



## ÉQUILIBRE RADIAL :

### APPLICATION AU CALCUL D'ÉTAGES DE TURBOMACHINES

J. Gressier

Mai 2002

Le calcul des écoulements dans les turbomachines est fort complexe. En effet, la prise en compte de tous les phénomènes, sans hypothèse particulière, nous obligerait à considérer des écoulements tridimensionnels instationnaires visqueux. Le caractère instationnaire est principalement dû aux interactions rotor/stator (compresseur/redresseur ou distributeur/turbine). Mais il existe aussi les interactions pales/carter et des éventuelles distorsions amont.

La première hypothèse simplificatrice est de considérer un écoulement moyen "équivalent" stationnaire. On peut alors penser que celui-ci est axisymétrique, pour autant que les conditions amont le soient aussi (pas d'effet de distorsion). Il suffit ensuite de calculer l'écoulement dans un plan méridien du corps. Néanmoins, cette approche nécessite un certain nombre de données, que seul le calcul de l'écoulement inter-aubes peut donner (déviations, perte de pression génératrice, etc). L'approche doit donc nécessairement être couplée : un calcul dans un plan méridien qui définit les surfaces de courant équilibrées, et un certain nombre de calculs aube à aube pour chacune de ces surfaces équilibrées.

Dans cet esprit, nous nous intéressons à l'équilibre radial. Il s'agit d'extraire une équation d'équilibre, plan par plan dans une surface méridienne, qui permet de calculer l'orientation des tubes de courant dans la turbomachine. Après un bref rappel sur les équations en repère absolu et en repère tournant, les équations seront détaillées pour un repère axisymétrique. Puis, la méthode d'obtention de l'équilibre radial sera donnée pour ensuite pouvoir s'attarder sur les applications possibles.

## 1 Équations d'Euler en repère absolu et repère tournant

Lorsque les effets de viscosité et de conduction thermique sont négligeables, les équations de Navier-Stokes se simplifient et deviennent les équations d'Euler. Ces équations sont établies sous forme conservative. Peu adaptée à la manipulation d'équations, cette forme est pourtant à la base de toute méthode conservative (méthode volumes finis, approche avec bilans, etc). La forme compacte est :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \vec{V} \\ \rho E \end{pmatrix} + \text{div} \begin{pmatrix} \rho \vec{V}^T \\ \rho \vec{V} \otimes \vec{V} + p \vec{I} \\ \rho \vec{V}^T H \end{pmatrix} = 0 \quad (1)$$

où  $E$  et  $H$  sont respectivement l'énergie massique totale et de l'enthalpie d'arrêt. On rappelle les relations

$$\rho E = \rho e + \frac{1}{2} \rho \vec{V}^2 = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho \vec{V}^2 \quad (2a)$$

$$\rho H = \rho E + p = \frac{\gamma p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho \vec{V}^2 \quad (2b)$$

où  $e = C_v T$  est l'énergie interne massique. On a bien sûr  $H = h + 1/2 \rho \vec{V}^2$  avec  $\rho h = \rho e + p$  et  $h$  l'enthalpie massique.

Dans ces relations, on utilise implicitement une relation de fermeture qui est une équation d'état du fluide,  $p = (\gamma - 1) \rho e$ , par exemple. Elle permet de relier la pression aux autres variables thermodynamiques. On peut aussi l'écrire

$$p = \rho \mathbf{r} T \quad (2c)$$

avec  $\mathbf{r} = 287.14 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

Ces équations peuvent aussi s'écrire sous forme non conservative. Ce ne sont plus des équations de bilan ; le choix des variables est quasiment arbitraire et c'est pourquoi il en existe de nombreuses variantes. Dans la plupart des cas, l'obtention d'une forme non conservative se fait en développant la forme conservative, et en simplifiant certains termes à l'aide de l'équation de continuité. Une des formes classiquement rencontrées est la suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \vec{V} = 0 \quad (3a)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \wedge \vec{V} + \overrightarrow{\text{grad}} \frac{\vec{V}^2}{2} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p \quad (3b)$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + (\overrightarrow{\text{grad}} H) \cdot \vec{V} = \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3c)$$

Notons que l'équation d'énergie peut être remplacée par une équation pour l'entropie  $S$ ,  $dS/dt = 0$ . Cette équation signifie la conservation de la variable sur une trajectoire (ou sur une ligne de courant en écoulement stationnaire).

Pour obtenir les équations d'Euler dans un repère tournant, défini par un vecteur rotation  $\vec{\omega}$ , il suffit de développer ces mêmes équations à l'aide de

$$\vec{V} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{W} \quad (4)$$

où  $\vec{W}$  est la vitesse relative dans le repère tournant. Il n'est nul besoin d'ajouter les termes d'inertie (accélération d'entraînement et accélération de Coriolis) : les dérivées particulières des membres de gauche les feront naturellement apparaître. Par contre, le repère tournant est choisi tel que l'écoulement relatif soit stationnaire.

Notons que les opérateurs différentiels  $\text{div}$  et  $\overrightarrow{\text{grad}}$  ne sont pas identiques dans le repère absolu et dans le repère relatif. Leurs formulations dépendent du système de coordonnées utilisé. Nous garderons les notations identiques par souci de simplicité.

## 2 Formulation du problème en repère axisymétrique

Nous pouvons considérer cette section comme un préalable mathématique à l'établissement de l'équation d'équilibre radial. Nous allons détailler la formulation des équations dans le repère

axisymétrique ( $\vec{u}_x, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta$ ). L'équation de quantité de mouvement s'écrit, dans le repère relatif,

$$\underbrace{\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \vec{\text{rot}} \vec{W} \wedge \vec{W} + \vec{\text{grad}} \frac{\vec{W}^2}{2}}_{\text{accélération relative}} = \underbrace{\omega^2 \vec{r}}_{\text{accélération d'entraînement}} - \underbrace{2\vec{\omega} \wedge \vec{W}}_{\text{accélération de Coriolis}} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \vec{\text{grad}} p}_{\text{bilan des efforts volumiques}} \quad (5)$$

Les relations qui suivent vont être développées dans le repère absolu. On retiendra qu'il suffit de remplacer les vitesses par la relation (4) pour obtenir l'équation dans le repère relatif.

L'équilibre radial s'écrit dans un plan méridien de la géométrie axisymétrique. C'est pourquoi nous détaillons ici quelques notations propres au calcul dans ce plan méridien. L'angle

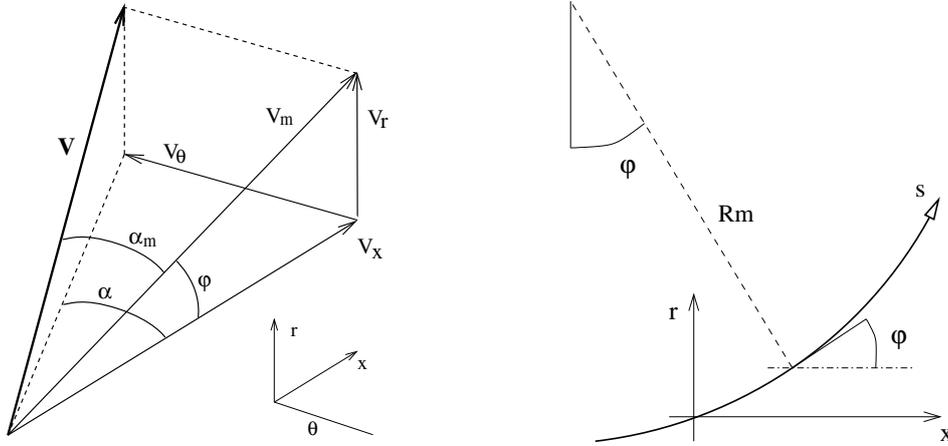


FIG. 1 – Notations associée à une trajectoire dans un repère axisymétrique

$\alpha$  est l'angle de déviation absolu dans le plan azimuthal. On définit aussi l'angle de déviation  $\alpha_m$  dans la nappe de courant (voir figure 1). Le changement de repère agit sur la vitesse orthoradiale  $V_\theta$ . Ainsi, il est nécessaire de définir deux angles de déviation, l'un absolu appliqué à  $\vec{V}$ , l'autre relatif appliqué à  $\vec{W}$ . On choisit les notations  $\alpha$  et  $\beta$  pour les vitesses respectivement absolues et relatives.

Les relations de projections entre  $V$ ,  $V_\theta$ ,  $V_m$ ,  $V_r$ ,  $V_x$  sont simples à retrouver. Citons par exemple :

$$V_m = V \cos(\alpha_m) \quad (6a)$$

$$V_x = V_m \cos(\varphi) \quad (6b)$$

$$V_r = V_m \sin(\varphi) \quad (6c)$$

$$V_\theta = V \sin(\alpha_m) \quad (6d)$$

On pourrait être tenter d'utiliser la déviation  $\alpha$  dans le plan projeté. La déviation  $\alpha_m$  dans le plan de la nappe de courant axisymétrique a cependant plus de signification physique. En particulier,  $\alpha_m$  garde sa signification lorsque l'angle de conicité  $\varphi$  tend vers  $90^\circ$ . Ces angles sont reliés par

$$\tan(\alpha_m) = \tan(\alpha) \cos(\varphi) \quad (7)$$

Par contre, nous détaillons ci-dessous les relations entre les dérivées de  $\varphi$  selon  $x$ ,  $r$  et l'abscisse curviligne  $s$ , elle-même reliée au rayon de courbure de la trajectoire, dans la surface méridienne. Ces relations sont :

$$ds = R_m d\varphi \quad \text{et} \quad dx = \cos \varphi ds \quad \implies \quad C_m = \frac{1}{R_m} = \frac{d\varphi}{ds} \quad (8a)$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \tan \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{C_m}{\cos \varphi} \quad (8b)$$

### 3 Équation de l'équilibre radial

Pour établir l'équation de l'équilibre radial, il faut chercher à éliminer les dépendances selon l'axe  $x$  et arriver à une équation qui ne fait intervenir que des dérivées radiales. Faisons d'abord état des hypothèses :

- le fluide est supposé parfait (effet de viscosité et de conduction thermique négligeables), et le gaz idéal (gaz parfait et caloriquement parfait),
- l'amont n'est pas nécessairement homentropique car le fluide peut avoir subi des pertes de pression génératrice non homogènes dans la direction radiale (selon la section à laquelle on s'intéresse),
- l'écoulement est supposé stationnaire,
- l'écoulement est axisymétrique; cela signifie que les quantités ne dépendent pas de  $\theta$ , mais uniquement de  $x$  et  $r$ . La vitesse orthoradiale  $V_\theta$ , elle, n'est pas forcément, et même rarement nulle.

Dans le cadre de ces hypothèses, on note que la dérivée particulière s'exprime seulement sous la forme

$$\frac{d}{dt} = \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} = V_x \frac{\partial}{\partial x} + V_r \frac{\partial}{\partial r} = V_x \left( \frac{\partial}{\partial x} + \tan \varphi \frac{\partial}{\partial r} \right) \quad (9)$$

#### 3.1 Équation de continuité

Le développement de l'équation de continuité donne

$$\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\rho + \rho \text{div}\vec{V} = 0 \quad (10)$$

À partir de l'écriture différentielle de la fonction d'état  $p = p(\rho, S)$  et de la définition de la vitesse du son, on peut écrire

$$\overrightarrow{\text{grad}}p = a^2 \overrightarrow{\text{grad}}\rho + \left( \frac{\partial p}{\partial S} \right)_\rho \overrightarrow{\text{grad}}S \quad (11a)$$

En effectuant le produit scalaire par  $\vec{V}$ , et en utilisant le fait que l'entropie se conserve sur une ligne de courant ( $\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}S = 0$ ), on obtient

$$\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\rho = \frac{1}{a^2} \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}p \quad (11b)$$

Sous ces hypothèses, l'équation de continuité devient alors

$$\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}p + \rho a^2 \text{div}\vec{V} = 0 \quad (12)$$

On développe  $\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}p$  en éliminant le gradient de pression longitudinal à l'aide de l'équation de quantité de mouvement longitudinale

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \rho \frac{dV_x}{dt} = 0 \quad (13a)$$

On obtient

$$\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}p = -\rho V_x \frac{dV_x}{dt} + V_r \frac{\partial p}{\partial r} \quad (13b)$$

que l'on peut substituer dans l'équation de continuité (12) :

$$\left( -\rho V_x \frac{dV_x}{dt} + V_r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \rho a^2 \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} \right) = 0 \quad (14a)$$

En développant quasiment tous les termes  $V_r$  en  $V_x \tan \varphi$ , on voit apparaître des combinaisons égales à  $dV_x/dt$ , et l'équation de continuité modifiée devient

$$(1 - M_x^2) \frac{dV_x}{dt} + \frac{M_x^2 \tan \varphi}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + V_x^2 \frac{\partial \tan \varphi}{\partial r} + \frac{V_r V_x}{r} = 0 \quad (14b)$$

avec  $M_x = V_x/a$ .

### 3.2 Équation de quantité de mouvement radiale

L'équation de quantité de mouvement radiale s'écrit

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{dV_r}{dt} - \frac{V_\theta^2}{r} = 0 \quad (15)$$

On peut aussi développer, en utilisant l'expression de la dérivée particulaire (9),

$$\frac{dV_r}{dt} = \tan \varphi \frac{dV_x}{dt} + V_x \frac{d \tan \varphi}{dt} \quad (16a)$$

$$= \tan \varphi \frac{dV_x}{dt} + \frac{V_x}{\cos^2 \varphi} \frac{d\varphi}{dt} \quad (16b)$$

$$= \tan \varphi \frac{dV_x}{dt} + \frac{V_m^2}{\cos \varphi} C_m \quad (16c)$$

On obtient l'équation de quantité de mouvement radiale suivante :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \tan \varphi \frac{dV_x}{dt} + \frac{V_m^2}{\cos \varphi} C_m - \frac{V_\theta^2}{r} = 0 \quad (17)$$

### 3.3 Équation de l'équilibre radial

Pour obtenir l'équation de l'équilibre radial, il suffit d'éliminer le terme  $dV_x/dt$  entre l'équation de continuité (14a) et l'équation de quantité de mouvement (17). On obtient alors

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \left[ 1 - M_x^2 (1 + \tan^2 \varphi) \right] + (1 - M_x^2) \left( \frac{V_m^2}{\cos \varphi} C_m - \frac{V_\theta^2}{r} \right) - \tan \varphi \left( V_x^2 \frac{\partial \tan \varphi}{\partial r} + \frac{V_x V_r}{r} \right) \quad (18a)$$

On peut réécrire cette équation en remaniant quelques termes ; on obtient alors l'équation de l'équilibre radial, décrivant l'évolution du profil de pression statique dans une section en fonction de quantités locales ou de dérivées partielles selon la même section :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} (1 - M_m^2) = \underbrace{\left(1 - M_x^2\right) \frac{V_\theta^2}{r}}_{\text{effet centrifuge}} - \underbrace{\left(1 - M_x^2\right) \frac{V_m^2}{\cos \varphi} C_m}_{\text{effet de courbure}} + \underbrace{\tan \varphi V_m^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}}_{\text{effet de conicité}} + \frac{V_r^2}{r} \quad (18b)$$

où l'on peut, dans le second membre, donner la signification physique de chacun des termes. Il existe d'ailleurs l'équation de l'équilibre radial simplifiée qui ne tient uniquement compte que du terme centrifuge. L'équation peut aussi se mettre sous forme sans dimension :

$$\boxed{\frac{1}{\gamma p} \frac{\partial p}{\partial r} (1 - M_m^2) = (1 - M_x^2) \left( \frac{M_\theta^2}{r} - \frac{M_m^2}{\cos \varphi} C_m \right) + \tan \varphi M_m^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{M_r^2}{r}} \quad (18c)$$

Sous cette forme, l'équation ne fait intervenir que la pression statique et le nombre de Mach (ainsi que ses composantes). La donnée de la pression d'arrêt suffit donc pour poser correctement le problème de Cauchy et permettre l'intégration. En particulier, la température d'arrêt n'est pas utile. Elle le devient lorsque l'on veut calculer, voire même optimiser le débit dans la veine.

## 4 Applications

Les applications de l'équilibre radial sont multiples : vérifications de mesures expérimentales, conception de turbomachines en utilisant le couplage avec des méthodes de calcul du canal inter-aubes plus ou moins élaborées. On applique l'équation dans différentes sections de la veine, en amont et en aval de chaque roue comme cela est montré sur la figure 2.

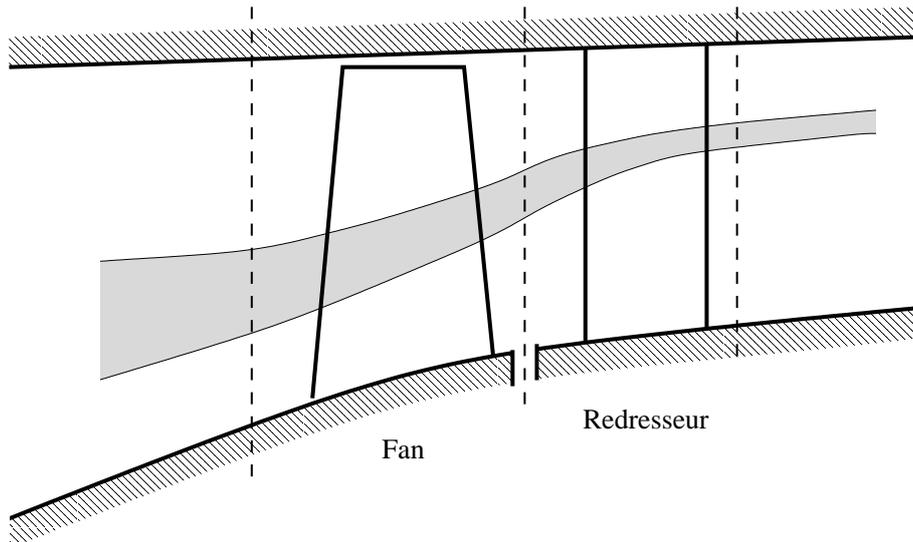


FIG. 2 – Géométrie de la veine et évolution des nappes de courant, sections de calcul de l'équilibre radial.

## 4.1 Intégration de l'équation

L'intégration de l'équation de l'équilibre radial nécessite un certain nombre de données. Ce sont en général des quantités génératrices. En effet, elles sont soit connues car provenant directement de l'amont, soit recalculées à partir des coefficients de pertes ou d'efficacité locaux. La connaissance des angles est elle aussi nécessaire. On pourra se placer suffisamment loin en amont pour les prendre petits voire nuls, ou directement imposer des déviations en sortie d'aubages, par exemple. De façon générale, les quantités que l'on considère imposées ici pour l'intégration de l'équation de l'équilibre radial peuvent être corrigées dans le cadre du couplage avec un calcul inter-aubes. En résumé, on considère que l'on dispose, dans toute la section de calcul, des données suivantes :

- le profil de température totale  $T_i$ ,
- le profil de pression totale  $p_i$ ,
- les données géométriques<sup>1</sup> locales de la ligne de courant,
  - l'angle de déviation  $\beta$  (direction orthoradiale),
  - l'angle  $\varphi$  dans le plan méridien (conicité locale),
  - la courbure  $C_m$  dans le plan méridien ;
- soit une autre quantité locale (nombre de Mach, pression statique, etc) en un point de la section (généralement à une des parois), soit une quantité intégrale telle que le débit.

### Intégration de la pression dans une section

Nous nous attachons tout d'abord à décrire le calcul d'une section. Nous supposons que la donnée du point (pression ou nombre de Mach) est au moyeu. Cette hypothèse n'est en rien restrictive puisque l'intégration n'a pas de direction privilégiée. L'équation à intégrer peut tout simplement s'écrire comme une équation différentielle ordinaire

$$\frac{dp}{dr} = F(p, r) \quad (19)$$

où la dépendance en  $r$  de  $F$  est due à l'ensemble des données dans la section. En effet, tout le second membre de l'équation (18c) peut être calculée comme une fonction de la pression et des autres données, fonctions elles-mêmes dépendantes de  $r$ . On cite bien sûr la définition de la pression totale

$$p_i(r) = p(r) \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2(r) \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (20)$$

La donnée d'une condition initiale permet la formulation du problème en problème de Cauchy, dont la solution est unique. Cette équation peut alors s'intégrer par une simple méthode d'Euler ou, plus généralement une méthode de Runge et Kutta (Annexe B).

Supposons que la donnée initiale est celle de la pression<sup>2</sup> au rayon du moyeu  $r_{\min}$ . Alors on peut intégrer l'équation numériquement, de façon explicite, jusqu'à  $r_{\max}$  et obtenir le profil complet de pression dans la section étudiée.

### Optimisation du débit

Il se peut que le problème ne soit pas formulé initialement avec la donnée d'une quantité locale. Il sera alors nécessaire d'itérer sur la condition initiale pour remplir la condition sou-

---

<sup>1</sup>données géométriques définies sur la figure 1.

<sup>2</sup>ou toute autre valeur permettant de remonter à la pression via les autres quantités, données du problème.

haitée. Dans ce cas, du point de vue théorique, la solution n'est pas unique. Il est utile de poser le problème correctement sur le plan physique, et de commencer le calcul itératif avec une estimation correcte de la condition initiale. Le schéma de la figure 3 montre les deux boucles, l'une de l'intégration, l'autre du processus itératif. Il faut bien différencier la condition initiale du processus itératif global, que nous nommerons estimation initiale, et la condition initiale du problème de Cauchy pour l'intégration de l'équation différentielle.

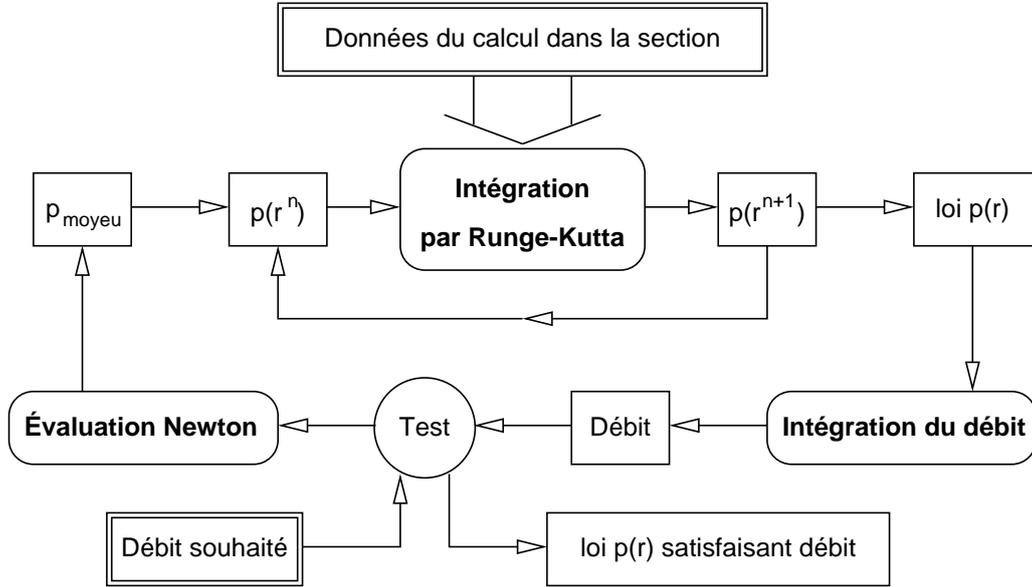


FIG. 3 – Schéma du processus itératif global, incluant l'intégration de l'équation différentielle de la pression (équilibre radial).

Ce processus itératif consiste donc à optimiser l'estimation de la condition initiale pour obtenir une quantité globale. Nous allons traiter l'exemple du débit : celui-ci dépend complètement du profil de pression résultant de l'intégration (on pourra utiliser une méthode des trapèzes ou de Simpson).

$$D = 2\pi \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \rho V_x r dr \quad (21)$$

Le profil de pression ayant été déterminé à l'aide de l'estimation de la pression au moyeu, on peut considérer que le débit est uniquement une fonction de  $p_m$ , la pression statique au moyeu. On cherche alors à résoudre  $D(p_m) = \mathcal{D}$  où  $\mathcal{D}$  est le débit recherché. On résout cette équation par la méthode de Newton ou par la méthode de la sécante (Annexe A). À partir de l'estimation  $p_m^n$  et de son débit associé  $D^n$  (voire des valeurs aux itérations précédentes), ces méthodes donnent une nouvelle estimation du paramètre  $p_m^{n+1}$  qui permettra de calculer un débit plus proche du débit recherché  $\mathcal{D}$ .

Une approche est possible : plutôt que d'itérer sur le débit en intégrant sur une hauteur de veine constante  $[r_{\min}; r_{\max}]$ , on peut intégrer sur une hauteur  $[r_{\min}; r^n]$  variable qui permet de satisfaire le débit. L'itération sur le rayon du carter  $r^n$  se déroule de la même manière que pour le débit.

Les méthodologies adoptées diffèrent selon le type de section que l'on analyse : section amont d'un rotor ou d'un stator, dite section d'entrée, ou section aval de cette même roue, dite section de sortie.

## 4.2 Calcul d'un plan d'entrée

Dans une section d'entrée, des considérations physiques nous poussent à imposer les quantités d'arrêt. En effet, elles ont le bon goût d'être des grandeurs caractéristiques de l'écoulement et, avec les bonnes hypothèses, se conservent le long de trajectoire. Ainsi, on peut les imposer en considérant la conservation depuis l'infini amont, voire en tenant compte d'éventuels chocs pour des entrées d'air supersoniques. On peut aussi tout simplement utiliser des mesures expérimentales.

En ce qui concernent les angles ( $\varphi$  pour les effets de conicité, et la déviation  $\beta$ ) et la courbure, on peut soit commencer à imposer une progression linéaire cohérente avec celle de la géométrie de la veine (pour  $\varphi$  et la courbure  $C_m$ ), soit utiliser des données expérimentales. Pour la déviation  $\beta$ , selon la proximité de la roue, on peut imposer l'angle d'attaque de la pale (approche triangle des vitesses) ou directement utiliser les sorties d'un calcul inter-aubes (attention aux changements de repère).

Lorsque l'on dispose de toutes les données nécessaires, on applique directement la méthode détaillée dans la section précédente. En générale, la donnée est celle du débit. Le calcul est alors itératif.

## 4.3 Calcul d'un plan de sortie

Du point de vue des données à imposer, sauf dans le cas où elles sont directement données par des mesures expérimentales, on dispose surtout de coefficients d'efficacité qui définissent les pertes subies à la traversée de la roue. Il faut alors prendre à garde à leurs définitions, qui nécessitent parfois de se placer dans le repère tournant.

Comme pour le plan d'entrée, on définira souvent les angles soit par mesure, soit par considérations géométriques (interpolation de la géométrie de la veine pour  $\varphi$ , déviation  $\beta$  par le triangle des vitesses).

Le point où la méthodologie diffère est celui du lien entre le plan de d'entrée et le plan de sortie. On pourrait évidemment itérer sur la valeur de la pression au moyeu pour respecter le débit imposé (généralement le même que pour la section d'entrée). Cette méthode est tout à fait suffisante pour déterminer le plan de sortie. Mais on recherche aussi à déterminer l'évolution des nappes de courant dans la veine. Cette évolution peut être donnée par la détermination de la fonction  $r^{\text{out}}(r^{\text{in}})$  : une nappe de courant issue du rayon  $r^{\text{in}}$  en entrée arrive en  $r^{\text{out}}$  dans la section de sortie (figure 2).

On a a priori le choix d'intégrer la pression dans la section de sortie et d'effectuer ensuite un post-traitement des données calculées dans les deux sections, ou d'intégrer simultanément les équations de débit et de l'équilibre radial.

Dans les deux cas (post-traitement ou intégration simultanée), on utilise la conservation du débit qui s'exprime, en axisymétrique,

$$\left[ \rho r V_x dr \right]_{\text{in}} = \left[ \rho r V_x dr \right]_{\text{out}} \quad (22a)$$

où le terme  $\rho V_x$  peut s'écrire

$$\rho V_x = \sqrt{\frac{\gamma}{\mathbf{r}}} \frac{p_i}{\sqrt{T_i}} M_x \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (22b)$$

Dans le cas de l'intégration simultanée, on choisit alors la variable  $r^{\text{in}}$  du plan d'entrée. On intègre sur  $[r_{\text{min}}^{\text{in}}; r_{\text{max}}^{\text{in}}]$ . Le problème de Cauchy pour l'équilibre radial s'écrit de la même façon

que pour le plan d'entrée. La seule différence est que le pas  $\Delta r^{\text{out}}$  dans le plan de sortie est déterminé par l'équation de conservation du débit (22a) au lieu d'utiliser un pas constant.

Ainsi, l'intégration complète assure la conservation du débit, mais rien n'assure que l'intégration de la fonction  $r^{\text{out}}(r^{\text{in}})$  donne  $r^{\text{out}}(r_{\text{max}}^{\text{in}}) = r_{\text{max}}^{\text{out}}$ . C'est pourquoi on doit itérer sur l'estimation de la pression au moyeu dans le plan de sortie pour retrouver  $r^{\text{out}}(r_{\text{max}}^{\text{in}}) = r_{\text{max}}^{\text{out}}$ .

L'intérêt de l'intégration simultanée est de calculer les quantités dans le plan de sortie au lieu exact de l'arrivée de nappes issues du plan d'entrée. Ainsi, on peut effectivement définir les quantités génératrices aval en fonction des quantités amont, via des coefficients de perte ou des rendements. Par contre, la conservation du débit n'est assurée qu'à la précision de la méthode d'intégration près.

Seul le cas où on connaît explicitement les quantités génératrices dans la section permet de découpler le calcul de la section de sortie et celui de l'évolution des lignes de courant.

Enfin, pour calculer les différents étages, on peut éventuellement utiliser les données du plan de sortie de la première roue pour calculer la roue suivante (figure 2, grille de compression et grille de redresseurs).

---

# ANNEXES

## A Recherche de solution par méthode itérative

La recherche de racines d'une fonction quelconque se fait en général de manière itérative. Cette approche est à la base de la recherche de paramètres où la fonction n'est pas connue mais découle d'un processus de calcul complexe. On s'intéresse ici à calculer  $p$  telle que  $F(p) = 0$ .

Deux méthodes itératives sont présentées : la méthode de la sécante et la méthode de Newton. Elles consistent toutes les deux à approcher localement la fonction par une droite (à définir selon la méthode), utiliser la solution donnée par cette droite et recommencer le processus jusqu'à convergence.

On note  $x_0$  l'estimation initiale et  $x_n$  les estimations suivantes. On note  $F_n$  la valeur associée à  $F(x_n)$ .

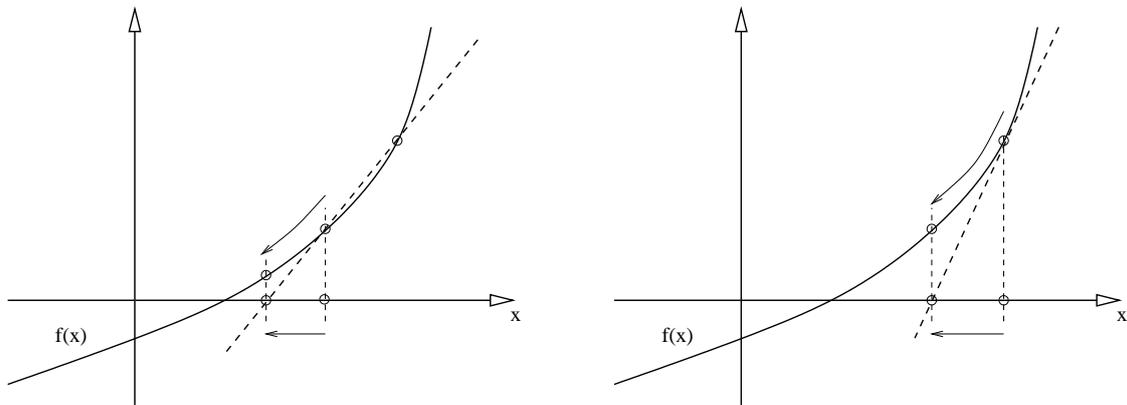


FIG. 4 – Schéma de fonctionnement des méthodes itératives, méthode de la sécante à gauche, méthode de Newton à droite.

### A.1 Méthode de la sécante

La méthode de la sécante consiste à utiliser deux points connus de la fonction pour définir la droite approchant localement la fonction (figure 4, gauche). Le processus étant censé converger, le choix des deux derniers points calculés est le meilleur. L'équation de la droite est

$$y = \frac{F_n - F_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} (x - x_n) + F_n \quad (23)$$

L'estimation suivante de la solution est l'intersection de la droite avec l'axe des  $x$ . On a donc

$$x_{n+1} = x_n - F_n \frac{x_n - x_{n-1}}{F_n - F_{n-1}} \quad (24)$$

Le point particulier de la méthode est de démarrer le calcul : il faut deux évaluations pour pouvoir faire une estimation. On peut, soit prendre deux points arbitraires, soit imposer à la première itération une pente très importante de la droite, ce qui conduit à estimer le point

$x_1$  très proche de  $x_0$ . On peut aussi estimer le deuxième point  $x_2$  selon  $(1 + \varepsilon)x_1$ . Les deux premières itérations de la méthode de la sécante sont alors équivalentes à une itération par la méthode de Newton (section A.2).

## A.2 Méthode de Newton

Dans la méthode de Newton, la droite approchant localement la fonction est la tangente à la courbe au dernier point calculé (figure 4, droite). L'équation de la droite est donc

$$y = \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x_n} (x - x_n) + F_n \quad (25)$$

L'estimation suivante de la solution est toujours l'intersection de la droite avec l'axe des  $x$ . On a donc

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F_n}{\left. \frac{dF}{dx} \right|_{x_n}} \quad (26)$$

La difficulté est ici d'évaluer la dérivée en  $x_n$ . Soit la forme analytique de la dérivée est connue et on calcule directement sa valeur en  $x_n$ . Soit il est impossible ou bien trop coûteux de la calculer et on a recours à une évaluation approchée par différences finies :

$$\left. \frac{dF}{dx} \right|_{x_n} \simeq \frac{F(x_n + \varepsilon) - F(x_n)}{\varepsilon} \quad (27)$$

On remarque que le coût de cette évaluation est le double de celui de l'évaluation d'un point de  $F(x)$ . On retiendra que dans ce cas, la méthode de Newton est, par itération, deux fois plus coûteuse que la méthode de la sécante. Par contre, on peut espérer que la convergence soit plus rapide.

## B Méthode d'intégration explicite de type Runge et Kutta

À partir du problème de Cauchy composé d'une équation différentielle ordinaire et d'une condition initiale,

$$\begin{cases} \frac{dp}{dr} = F(p, r) \\ p(r_c) = p_c \end{cases} \quad (28)$$

on peut intégrer numériquement cette équation en calculant un ensemble de points  $(r_n, p^n)$  avec  $(r_0, p^0) = (r_c, p_c)$  et une discrétisation par la méthode de Runge et Kutta de l'équation différentielle ordinaire. La formulation générale du pas de calcul pour ce type de méthode explicite est, pour un point donné  $(r_n, p^n)$ ,

$$\begin{cases} \delta p^{(n,1)} = \Delta r F(p^n, r_n) \\ \delta p^{(n,2)} = \Delta r F(p^n + \kappa_2 \delta p^{(n,1)}, r_n + \kappa_2 \Delta r) \\ \vdots \\ \delta p^{(n,N)} = \Delta r F(p^n + \kappa_N \delta p^{(n,N-1)}, r_n + \kappa_N \Delta r) \\ p^{n+1} = p^n + \sum_{i=1}^N K_i \delta p^{(n,i)} \end{cases} \quad (29)$$

où les coefficients  $\kappa_n$  et  $K_n$  sont habilement ajustés pour atteindre l'ordre de précision souhaité. On résume dans le tableau 1 les schémas d'intégration les plus connus et utilisés.

| Méthode    | Euler | Euler amélioré | Euler-Cauchy | RK4 |
|------------|-------|----------------|--------------|-----|
| N/ordre    | 1     | 2              | 2            | 4   |
| $\kappa_2$ |       | 1/2            | 1            | 1/2 |
| $\kappa_3$ |       |                |              | 1/2 |
| $\kappa_4$ |       |                |              | 1   |
| $K_1$      | 1     | 0              | 1/2          | 1/6 |
| $K_2$      |       | 1              | 1/2          | 1/3 |
| $K_3$      |       |                |              | 1/3 |
| $K_4$      |       |                |              | 1/6 |

TAB. 1 – Définitions des coefficients pour les méthodes type Runge et Kutta.