obtient le schéma fonctionnel présenté Figure 3.1 (avec  $i = 1$ ). Puis on construit les mesures suivantes en s'efforçant de construire d'abord le terme de plus haut degré ( $\frac{M_r^2}{(s+\lambda)^r}U$ ) en utilisant les  $r$  blocs  $\frac{1}{s+\lambda}$  déjà construits et ainsi de suite pour les autres mesures.

**Exemple:**

$$Z(s) = \frac{1}{(s+2)^2} \begin{bmatrix} s+3 & 3s+8 \\ 1 & s+4 \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}{(s+2)^2} + \frac{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{s+2}$$

$$\begin{cases} Y_1(s) = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}}{(s+2)^2}U + \frac{\begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}}{s+2}U \\ Y_2(s) = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}}{(s+2)^2}U + \frac{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}{s+2}U \end{cases}$$

On obtient le graphe présenté figure 3.2. En effet :

$$Y_2(s) = Y_1(s) - \frac{\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}}{s+2}U.$$

D'où la réalisation minimale (d'ordre 2) :

$$\begin{cases} \dot{x}_5 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x_5 + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x_5 \end{cases}$$

### 3.9 Exercice

On considère le système à 2 entrées et 2 sorties défini par la matrice de transfert suivante :

$$Z(p) = \frac{\begin{bmatrix} p^3 + 3p^2 + 2p + 1 & 2p^2 + p + 1 \\ 3p^2 + p + 1 & 3p^2 + p + 1 \end{bmatrix}}{p^2(p^2 + p + 1)} \quad (3.6)$$

- a) De quel ordre est le système ?
- b) Quelle est son équation caractéristique? Sous forme bloc diagonale, quelle serait la structure de la matrice  $A$ ?
- c) Donner une réalisation minimale de ce système.



## Chapter 4

# Représentation d'état des systèmes multivariables définis par un système d'équations différentielles

### 4.1 Notations et Problématique

L'opérateur dérivation est noté :  $D = \frac{d}{dt}$ . On note donc  $y_i^{(k)} = D^k y_i$ .

**Exemple :**

$$\begin{cases} y_1''' + 2y_1' + 3y_1 + y_2' + y_2 = u_1' + u_2 + u_3 \\ y_1' + y_1 + 3y_2' + y_2 = u_2 + u_3' + u_3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} D^3 + 2D + 3 & D + 1 \\ D + 1 & 3D + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & 1 & 1 \\ 0 & 1 & D + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

On note le système différentiel :  $L(D)y = M(D)u$  avec  $L(D) : p \times p$  inversible et  $M(D) : p \times m$ .

Le problème est de trouver une réalisation :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$$

équivalente au système différentiel donc observable mais pas nécessairement gouvernable.

On note également les décompositions  $L(D)$  et  $M(D)$  suivant les puissances de  $D$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} L(D) &= L_s D^s + L_{s-1} D^{s-1} + \dots + L_1 D + L_0 \\ M(D) &= M_r D^r + M_{r-1} D^{r-1} + \dots + M_1 D + M_0 . \end{aligned}$$

**Hypothèse :** Comme précédemment et comme dans le cas SISO, on supposera  $s \geq r$  pour que le système est une signification physique. Si  $r = s$ , le système n'est pas strictement propre et on commencera par isoler la transmission directe. L'attention est toutefois attirée sur le fait que, contrairement au cas SISO, la condition  $s > r$  n'implique pas que système soit strictement propre. Il peut même ne correspondre à rien de physique.

## 4.2 Rappel cas SISO

Dans le cas SISO, l'équation différentielle entrée-sortie, après avoir isoler la transmission directe et après normalisation à 1 du coefficient de la dérivée de la sortie  $y$  de plus haut degré, s'écrit :

$$1 y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = b_0u + b_1\dot{u} + \dots + b_{m-1}u^{m-1} + b_mu^m .$$

On prendra comme représentation d'état une forme compagne verticale pour ses propriétés d'observabilité (équation 3.2) :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_v \\ y \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cccc|c} -a_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 & b_m \\ -a_1 & 0 & \dots & 0 & 1 & \vdots \\ -a_0 & 0 & \dots & \dots & 0 & b_0 \\ \hline 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_v \\ u \end{bmatrix}$$

## 4.3 Cas général multivariable

D'une façon analogue aux matrices de transfert, nous allons chercher à diagonaliser  $L(D)$  par une succession d'opérations licites (pré-multiplications et post-multiplication par des notations à déterminant constant; ni nul ni dépendant de  $D$ ).

### 4.3.1 Pré-multiplication du système: triangularisation (supérieure) de $L(D)$

$$V(D)L(D)y = V(D)M(D)u \quad \text{avec}$$

$$V(D)L(D) = T(D) = \begin{bmatrix} L_{11}(D) & \dots & \dots & L_{1p}(D) \\ 0 & L_{22}(D) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & L_{pp}(D) \end{bmatrix}$$



### 4.3.2 Changement de variable (post-multiplication)

$$y = W(D)z \quad \text{avec } \det(W(D)) = Cste$$

$$V(D)L(D)W(D)z = V(D)M(D)u$$

avec  $W(D)$  qui diagonalise la matrice triangulaire  $T(D)$ .

On note alors  $V(D)L(D)W(D) = \Gamma(D)$  (diagonale) :

$$\Gamma(D)z = M'(D)u \quad \text{avec } \Gamma(D) = \text{diag}(\gamma_i(D)) \quad i = 1, \dots, p$$

On a donc  $p$  équations différentielles en parallèle et l'ordre du système est la somme des degrés des  $\gamma_i(D)$ , c'est-à-dire le degré du déterminant de  $L(D)$ .

Ordre du système  $L(D)y = M(D)u$ :  $n = \text{degré}(\det(L(D)))$

### 4.3.3 Mise sous forme d'état

A partir de la forme triangulaire supérieure, si pour chaque colonne le terme de plus haut degré est sur la diagonale, on peut chercher directement une représentation d'état en commençant par le dernière mesure (voir exemple 5 page 13 de [4]).

Dans le cas général, on ne cherchera pas à triangulariser  $L(D)$  mais on utilisera la **méthode pratique** suivante : on décompose  $L(D)$  selon les puissances de  $D$  :

$$L(D) = L_s D^s + L_{s-1} D^{s-1} + \dots + L_1 D + L_0 .$$

Deux cas peuvent se présenter selon que  $L_s$  soit inversible ou pas.

#### Cas 1: $L_s$ est inversible

Alors on pré-multiplie le système différentiel  $L(D)y = M(D)u$  par  $L_s^{-1}$  et on peut conclure :  $\boxed{n = ps}$ .

On a une représentation d'état directe par la généralisation du cas mono-variable (la multiplication par  $L_s^{-1}$  correspond à la normalisation à 1 du coefficient de plus haut degré du polynôme caractéristique lorsque l'on cherche une représentation sous forme compagne dans le cas mono-variable).

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \hline y \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cccc|cc} -L_s^{-1}L_{s-1} & I_{p \times p} & 0 & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & I_{p \times p} & 0 & L_s^{-1}M_r \\ -L_s^{-1}L_1 & 0 & \dots & 0 & I_{p \times p} & \vdots \\ -L_s^{-1}L_0 & 0 & \dots & \dots & 0 & L_s^{-1}M_0 \\ \hline I_{p \times p} & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x \\ \hline u \end{bmatrix}$$

**Cas 2:**  $L_s$  est de rang  $\rho < p$

Par pré-multiplication et post-multiplication, on peut se ramener au cas où  $L(s) = \begin{bmatrix} I_{\rho \times \rho} & \phi_{\rho \times p} \\ \phi_{p \times \rho} & \phi_{p \times p} \end{bmatrix}$  et on décompose le système en blocs  $2 \times 2$  :

$$\begin{matrix} (\rho) \\ (p - \rho) \end{matrix} \begin{bmatrix} L_{11}(D) & L_{12}(D) \\ L_{21}(D) & L_{22}(D) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1(D) \\ M_2(D) \end{bmatrix} u$$

Premier sous-système (d'ordre  $\rho \times s$ ):

$$L_{11}(D)y_1 = M_1(D)u - L_{12}(D)y_2$$

On est ramener au cas précédent car  $L_{11s}$  est inversible.  $y_2$  est considéré comme une entrée auxiliaire pour ce sous-système. On obtient alors :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1x_1 + B_1u - Ky_2 \\ y_1 = C_1x_1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & -K \\ C_1 & \phi & \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ u \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Second sous-système :

$$L_{22}(D)y_2 = M_2(D)u - L_{21}(D)y_1 \tag{4.1}$$

Le terme  $L_{21}(D)y_1$  est composé de termes en :

- $y_1 = C_1x_1$ ,
- $\dot{y}_1 = C_1Ax_1 + C_1B_1u - C_1Ky_2$ ,
- $\ddot{y}_1 = C_1A^2x_1 + C_1AB_1u - C_1AKy_2 + C_1B_1\dot{u} - C_1K\dot{y}_2$ ,
- ...

On peut donc réécrire l'équation (4.1) de la façon suivante :

$$L'_{22}(D)y_2 = M'_2(D)u - Sx_1$$

Remarque : c'est dans cette dernière équation qu'apparaissent éventuellement :

- des transmissions directes (si  $\rho \times s = n$ ),
- des équations d'états supplémentaires (si  $\rho \times s < n$ ),
- des relations statiques sur  $x_1$  qui permettront de supprimer (réduire) des variables d'états dans le vecteur  $x_1$  (si  $\rho \times s > n$ ).

Dans le cas  $\rho \times s < n$ , on obtient la représentation du second sous-système :

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_1 u + T x_1 \\ y_2 = C_2 x_2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 & T \\ C_2 & \phi & \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ u \\ x_1 \end{bmatrix}$$

et la représentation globale :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & -KC_2 & B_1 \\ T & A_2 & B_2 \\ C_1 & \phi & \phi \\ \phi & C_2 & \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u \end{bmatrix}$$

Remarques :

- ne pas oublier de rajouter la transmission directe éventuellement isolée dans le problème initial (voir hypothèse de la section 4.1),
- ne pas oublier non plus de tenir compte du changement de variable éventuellement utilisé pour normaliser  $L_s$  sous la forme :

$$L(s) = \begin{bmatrix} I_{\rho \times \rho} & \phi_{\rho \times p} \\ \phi_{p \times \rho} & \phi_{p \times p} \end{bmatrix}$$

## 4.4 Exemple

Soit le système différentiel :

$$\begin{bmatrix} D^2 + D + 1 & D^2 - D \\ D^2 + 2D + 1 & D^2 + D \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} D + 1 & D + 2 \\ D + 3 & 2D + 4 \end{bmatrix} u \quad \text{noté: } (L(D)y = M(D)u)$$

**Ordre du système**

$$\det(L(D)) = D^4 + 2D^3 + 2D^2 + D - (D^4 + D^3 + \dots) = D^3 + \dots$$

$$\Rightarrow \boxed{n = 3}$$

**Normalisation de  $L_s$**

$$s = 2; \quad L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pré-multiplication:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \times (Ly = Du) \Rightarrow \begin{bmatrix} D^2 + D + 1 & D^2 - D \\ & D & 2D \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} D + 1 & D + 2 \\ & 2 & D + 2 \end{bmatrix} u.$$

Changement de variable:  $y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} z$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} D^2 + D + 1 & -2D - 1 \\ & D & D \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} D + 1 & D + 2 \\ & 2 & D + 2 \end{bmatrix} u.$$

**Premier sous-système:**

$$(D^2 + D + 1)z_1 = [D + 1 \quad D + 2]u + (2D + 1)z_2$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} z_2 \\ z_1 = [1 \quad 0]x_1 \end{cases}$$

**Second sous-système:**

$$\begin{aligned} Dz_2 &= [2 \quad D + 2]u - Dz_1 \\ &= [2 \quad D + 2]u - [1 \quad 0]x_1 \\ &= [2 \quad D + 2]u - [-1 \quad 1]x_1 - [1 \quad 1]u - 2z_2 \\ (D + 2)z_2 &= [1 \quad D + 1]u + [1 \quad -1]x_1 \end{aligned}$$

Cette dernière égalité met en évidence une transmission directe unitaire entre  $z_2$  et  $u_2$  (deuxième composante de  $u$ ). On pose donc:  $\tilde{z}_2 = z_2 - u_2 = z_2 - [0 \quad 1]u$  et on obtient :

$$\Rightarrow (D + 2)\tilde{z}_2 = [1 \quad -1]u + [1 \quad -1]x_1,$$

d'où la représentation du second sous-système :

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = -2x_2 + [1 \quad -1]u + [1 \quad -1]x_1 \\ \tilde{z}_2 = x_2 \\ z_2 = x_2 + [0 \quad 1]u \end{cases}$$

**Représentation globale**

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & -1 & -2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u \end{bmatrix}$$

Soit, compte tenu du changement de variable  $y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} z$  :

$$\begin{bmatrix} \frac{\dot{x}_1}{\dot{x}_2} \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -1 & -2 \\ \hline 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \frac{x_1}{x_2} \\ u \end{bmatrix}$$

## 4.5 Exercices

### Exercice 1

On considère le système défini par les équations :

$$\begin{bmatrix} 2D^2 + D + 2 & D^2 + \frac{2}{3}D + 1 \\ D^2 + \frac{1}{3}D - 2 & D^2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D + 1 & D + 2 & 1 \\ D & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

- De quel ordre est ce système ? (On ne vous demande pas les modes, seulement l'ordre. Répondez, en justifiant, le plus facilement possible).
- Donnez-en une représentation d'état minimale.
- Comment les états que vous avez choisi sont-ils liés aux sorties et aux entrées du système?

### Exercice 2

$$\begin{bmatrix} D^2 - D & D^2 + 1 \\ D^2 + D & D^2 + 2D - 1 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} u$$

- De quel ordre est ce système ?
- Donnez-en une représentation d'état minimale.



## Chapter 5

# Gouvernabilité et observabilité: analyse pratique par les grammien

### 5.1 Introduction

Les notions de gouvernabilité et d'observabilité présentées jusqu'ici donne une information binaire sur les propriétés du système (gouvernable ou pas, observable ou pas). Les critères théoriques sont d'ailleurs fondés sur un calcul de rang. En pratique, il paraît nécessaire de pouvoir apprécier, de mesurer la gouvernabilité ou l'observabilité (on parle alors d'indice de gouvernabilité ou d'observabilité).

**Exemple:** Cas de 2 blocs de JORDAN associés à la même valeur propre dans le cas monovariante. Que se passe-t-il lorsque l'égalité des valeurs propres n'est pas parfaite ? :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cc|c} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & \lambda + \epsilon & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \quad \text{avec } \epsilon \text{ petit .}$$

Dans le cas des *systèmes asymptotiquement stables*, les grammien de gouvernabilité et d'observabilité fournissent cette mesure et permettent d'appréhender ces problèmes.

### 5.2 Définitions

Soit un système asymptotiquement stable :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$$

### 5.2.1 Grammien de gouvernabilité (help gram)

$$X_c = \int_0^{\infty} \left( e^{At} B B^T e^{A^T t} \right) dt$$

#### Première interprétation

La réponse de l'état  $x(t)$  du système à une impulsion sur l'entrée  $u$  s'écrit :  $x(t) = e^{At} B$ ,  $t > 0$ .

$$X_c = \int_0^{\infty} x(t) x^T(t) dt$$

Le grammien de gouvernabilité représente l'intégrale du carré de la réponse impulsionnelle des états du système.

#### Calcul pratique

$X_c$  est solution de l'équation de LYAPUNOV (help lyap) :

$$A X_c + X_c A^T + B B^T = 0 \quad (5.1)$$

#### Justification:

$$\begin{aligned} A X_c + X_c A^T &= \int_0^{\infty} \left( A e^{At} B B^T e^{A^T t} + e^{At} B B^T e^{A^T t} A^T \right) dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{d(e^{At} B B^T e^{A^T t})}{dt} dt = \left[ e^{At} B B^T e^{A^T t} \right]_0^{\infty} \quad (\text{rappel: } A e^{At} = e^{At} A). \end{aligned}$$

Or  $\lim_{t \rightarrow \infty} (e^{At}) = 0$  car  $A$  est stable. Donc :

$$A X_c + X_c A^T = -B B^T .$$

#### Deuxième interprétation (stochastique)

Rappel: (voir cours de seconde année sur la représentation markovienne des processus aléatoires)

- soit u système :  $\dot{x}(t) = Ax(t) + b(t)$  avec  $b(t)$ : bruit blanc de densité spectrale  $Q$ ,
- soit :  $E [x(t)x^T(t + \tau)] = P\delta(\tau)$  ( $P$  matrice de covariance de l'état  $x$  en régime permanent),
- alors  $P$  vérifie l'équation de LYAPUNOV:  $AP + PA^T + Q = 0$ .

Le grammien de gouvernabilité représente la matrice de covariance de l'état (en régime permanent) lorsque le vecteur d'entrée  $u$  correspond au vecteur de bruits blancs centrés normalisés ( $E [x(t)x^T(t + \tau)] = I_{m \times m} \delta(\tau)$ ).



**Propriétés:**

- $X_c$  est symétrique positive semi-définie. Sa décomposition en valeurs singulières (svd) s'écrit :

$$X_c = V_c \Sigma_c^2 V_c^T \quad \text{avec} \quad \Sigma_c^2 = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_n \end{bmatrix}$$

- le système est gouvernable si  $X_c$  est définie positive ( $\sigma_i > 0 \quad \forall i$ ).

**5.2.2 Grammien d'observabilité**

$$X_o = \int_0^\infty \left( e^{A^T t} C^T C e^{At} \right) dt$$

- Dualité:  $\left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & \phi \end{array} \right] \leftrightarrow \left[ \begin{array}{c|c} A^T & C^T \\ \hline B^T & \phi \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & \phi \end{array} \right]^T$ ,
- $X_o$  solution de :  $A^T X_o + X_o A + C^T C = 0$ ,
- $X_o$  est symétrique positive semi-définie,
- le système est observable si  $X_o$  est définie positive.

**Exemple:** reprenons l'exemple précédent (avec  $\lambda < 0$ : condition de stabilité):

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & | & 1 \\ 0 & \lambda + \epsilon & | & 1 \\ \hline 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$$

Soit:  $X_c = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{12} & x_{22} \end{bmatrix}$  alors l'équation de LYAPUNOV devient:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda + \epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{12} & x_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{12} & x_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda + \epsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

$$\Rightarrow X_c = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\lambda} & -\frac{1}{2\lambda + \epsilon} \\ -\frac{1}{2\lambda + \epsilon} & -\frac{1}{2\lambda + 2\epsilon} \end{bmatrix} \quad (> 0 \text{ car } \lambda < 0)$$

Rq:  $X_o = X_c$  (cas particulier) .

Si  $\epsilon$  s'annule,  $X_c$  devient singulière et une des deux valeurs singulières de  $X_c$  s'annule.

***L'analyse des valeurs singulières de  $X_c$ , comparativement les unes par rapport aux autres, renseigne donc sur la dimension et le degré d'ingouvernabilité du sous espace d'état le moins gouvernable.***

### 5.3 Représentation équilibrée (help balreal)

Les grammians  $X_c$  et  $X_o$  dépendent de la base  $(x)$  dans laquelle est exprimée la représentation d'état.

Effectuons un changement de variable :  $x = M\tilde{x}$ , alors :

$$\tilde{A} = M^{-1}AM, \quad \tilde{B} = M^{-1}B, \quad \tilde{C} = CM \quad \text{et}$$

$$\tilde{X}_c = \int_0^\infty \left( e^{\tilde{A}t} \tilde{B} \tilde{B}^T e^{\tilde{A}^T t} \right) dt \quad \text{est solution de:}$$

$$\tilde{A} \tilde{X}_c + \tilde{X}_c \tilde{A}^T + \tilde{B} \tilde{B}^T = 0$$

$$\Leftrightarrow M^{-1}AM \tilde{X}_c + \tilde{X}_c M^T A^T M^{-T} + M^{-1}BB^T M^{-T} = 0$$

en pré-multipliant cette équation par  $M$  et en post-multipliant par  $M^T$ , on obtient :

$$AM \tilde{X}_c M^T + M \tilde{X}_c M^T A^T + BB^T = 0 \quad (5.2)$$

L'identification des équations 5.1 et 5.2 donne:  $X_c = M \tilde{X}_c M^T$  ou encore :

$$\boxed{\tilde{X}_c = M^{-1} X_c M^{-T}}$$

De façon analogue on peut démontrer :

$$\boxed{\tilde{X}_o = M^T X_o M}$$

**Remarque:**  $\tilde{X}_c \tilde{X}_o = M^{-1} X_c X_o M$  donc les valeurs propres de  $X_c X_o$  sont invariantes par le changement de base  $M$ .

**Représentation équilibrée:**

$$\exists M / \tilde{X}_c = \tilde{X}_o = \Sigma^2 = \text{diag}(\sigma_i) \quad i = 1, \dots, n \quad \text{avec :}$$

- $\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_n$  (valeurs singulières de HANKEL),
- $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(X_c X_o)}$ ,
- la représentation  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$  associée à ce changement de base  $M$  est dite **équilibrée**.

**Exemple élémentaire:**  $F(s) = \frac{1}{s+1}$ , on propose deux représentations :

$$\bullet \left[ \begin{array}{c} \dot{x} \\ y \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} -1 & 0.01 \\ \hline 100 & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} x \\ u \end{array} \right] \text{ représentation non équilibrée :}$$

$$X_c = 0.005, \quad X_o = 5000,$$

$$\bullet \left[ \begin{array}{c} \dot{x} \\ y \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} -1 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} x \\ u \end{array} \right] \text{ représentation équilibrée :}$$

$$X_c = X_o = 0.5 .$$

### Algorithme de calcul de $M$ pour la représentation équilibrée:

- On calcule  $X_c$  et  $X_o$  par les équations de LYAPUNOV,
- on fait une décomposition en valeurs singulières (svd) de  $X_c$  et  $X_o$  :

$$X_c = V_c \Sigma_c^2 V_c^T, \quad X_o = V_o \Sigma_o^2 V_o^T,$$

- on pose  $P = \Sigma_o V_o^T V_c \Sigma_c$  (racine carré du produit  $X_o X_c$ ), et on décompose  $P$  (svd) :

$$P = U \Sigma^2 V^T \quad (\text{rq: } \Sigma^2 = \Sigma_c \Sigma_o \quad \text{car } V_o^T \text{ et } V_c \text{ unitaires}),$$

- alors  $M = V_c \Sigma_c V \Sigma^{-1}$ .

### Justification:

$$\begin{aligned} \bullet \widetilde{X}_c &= M^{-1} X_c M^{-T} \\ &= \Sigma V^T \Sigma_c^{-1} \underbrace{V_c^T V_c}_I \Sigma_c^2 \underbrace{V_c^T V_c}_I \Sigma_c^{-1} V \Sigma \\ &= \Sigma \underbrace{V^T V}_I \Sigma \\ &= \Sigma^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \widetilde{X}_o &= M^T X_o M \\ &= \Sigma^{-1} V^T \underbrace{\Sigma_c V_c^T V_o \Sigma_o^2 V_o^T V_c \Sigma_c}_{P^T P} V \Sigma^{-1} \\ &= \Sigma^{-1} V^T V \Sigma^2 U^T U \Sigma^2 V^T V \Sigma^{-1} \\ &= \Sigma^2 \end{aligned}$$



# Références

- 0 J.L. Junkins et Y. Kim: “ Introduction to Dynamics and Control of flexible structures” (chapitre 1) AIAA, Education series.
- 1 “Robustesse et Commande Optimale”: D. Alazard, C. Cumer, P. Apkarian, M. Gauvrit et G. Ferrères - Cépaduès Éditions,
- 2 M. Gauvrit et P. Apkarian: “Commande robuste des systèmes linéaires”, Polycopié de cours SUPAERO,
- 3 M. Llibre: “Commande optimale des processus déterministe”, Polycopié de cours SUPAERO,
- 4 A. J. Fossard: “Représentation des systèmes dynamiques continus multidimensionnels - première partie”, Polycopié de cours SUPAERO.
- 5 N. Imbert: “Réduction de modèles”, Notes de cours SUPAERO.
- 6 A. J. Fossard: “Représentation, observation et commande des systèmes linéaires dans l’espace d’état (systèmes monoentrée-monosortie)”, polycopé SUPAERO de seconde année.
- 7 D. Alazard et J.P. Chrétien: “Commande Active des Structures Flexibles: applications spatiales et aéronautiques”, Notes de cours SUPAERO.
- 8 P. Mouyon: “Inversion d’opérateurs et techniques de régularisation”, notes de cours SUPAERO.

