



Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace

# Introduction au filtre de Kalman

*Notes de cours*  
*Exercices corrigés*  
*Sessions Matlab*

D.Alazard

Mai 2011 - version 0.3

PAGE SANS TEXTE

# Sommaire

<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1 Signaux aléatoires et systèmes linéaires</b>	<b>7</b>
1.1 Position du problème . . . . .	7
1.2 Rappels et définitions . . . . .	9
1.2.1 Caractérisation d'une variable aléatoire scalaire . . . . .	9
1.2.2 Caractérisation d'une variable aléatoire à plusieurs dimensions	11
1.2.3 Signal aléatoire (processus stochastique) . . . . .	14
1.2.4 Moments d'un signal aléatoire . . . . .	14
1.2.5 Stationnarité . . . . .	15
1.2.6 Spectre complexe . . . . .	17
1.2.7 Bruit blanc . . . . .	20
1.3 Passage d'un signal aléatoire dans un système linéaire . . . . .	20
1.3.1 Approche temporelle . . . . .	20
1.3.2 Approche fréquentielle (spectrale) . . . . .	21
1.4 Illustration sous Matlab . . . . .	23
1.5 Conclusion . . . . .	26
<b>2 Le filtre de Kalman</b>	<b>27</b>
2.1 Principe du filtre de KALMAN . . . . .	27
2.1.1 Le modèle de KALMAN . . . . .	27
2.1.2 Hypothèses . . . . .	28
2.1.3 Structure d'un estimateur non biaisé . . . . .	30
2.2 Estimateur à variance minimale . . . . .	32
2.2.1 Solution générale . . . . .	33
2.2.2 Régime permanent du filtre de KALMAN . . . . .	34
2.2.3 Réglage du filtre de KALMAN . . . . .	34
2.3 Exercices corrigés . . . . .	36

2.3.1	Système du premier ordre . . . . .	36
2.3.2	Estimation d'un biais . . . . .	39
2.4	Le filtre de KALMAN discret . . . . .	45
2.4.1	Le modèle de KALMAN discret . . . . .	45
2.4.2	Cas particulier d'un système continu échantillonné . . . . .	46
2.4.3	Les équations récurrentes du filtre de KALMAN . . . . .	48
2.4.4	Exemple . . . . .	52
2.5	Exercices . . . . .	53
2.5.1	Système du second ordre: . . . . .	53
<b>3</b>	<b>A propos des unités physiques</b>	<b>55</b>
	<b>Références</b>	<b>57</b>
<b>A</b>	<b>Intégration de l'équation l'état</b>	<b>59</b>
A.1	Cas continu . . . . .	59
A.2	Cas discret . . . . .	61
<b>B</b>	<b>Passage d'un bruit dans un système linéaire</b>	<b>63</b>
B.1	Complément: caractérisation des signaux aléatoires discrets . . . . .	63
B.2	Approche temporelle . . . . .	64
B.2.1	Cas continu . . . . .	64
B.2.2	Cas discret . . . . .	66
B.3	Approche fréquentielle . . . . .	68
B.3.1	Cas continu . . . . .	68
B.3.2	Cas discret . . . . .	69
<b>C</b>	<b>Code source Matlab des fichiers de démonstration</b>	<b>71</b>
C.1	Fonction Kf_t.m . . . . .	71
C.2	Fichier demoKalman.m . . . . .	71
C.3	Fichier demoKalmand.m . . . . .	73

# Introduction

Ce document est une introduction au filtre optimal de KALMAN appliqué aux systèmes linéaires. On suppose connues la théorie des asservissements linéaires et du filtrage fréquentiel (continu et discret) ainsi que les notions d'états pour représenter les systèmes dynamiques linéaires.

D'une façon générale, la fonction de filtrage consiste à estimer une information (signal) utile qui est polluée par un bruit. Alors que le filtrage fréquentiel suppose qu'il existe une séparation entre les réponses fréquentielles du signal utile et du bruit et consiste à trouver une fonction de transfert satisfaisant un gabarit sur le gain de sa réponse fréquentielle (et beaucoup plus rarement sur la courbe de phase), le filtre de KALMAN vise à estimer de façon "optimale" l'état du système linéaire (cet état correspond donc à l'information utile). Avant de définir le critère d'optimalité qui permettra de calculer le filtre de KALMAN (et qui est en fait un critère stochastique), il est nécessaire de faire quelques rappels sur les signaux aléatoires.

Dans la premier chapitre de ce document, nous rappelons comment on caractérise mathématiquement un signal aléatoire et nous étudierons la réponse d'un système linéaire à un signal aléatoire de façon tout à fait complémentaire à la réponse d'un système linéaire à un signal déterministe (échelon, rampe, ...). Dans le second chapitre nous donnerons tous les éléments définissant la structure du filtre de KALMAN. Le lecteur désirant s'informer sur la méthodologie générale de réglage d'un filtre de KALMAN pourra directement aller au chapitre 2. Par contre la lecture du chapitre 1, certes plus lourd sur le plan théorique, sera incontournable à celui qui voudra comprendre les principes de base utilisés dans le traitement des signaux aléatoires et sur lesquels est fondé le filtre de KALMAN.

Les applications du filtre de KALMAN sont nombreuses dans les métiers de l'ingénieur. Le filtre de KALMAN permettant de donner un estimé de l'état de système à partir d'une information a priori sur l'évolution de cet état (modèle) et de mesures réelles, il sera utilisé pour estimer des conditions initiales inconnues (**balistique**), prédire des trajectoires de mobiles (**trajectographie**), localiser un engin (**navigation, radar,...**) et également pour implanter des lois de commande fondées sur un estimateur de l'état et un retour d'état (**Commande Linéaire Quadratique Gaussienne**). Les bases de traitement de signal sur lesquelles re-

pose le filtre de KALMAN seront également utiles à tout ingénieur confronté à des problèmes de définition de protocoles d'essais, de dépouillements d'essais et également d'**identification paramétrique**, c'est-à-dire la détermination expérimentale de certains paramètres du modèle.

# Chapitre 1

## Signaux aléatoires et systèmes linéaires

### 1.1 Position du problème

Considérons le modèle d'état d'un système supposé linéaire et stationnaire :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Mw(t) & \text{(équation d'état)} \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) + v(t) & \text{(équation de mesure)} \end{cases} \quad (1.1)$$

où :

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état du système,
- $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur des entrées déterministes et connues (commandes,...),
- $w(t) \in \mathbb{R}^q$  est le vecteur des signaux aléatoires inconnus qui viennent perturber directement l'équation d'état du système à travers une matrice d'entrée  $M_{n \times q}$  (on note  $w_x = Mw$  le bruit d'état),
- $y(t) \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur des mesures,
- $v(t) \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur des signaux aléatoires (bruit de mesure) qui polluent les mesures  $y(t)$  (on suppose qu'il y a autant de bruits que de mesures).

**Exemple 1.1** *Le modèle dit "quart de véhicule" utilisé pour étudier une suspension active de voiture est représenté sur la figure 1.1. L'organe de commande permet d'appliquer des efforts  $u$  entre la roue (de masse  $m$  repérée par sa position verticale  $z$ ) et la caisse du véhicule (de masse  $M$  repérée par sa position verticale  $Z$ ). On désigne par  $K$  et  $f$  la raideur et le frottement visqueux de la suspension passive, par  $k$  la raideur du pneu entre la roue et la route. Enfin, on note  $w$  la position verticale du point de contact pneu/sol sollicitée par les irrégularités de la route (bruit de*

roulement). On mesure l'accélération de la caisse avec un accéléromètre sensible à la gravité ( $g = -9.81 \text{ m/s}^2$ ) et on note  $v$  le bruit de mesure de ce capteur.

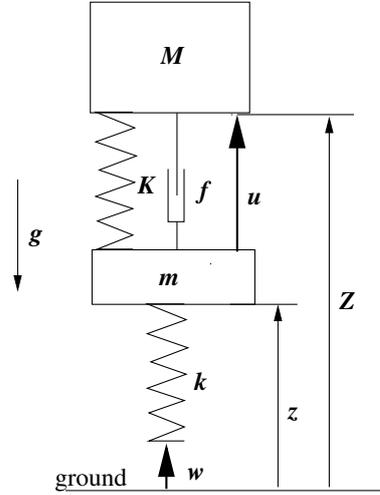


Figure 1.1: Modèle 1/4 de véhicule.

On note  $\delta z$  et  $\delta Z$  les variations de  $z$  et  $Z$  autour d'une position d'équilibre  $z_0$  et  $Z_0$  (obtenue en supposant que  $w = 0$ ,  $u = 0$  et que la gravité est entièrement compensée par l'écrasement des 2 raideurs  $K$  et  $k$ ). En appliquant le principe fondamental de la dynamique sur les 2 masses  $M$  et  $m$  (calcul aux variations), on obtient :

$$\begin{aligned} M\delta\ddot{Z} &= K(\delta z - \delta Z) + f(\dot{\delta z} - \dot{\delta Z}) + u \\ m\delta\ddot{z} &= -K(\delta z - \delta Z) - f(\dot{\delta z} - \dot{\delta Z}) - u - k(\delta z - w). \end{aligned}$$

En choisissant  $x = [\delta Z, \delta z, \dot{\delta Z}, \dot{\delta z}]^T$  comme vecteur d'état, on obtient la représentation d'état suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -K/M & K/M & -f/M & f/M \\ K/m & -(K+k)/m & f/m & -f/m \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1/M & 0 \\ -1/m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/k \end{bmatrix} w \\ y &= \begin{bmatrix} -K/M & K/M & -f/M & f/M \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1/M & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ g \end{bmatrix} + v. \end{aligned} \tag{1.2}$$

On obtient donc un modèle du type de (1.1) avec  $n = 4$ ,  $m = 2$ ,  $q = 1$  et  $p = 1$ .

□

On reconnaît dans les matrices  $(A, B, C, D)$  du modèle (1.1) la représentation d'état "classique" du transfert entre l'entrée  $u$  et la sortie  $y$  :<sup>1</sup> :

$$F(s) = D + C(sI - A)^{-1}B .$$

La réponse de ce modèle à des entrées déterministes  $u(t)$  sur un horizon  $t \in [t_0, t]$  et à des conditions initiales  $x(t_0)$  s'écrit :

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau \quad (1.3)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (1.4)$$

**Démonstration:** voir annexe A dans la quelle figure également un exercice d'application.

**Qu'en est-il de la réponse du modèle (1.1) à un signal aléatoire  $w(t)$  ?**

Pour répondre à cette question, nous allons :

- d'abord rappeler comment on caractérise mathématiquement (ou stochastiquement) les signaux aléatoires (ou processus stochastiques),
- énoncer quelques hypothèses sur les caractéristiques stochastiques des bruits  $w(t)$  et  $v(t)$  (bruits blanc gaussiens) pour faciliter le calcul de la réponse du modèle (1.1),
- calculer les caractéristiques stochastiques de cette réponse ( $x(t)$  et  $y(t)$ ).

Les différentes définitions et rappels donnés ci-dessous sont extraits de la référence [4] (chapitre II et annexe A.I).

## 1.2 Rappels et définitions

### 1.2.1 Caractérisation d'une variable aléatoire scalaire

Soit  $\mathcal{X}$  une variable aléatoire scalaire prenant ses valeurs dans  $\mathbb{R}$ . La **fonction de répartition**  $F(x)$  associe à tout réel  $x$  la probabilité de l'événement  $\mathcal{X} < x$ . On note:

$$F(x) = P[\mathcal{X} < x] .$$

Propriétés:

- $\forall x_1 < x_2, \quad P[x_1 \leq \mathcal{X} < x_2] = F(x_2) - F(x_1),$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1; \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0.$

<sup>1</sup> $s$  désigne la variable de LAPLACE.

- $F(x)$  est monotone, non décroissante, et peut être continue ou discontinue selon que  $\mathcal{X}$  prenne des valeurs continues ou discrètes.

Si  $F(x)$  est dérivable, alors sa dérivée est appelée **densité de probabilité** et notée  $p(x)$ :

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad \text{soit :} \quad p(x)dx = P[x \leq \mathcal{X} < x + dx].$$

Pour caractériser et manipuler mathématiquement une variable aléatoire  $\mathcal{X}$ , on utilise également les **moments** de cette variable. Le **moment** d'ordre 1 est plus connu sous le nom de **moyenne** ou **espérance mathématique**. Le moment centré d'ordre 2 est appelé **variance** que l'on note  $var_x = \sigma_x^2$ ;  $\sigma_x$  désigne l'**écart type**. Soit :

- l'**espérance mathématique** ou **moyenne**:

$$E[\mathcal{X}] = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x), \quad (1.5)$$

- le **moment d'ordre  $k$** :

$$E[\mathcal{X}^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k p(x) dx, \quad (1.6)$$

- le **moment centré d'ordre  $k$** :<sup>2</sup>

$$E[(\mathcal{X} - E[\mathcal{X}])^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E[\mathcal{X}])^k p(x) dx.$$

Les moments d'ordre supérieur ou égal à 3 sont très peu utilisés car ils se prêtent mal au calcul théorique. L'intérêt (mathématique) des variables aléatoires **gaussiennes** est qu'elles sont entièrement caractérisées par leurs moments d'ordre 1 et 2. Soit  $\mathcal{X}$  une variable aléatoire gaussienne de moyenne  $m$  et d'écart type  $\sigma$ , alors:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad E[x] = m, \quad E[(x - m)^2] = \sigma^2.$$

**Exemple 1.2 (Loi uniforme)** La variable aléatoire  $\mathcal{X}$  est équirépartie entre deux valeurs  $a$  et  $b$  avec  $b > a$ .

$$E[\mathcal{X}] = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_a^b = \frac{1}{2} \frac{b^2 - a^2}{b-a} = \frac{a+b}{2}$$

$$var_x = E[(\mathcal{X} - E[\mathcal{X}])^2] = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left( x - \frac{a+b}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{b-a} \left[ \frac{1}{3} \left( x - \frac{a+b}{2} \right)^3 \right]_a^b$$

<sup>2</sup>Rappel:  $var_x = E[\mathcal{X}^2] - E[\mathcal{X}]^2$ .

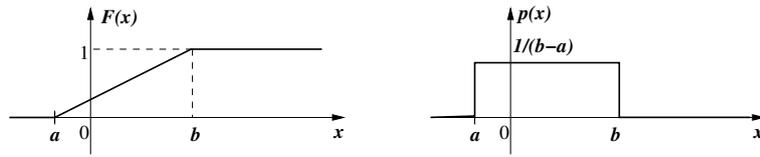


Figure 1.2: Fonction de répartition et densité de probabilité de la loi uniforme.

$$\Rightarrow \text{var}_x = \frac{1}{3} \frac{1}{b-a} \left( \frac{b-a}{2} \right)^3 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

□

**Variable aléatoire discrète:** si la variable aléatoire  $\mathcal{X}$  prends ses valeurs dans un ensemble discret de  $N$  valeurs  $x_i, i = 1, \dots, N$  alors on ne parle plus de densité de probabilité et on définit directement la "probabilité que  $\mathcal{X} = x_i$ " que l'on note  $P(\mathcal{X} = x_i)$ . Le calcul des moments fait alors intervenir une somme discrète :

$$E[\mathcal{X}^k] = \sum_{i=1}^N x_i^k P(\mathcal{X} = x_i).$$

**Exemple 1.3** La variable aléatoire  $\mathcal{X}$  correspondante au lancé d'un dé:

$$P(\mathcal{X} = i) = \frac{1}{6}, \forall i = 1, \dots, 6; \quad E[\mathcal{X}] = \frac{21}{6}; \quad \text{var}_x = \frac{35}{12}.$$

□

## 1.2.2 Caractérisation d'une variable aléatoire à plusieurs dimensions

Soit  $\mathcal{X} = [\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_q]^T$  une variable aléatoire à  $q$  dimensions prenant ses valeurs dans  $\mathbb{R}^q$ .

### Fonction de répartition

$$F(x_1, \dots, x_q) = P(\mathcal{X}_1 < x_1 \text{ et } \mathcal{X}_2 < x_2 \text{ et } \dots \text{ et } \mathcal{X}_q < x_q).$$

### Densité de probabilité

$$p(x_1, \dots, x_q) = \frac{\partial^q F(x_1, \dots, x_q)}{\partial x_1 \dots \partial x_q}.$$

### Moments

On note:  $x = [x_1, \dots, x_q]^T$  et on ne s'intéressera qu'au vecteur des moments d'ordre 1 (c'est-à-dire le vecteur moyen) et à la matrice des moments d'ordre 2 centrés (c'est à dire la matrice de covariance).

- Moyenne:  $E[\mathcal{X}] = [E[\mathcal{X}_1], \dots, E[\mathcal{X}_q]]^T$ .
- Covariance:  $\text{Cov}_x = E[(\mathcal{X} - E[\mathcal{X}])(\mathcal{X} - E[\mathcal{X}])^T]$ . L'élément  $\text{Cov}_x(i, j)$  de la ligne  $i$  et colonne  $j$  de cette matrice de covariance vérifie:

$$\text{Cov}_x(i, j) = \int_{\mathbb{R}^2} (x_i - E[\mathcal{X}_i])(x_j - E[\mathcal{X}_j]) dF(x_i, x_j).$$

La matrice de covariance est définie, positive et symétrique.

### Vecteur aléatoire gaussien de moyenne $m$ et de covariance $\Delta$

$$p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{q/2} \sqrt{\det \Delta}} e^{-\frac{1}{2}(x-m)^T \Delta^{-1}(x-m)}.$$

Le vecteur aléatoire gaussien de moyenne  $m$  et de covariance  $\Delta$  peut être généré à partir du **vecteur gaussien normalisé**  $\mathcal{N}$  (c'est-à-dire de moyenne nulle et de covariance unité) de la façon suivante:

$$\mathcal{X} = m + G\mathcal{N}$$

où  $G$  est une matrice vérifiant:  $GG^T = \Delta$ .

### Indépendance

Deux variables aléatoires  $\mathcal{X}_1$  et  $\mathcal{X}_2$  sont indépendantes si et seulement si:

$$F(x_1, x_2) = F(x_1)F(x_2).$$

Une condition nécessaire d'indépendance s'écrit :

$$E[\mathcal{X}_1 \mathcal{X}_2] = E[\mathcal{X}_1]E[\mathcal{X}_2]. \quad (1.7)$$

**Exercice 1.1** On considère 2 variables aléatoires  $\mathcal{X}_1$  et  $\mathcal{X}_2$  uniformément réparties entre  $-1$  et  $1$  et indépendantes. On définit la variable aléatoire  $\mathcal{Y} = \frac{\mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2}{2}$ . Calculer  $E[\mathcal{Y}]$ ,  $\text{var}_y$  et  $\text{cov}_{x_1, y}$  la matrice de covariance du vecteur:  $(\mathcal{X}_1, \mathcal{Y})^T$ .

**Correction :** D'après ce qui précède (lois uniformes), on peut écrire:

$$E[\mathcal{X}_1] = E[\mathcal{X}_2] = 0; \quad \text{var}_{x_1} = \text{var}_{x_2} = \frac{1}{3}.$$

Par définition:  $\mathcal{Y} = (1/2 \quad 1/2) \begin{pmatrix} \mathcal{X}_1 \\ \mathcal{X}_2 \end{pmatrix}$ . On en déduit :

$$E[\mathcal{Y}] = (1/2 \quad 1/2) E \left[ \begin{pmatrix} \mathcal{X}_1 \\ \mathcal{X}_2 \end{pmatrix} \right] = 0,$$

$$\text{var}_y = (1/2 \quad 1/2) E \left[ \begin{pmatrix} \mathcal{X}_1 \\ \mathcal{X}_2 \end{pmatrix} (\mathcal{X}_1 \quad \mathcal{X}_2) \right] \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = (1/2 \quad 1/2) \text{cov}_{x_1, x_2} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Du fait de l'indépendance de  $\mathcal{X}_1$  et  $\mathcal{X}_2$ :  $\text{cov}_{x_1, x_2} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \text{var}_y = \frac{1}{6}.$$

On montre également que:

$$\begin{aligned} \text{cov}_{x_1, y} &= G \text{cov}_{x_1, x_2} G^T, \quad \text{avec : } G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Remarque : on aurait pu également, au prix de calculs bien plus laborieux, caractériser (complètement) la variable aléatoire  $\mathcal{Y}$  par sa fonction de répartition  $F(y)$  et de densité de probabilité  $p(y)$  pour en déduire les moments d'ordre 1 et 2 :

$$F(y) = P \left( \frac{\mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2}{2} < y \right) = P(\mathcal{X}_1 < 2y - \mathcal{X}_2) = \int_{\mathcal{D}_{x_2}} P(\mathcal{X}_1 < 2y - x_2) p(x_2) dx_2.$$

Pour une valeur donnée de  $y$ , on peut écrire (voir figure 1.2):

$$P(\mathcal{X}_1 < 2y - x_2) = 0 \quad \forall x_2 / 2y - x_2 < -1 \Rightarrow \forall x_2 > 2y + 1,$$

$$P(\mathcal{X}_1 < 2y - x_2) = \frac{2y - x_2 + 1}{2} \quad \forall x_2 / -1 \leq 2y - x_2 < 1 \Rightarrow \forall x_2 / 2y - 1 < x_2 \leq 2y + 1,$$

$$P(\mathcal{X}_1 < 2y - x_2) = 1 \quad \forall x_2 / 2y - x_2 \geq 1 \Rightarrow \forall x_2 \leq 2y - 1.$$

Et  $p(x_2) = 1/2$  si  $-1 \leq x_2 < 1$ ,  $p(x_2) = 0$  sinon. Donc <sup>3</sup>:

$$\bullet \text{ si } y < 0 \quad F(y) = \int_{2y+1}^1 0 \frac{1}{2} dx_2 + \int_{-1}^{2y+1} \frac{2y - x_2 + 1}{4} dx_2 + 0 = \frac{(y+1)^2}{2},$$

<sup>3</sup>En utilisant les probabilités conditionnelles, on peut également écrire:

$$\begin{aligned} F(y) &= \int_{\mathcal{D}_{x_2}} 0 p(x_2 | x_2 > 2y + 1) dx_2 + \int_{\mathcal{D}_{x_2}} \frac{2y - x_2 + 1}{2} p(x_2 | 2y - 1 < x_2 \leq 2y + 1) dx_2 \\ &+ \int_{\mathcal{D}_{x_2}} 1 p(x_2 | x_2 \leq 2y - 1) dx_2. \end{aligned}$$

$$\bullet \text{ si } y \geq 0 \quad F(y) = 0 + \int_{2y-1}^1 \frac{2y - x_2 + 1}{4} dx_2 + \int_{-1}^{2y-1} \frac{1}{2} dx_2 = \frac{-y^2 + 2y + 1}{2}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} p(y) &= y + 1 \quad \forall y \in [-1, 0], \\ p(y) &= -y + 1 \quad \forall y \in [0, 1], \\ E[\mathcal{Y}] &= \int_{-1}^1 y p(y) dy = \int_{-1}^0 y(y+1) dy + \int_0^1 y(-y+1) dy = 0, \\ \text{var}_y &= \int_{-1}^1 y^2 p(y) dy = \int_{-1}^0 y^2(y+1) dy + \int_0^1 y^2(-y+1) dy = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

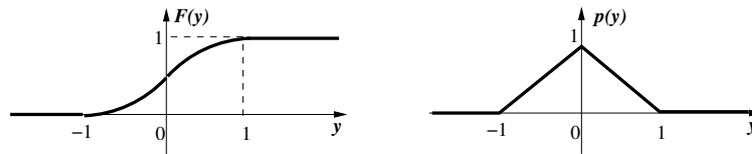


Figure 1.3: Fonction de répartition et densité de probabilité de  $\mathcal{Y}$ .

□

Dans ce qui suit, on parle de variable (resp. signal) aléatoire qu'il s'agisse d'une variable (resp. signal) scalaire ( $q = 1$ ) ou vectorielle à  $q$  composantes.

### 1.2.3 Signal aléatoire (processus stochastique)

Étant donné une variable aléatoire  $\mathcal{X}$ , le **signal aléatoire** ou **processus stochastique**  $x(t)$  est un signal fonction du temps  $t$  tel que pour tout  $t$  fixé,  $x(t)$  corresponde à une valeur de la variable aléatoire  $\mathcal{X}$ .

### 1.2.4 Moments d'un signal aléatoire

Le **moment** d'ordre 2 d'un signal aléatoire est appelé la **fonction d'auto-corrélation**.

Soit  $w(t)$  un signal aléatoire, alors:

$$\text{moment d'ordre 1:} \quad m(t) = E[w(t)] \quad (1.8)$$

$$\text{moment d'ordre 2:} \quad \phi_{ww}(t, \tau) = E[w(t)w(t + \tau)^T]. \quad (1.9)$$

**Remarque 1.1** Si  $w(t)$  est un signal vectoriel à  $q$  composantes alors  $\phi_{ww}(t, \tau)$  est une matrice de taille  $q \times q$  définie positive pour chaque valeur de  $t$  et de  $\tau$ . Les termes de la diagonales sont les fonctions scalaires d'auto-corrélation de chaque composantes et les termes hors-diagonaux sont les fonctions scalaires d'**inter-corrélation** entre composantes.

Un **signal aléatoire gaussien centré**, c'est-à-dire à moyenne nulle, est donc entièrement défini par sa fonction d'auto-corrélation.

### 1.2.5 Stationnarité

Un signal aléatoire est dit **stationnaire** à l'ordre 2 si sa moyenne est constante ( $m(t) = m$ ) et si sa fonction d'auto-corrélation ne dépend que de  $\tau$  ( $\phi_{ww}(t, \tau) = \phi_{ww}(\tau)$ ).

La moyenne quadratique ou variance <sup>4</sup> d'un signal aléatoire centré stationnaire est la valeur de la fonction d'auto-corrélation à l'origine:

$$\sigma_w^2 = \phi_{ww}(\tau)|_{\tau=0}$$

**Exemple 1.4** *Un signal aléatoire  $b(t)$  est généré de la façon suivante: à partir de l'instant initial  $t_0 = 0$ , on bloque le signal  $b(t)$  toutes les  $dt$  secondes sur la valeur d'une variable aléatoire gaussienne centrée  $\mathcal{X}$  d'écart type  $\sigma$ ; tous les tirages  $x_i$  de la variable  $\mathcal{X}$  sont indépendants les uns des autres. Soit:  $b(t) = x_i \forall t \in [idt, (i+1)dt[$  (voir figure 1.4).*

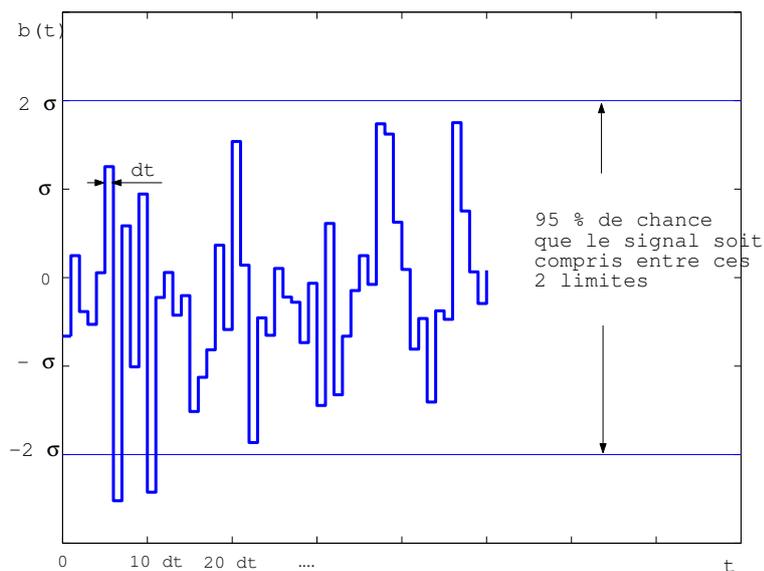


Figure 1.4: Réponse temporelle d'une réalisation du signal  $b(t)$ .

- Calculer la moyenne  $m(t)$  et la fonction d'auto-corrélation  $\phi_{bb}(t, \tau)$  du signal  $b(t)$ .  $b(t)$  est-il stationnaire à l'ordre 2?

<sup>4</sup>ou covariance s'il s'agit d'un signal aléatoire vectoriel.

- Reprendre les questions précédentes en supposant maintenant que l'instant initial est une variable aléatoire uniformément répartie entre 0 et  $dt$ .

**Éléments de solution:**

- $m(t) = E[b(t)] = E[\mathcal{X}] = 0, \quad \forall t,$
- $\phi_{bb}(t, \tau) = E[b(t)b(t + \tau)] = \sigma^2$  si  $t$  et  $t + \tau$  sont dans le même intervalle de temps  $dt$ ; 0 sinon (car les tirages sont indépendants et centrés).
- La fonction d'auto-corrélation dépend de  $t$  et  $\tau$ ; le signal  $b(t)$  n'est donc pas stationnaire à l'ordre 2. Par exemple, pour  $t = i dt + \varepsilon$  ( $\forall i, \forall \varepsilon \in [0, dt]$ ), la réponse de  $\phi_{bb}(t, \tau)$  est donnée sur la figure 1.5.

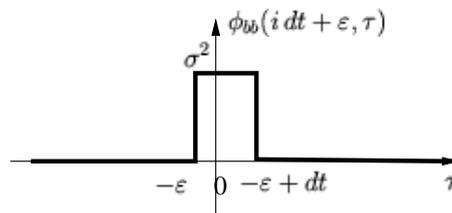


Figure 1.5: Fonction d'autocorrélation du signal  $b(t)$ .

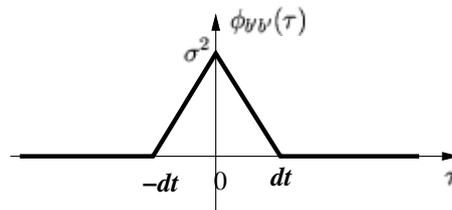


Figure 1.6: Fonction d'autocorrélation du signal  $b'(t)$ .

- si l'instant initial  $t_0$  est maintenant aléatoire uniformément réparti entre 0 et  $dt$  (on notera  $b'(t)$  ce nouveau signal aléatoire) alors cela revient à considérer que, dans le calcul précédent,  $\varepsilon$  est uniformément réparti entre 0 et  $dt$ :

$$\phi_{bb'}(t, \tau) = \frac{1}{dt} \int_0^{dt} \phi_{bb}(i dt + \varepsilon, \tau) d\varepsilon$$

– pour  $dt > \tau \geq 0$ ,  $\phi_{bb}(i dt + \varepsilon, \tau) = \sigma^2$  ssi  $0 < \varepsilon < dt - \tau$ , 0 sinon. Soit

$$\phi_{bb'}(t, \tau) = \frac{\sigma^2}{dt} \int_0^{dt-\tau} d\varepsilon = \frac{\sigma^2}{dt} (dt - \tau) \quad \forall \tau / 0 \leq \tau < dt.$$

– pour  $-dt < \tau < 0$ ,  $\phi_{bb}(i dt + \varepsilon, \tau) = \sigma^2$  si  $-\tau < \varepsilon < dt$ , 0 sinon. Soit :

$$\phi_{b'b'}(t, \tau) = \frac{\sigma^2}{dt} \int_{-\tau}^{dt} d\varepsilon = \frac{\sigma^2}{dt} (dt + \tau) \quad \forall \tau / -dt < \tau < 0 .$$

On a donc  $\phi_{b'b'}(t, \tau) = \sigma^2(1 - \frac{|\tau|}{dt}) \quad \forall \tau \in [-dt \quad dt]$ , 0 sinon (voir figure 1.6) qui ne dépend plus que de  $\tau$ , le signal est maintenant stationnaire à l'ordre 2.

□

## 1.2.6 Spectre complexe

On peut également caractériser les signaux aléatoires, s'ils sont **stationnaires**, par leurs réponses fréquentielles qu'on appelle **densité spectrale de puissance** ou leurs **spectres complexes** (on passe de l'un à l'autre en remplaçant  $s$  par  $j\omega$ ). On parle alors d'**analyse harmonique**. Le spectre complexe d'un signal aléatoire stationnaire est la transformée de LAPLACE bilatérale de sa fonction d'auto-corrélation <sup>5</sup>.

$$\Phi_{ww}(s) = \mathcal{L}_{II} [\phi_{ww}(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{ww}(\tau) e^{-\tau s} d\tau . \quad (1.10)$$

**Densité spectrale de puissance (DSP):**  $\Phi_{ww}(\omega) = \Phi_{ww}(s)|_{s=j\omega}$ .

**Remarque 1.2 :**

$$\begin{aligned} \Phi_{ww}(s) &= \int_0^{\infty} \phi_{ww}(\tau) e^{-\tau s} d\tau + \int_0^{\infty} \phi_{ww}(-u) e^{us} du \\ &= \Phi_{ww}^+(s) + \Phi_{ww}^-(s) \end{aligned}$$

avec :

$$\Phi_{ww}^+(s) = \mathcal{L}[\phi_{ww}^+(\tau)] \quad \text{et} \quad \phi_{ww}^+(\tau) = \phi_{ww}(\tau) \text{ si } \tau \geq 0, \quad \phi_{ww}^+(\tau) = 0 \text{ sinon},$$

$$\Phi_{ww}^-(s) = \mathcal{L}[\phi_{ww}^-(\tau)] \quad \text{et} \quad \phi_{ww}^-(\tau) = \phi_{ww}(-\tau) \text{ si } \tau \geq 0, \quad \phi_{ww}^-(\tau) = 0 \text{ sinon}.$$

Si la fonction  $\phi_{ww}(\tau)$  est paire alors  $\Phi_{ww}^+ = \Phi_{ww}^-$  et la spectre complexe  $\Phi_{ww}(s)$  est une fonction bicarrée en  $s$ .

Le théorème de la valeur initiale de la transformée de LAPLACE (mono-latérale) permet alors de calculer la variance directement à partir du spectre complexe :

$$\sigma_w^2 = \phi_{ww}(\tau)|_{\tau=0} = \lim_{s \rightarrow \infty} s \Phi_{ww}^+(s) .$$

<sup>5</sup>La transformée de LAPLACE bilatérale inverse s'écrit :

$$\phi_{ww}(\tau) = \mathcal{L}_{II}^{-1} \Phi_{ww}(s) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \Phi_{ww}(s) e^{s\tau} ds$$

□

**Remarque 1.3 :** A partir de la DSP on peut alors écrire :

$$\phi_{ww}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{ww}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad \text{et} \quad \sigma_w^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{ww}(\omega) d\omega .$$

La variance du bruit  $w$  est, à  $2\pi$  près, l'intégrale de sa DSP.

□

**Exemple 1.5** On reconsidère le signal  $b'(t)$  de la section 1.4 dont la fonction d'autocorrélation s'écrit :  $\phi_{b'b'}(t, \tau) = \sigma^2(1 - \frac{|\tau|}{dt})$  (fonction paire). Le spectre complexe de ce signal est :

$$\Phi_{b'b'}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2(1 - \frac{|\tau|}{dt}) e^{-\tau s} d\tau = \Phi_{b'b'}^+(s) + \Phi_{b'b'}^+(-s) \quad \text{avec:}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{b'b'}^+(s) &= \int_0^{dt} \sigma^2(1 - \frac{\tau}{dt}) e^{-\tau s} d\tau \\ &= \frac{\sigma^2}{dt} \left\{ \left[ \frac{dt - \tau}{-s} e^{-\tau s} \right]_0^{dt} - \frac{1}{s} \int_0^{dt} e^{-\tau s} d\tau \right\} \quad (\text{intégration par parties}) \\ &= \frac{\sigma^2}{dt} \left\{ \frac{dt}{s} + \left[ \frac{e^{-\tau s}}{s^2} \right]_0^{dt} \right\} = \frac{\sigma^2}{dt s^2} (s dt + e^{-s dt} - 1) . \end{aligned}$$

$$\boxed{\Phi_{b'b'}(s) = \frac{\sigma^2}{dt s^2} (e^{-s dt} + e^{s dt} - 2)} .$$

La densité spectrale de puissance est donc :

$$\Phi_{b'b'}(\omega) = -\frac{\sigma^2}{dt \omega^2} (e^{-j\omega dt} + e^{j\omega dt} - 2) = \frac{2\sigma^2}{dt \omega^2} (1 - \cos(\omega dt)) = \frac{4\sigma^2}{dt \omega^2} \sin^2\left(\frac{\omega dt}{2}\right)$$

$$\boxed{\Phi_{b'b'}(\omega) = \sigma^2 dt \frac{\sin^2\left(\frac{\omega dt}{2}\right)}{\left(\frac{\omega dt}{2}\right)^2}} .$$

La caractéristique de  $\Phi_{b'b'}(\omega)$  est présentée figure 1.7<sup>6</sup>. D'un point de vue pratique, on préférera la caractéristique en échelle logarithmique présentée figure 1.8 qui met en évidence que la densité spectrale de puissance peut-être considérée comme constante pour des pulsations très inférieures à la pulsation d'échantillonnage  $2\pi/dt$ .

**Ce signal pourra donc être utilisé comme une source de bruit blanc de densité spectrale  $R$  dans une plage de pulsations donnée si l'on choisit  $2\pi/dt$  très grand par rapport à cette plage de pulsations et si l'on choisit**

$\sigma^2 = R/dt$  (voir section suivante).

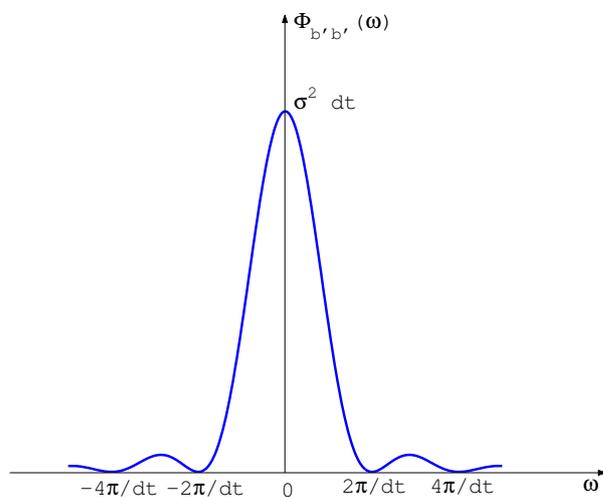


Figure 1.7: Densité spectrale de puissance du signal  $b'(t)$ .

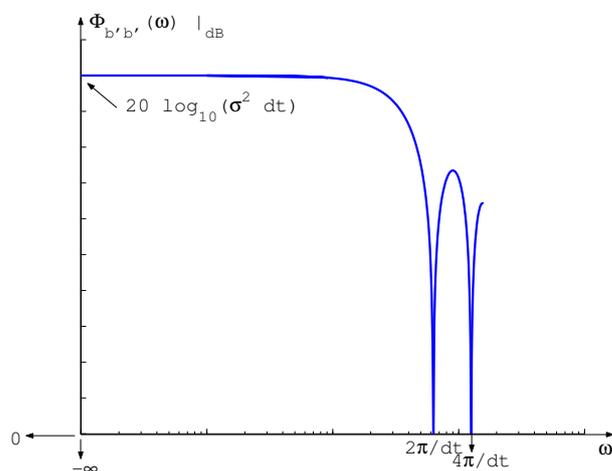


Figure 1.8: Densité spectrale de puissance du signal  $b'(t)$  (échelles logarithmiques).

□

Cette représentation fréquentielle des signaux aléatoires est particulièrement utile pour étudier la transmission des signaux aléatoires à travers les **systèmes linéaires stationnaires** (voir section 1.3.2).

### 1.2.7 Bruit blanc

Enfin, un **bruit blanc** est un signal aléatoire de variance infinie dont la fonction d'auto-corrélation est proportionnelle à un dirac (c'est-à-dire un spectre complexe constant sur toute la plage des fréquences). Cela traduit que les valeurs du signal pris à deux instants, même très proches, ne sont pas du tout corrélées.

Les bruits blancs gaussiens centrés  $w(t)$  et  $v(t)$  que nous allons utiliser dans le cadre du filtre de KALMAN sont donc entièrement définis par leur **densités spectrales** respectives  $W(t)$  et  $V(t)$ :

$$E[w(t)w(t+\tau)^T] = W(t)\delta(\tau), \quad E[v(t)v(t+\tau)^T] = V(t)\delta(\tau) \quad (1.11)$$

Les matrices  $W(t)$  et  $V(t)$  deviennent constantes dans le cas de bruits blancs stationnaires. Le bruit blanc gaussien normalisé est tel que  $W(t) = I_{q \times q}$  ( $q$ : nombre de composantes dans le bruit).

**Remarque 1.4** *En pratique, on ne sait pas simuler sur un ordinateur numérique un bruit blanc continu de densité spectrale finie  $R$  (mais de variance et de puissance infinies). On utilisera l'approximation présentée dans l'exemple 1.4 (voir figure 1.8) qui consiste à bloquer sur une période  $dt$  (que l'on choisira très petite par rapport aux constantes de temps du système que l'on veut simuler) une variable aléatoire gaussienne de variance  $\sigma^2 = R/dt$  (c'est cela même qui est fait dans le bloc "Band-limited white-noise" de Simulink).*

## 1.3 Passage d'un signal aléatoire dans un système linéaire

### 1.3.1 Approche temporelle

Sous l'hypothèse d'un système linéaire (équation 1.1) et d'un bruit  $w$  gaussien, nous pouvons affirmer que l'état  $x$  et la sortie  $y$  sont également des signaux (vectoriels) gaussiens qui sont donc entièrement caractérisés par leurs moments d'ordre 1 et 2. Le théorème suivant va nous permettre de calculer ces caractéristiques stochastiques. Nous supposons dans ce qui suit que l'entrée déterministe est nulle ( $u(t) = 0$ ).

<sup>6</sup>On rappelle que  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1$

**Théorème 1.1** *Soit le système linéaire:*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Mw(t) . \quad (1.12)$$

$w(t)$  est un bruit blanc gaussien stationnaire centré de densité spectrale de puissance  $W$ . On note  $m(t_0)$  et  $P(t_0)$  la moyenne et la covariance de l'état initial  $x(t_0)$  (lui aussi aléatoire). Alors  $x(t)$  est un signal aléatoire gaussien :

- de moyenne:

$$m(t) = E[x(t)] = e^{A(t-t_0)}m(t_0)$$

- de covariance  $P(t) = E[(x(t)-m(t))(x(t)-m(t))^T]$  vérifiant l'équation différentielle :

$$\dot{P}(t) = AP(t) + P(t)A^T + MWM^T . \quad (1.13)$$

Si le système est stable (toutes les valeurs propres de  $A$  sont à partie réelle négative) on tend vers un régime permanent (stationnaire) :  $\dot{P} = 0$  et  $P(t) = P$  vérifie alors l'équation de LYAPUNOV continue :

$$AP + PA^T + MWM^T = 0 . \quad (1.14)$$

**Démonstration:** (voir annexe B.2).

**Remarque 1.5** Si l'on considère l'équation de sortie  $y(t) = Cx(t)$  alors la matrice de covariance  $P_y(t)$  de  $y(t)$  vérifie :

$$P_y(t) = CP(t)C^T$$

(si l'on considère un bruit blanc de mesure, alors cette covariance est infinie).

### 1.3.2 Approche fréquentielle (spectrale)

Nous nous intéressons ici uniquement au régime permanent.

**Théorème 1.2 (Passage d'un bruit dans un système linéaire)** La sortie  $y$  d'un système linéaire **stable** défini par la matrice de transfert  $G(s)_{p \times q}$  et attaqué par un signal aléatoire  $w$  de spectre complexe  $\Phi_{ww}(s)_{q \times q}$  est un signal aléatoire de spectre complexe

$$\Phi_{yy}(s)_{p \times p} = G(-s)\Phi_{ww}(s)G^T(s) .$$

**Démonstration:** (voir annexe B.3).

Dans le cas d'un transfert  $G$  mono-entrée, mono sortie (SISO), cette relation est décrite par la figure 1.9.



Figure 1.9: Cas SISO.

**Réciproquement** : considérons un signal aléatoire  $w(t)$  de spectre complexe donné  $\Phi_{ww}(s)$  réel (c'est-à-dire qui ne fait apparaître que des puissances paires de  $s$ ; ce qui implique que la fonction d'auto-corrélation associée  $\phi_{ww}(\tau)$  est paire); alors la décomposition <sup>7</sup> :

$$\Phi_{ww}(s) = G(-s)G^T(s)$$

où  $G(s)$  est le transfert qui regroupe tous les pôles stables de  $\Phi_{ww}(s)$ , permet de donner une **représentation markovienne** du signal  $w(t)$ , c'est-à-dire une représentation d'état de  $G(s)$  notée (on supposera  $G(s)$  strictement propre).

$$\begin{cases} \dot{x}_G(t) = A_G x_G(t) + B_G b(t) \\ w(t) = C_G x_G(t) \end{cases}$$

où  $b(t)$  est un bruit blanc normalisé  $\Phi_{bb}(s) = I_{q \times q}$ .

**Exemple 1.6** On reprend l'exemple 1.1 relatif au modèle 1/4 de véhicule. Des essais en condition réelle de roulement ont montré que la densité spectrale de puissance du bruit de roulement pour un véhicule roulant à 90 km/h sur une départementale pouvait être approchée par la fonction suivante:

$$\Phi_{ww}(\omega) = \frac{\omega^2 + 10^4}{\omega^4 - 1.75 \cdot 10^4 \omega^2 + 10^8}$$

- Donner le spectre complexe du bruit  $w(t)$ .
- Donner une représentation markovienne de  $w(t)$ .
- Quel est la variance du signal  $w(t)$  (on suppose le signal centré)?

**Solution :**

a) Par définition:  $\Phi_{ww}(s) = \frac{-s^2 + 10^4}{s^4 + 1.75 \cdot 10^4 s^2 + 10^8}$ .

b) Une décomposition  $\Phi_{ww}(s) = G(-s)G(s)$  s'écrit :

$$\Phi_{ww}(s) = \left( \frac{10^2 + s}{s^2 - 50s + 10^4} \right) \left( \frac{10^2 - s}{s^2 + 50s + 10^4} \right).$$

<sup>7</sup>Une telle décomposition n'est pas unique comme le montre l'exemple 1.6.

Il faut regrouper dans  $G(s)$  tous les pôles stables de  $\Phi_{ww}(s)$ , ce qui permet de fixer le dénominateur de  $G(s)$  mais il n'y a aucune condition sur la "stabilité" des zéros de  $G(s)$ . Il y a donc 2 filtres stables qui permettent, lorsqu'il sont attaqués par un bruit blanc normalisé  $b(t)$ , de générer un bruit de spectre  $\Phi_{ww}(s)$ :

$$G(s) = \frac{10^2 - s}{s^2 + 50s + 10^4} \quad \text{et} \quad G'(s) = \frac{10^2 + s}{s^2 + 50s + 10^4}$$

Si l'on choisit  $G(s)$  alors une représentation markovienne de  $w(t)$  s'écrit (on choisit par exemple une forme compagne horizontale) :

$$\begin{cases} \dot{x}_G(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10^4 & -50 \end{bmatrix} x_G(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} b(t) \\ w(t) = [10^2 \quad -1] x_G(t) \end{cases} \quad (1.15)$$

c) La variance peut être calculée de 2 façons :

– à partir du spectre complexe et du théorème de la valeur initiale (voir Remarque 1.2) :

$$\Phi_{ww}(s) = \frac{1/50 s + 1/2}{s^2 + 50s + 10^4} + \frac{-1/50 s + 1/2}{s^2 - 50s + 10^4} = \Phi_{ww}^+(s) + \Phi_{ww}^-(-s)$$

$$\sigma_w^2 = \phi_{ww}(\tau)|_{\tau=0} = \lim_{s \rightarrow \infty} s \Phi_{ww}^+(s) = 1/50.$$

– à partir de la représentation markovienne et du théorème 1.1 : en régime permanent, la matrice de covariance  $P$  du vecteur d'état  $x_G$  de la représentation 1.15 vérifie l'équation de LYAPUNOV :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10^4 & -50 \end{bmatrix} P + P \begin{bmatrix} 0 & -10^4 \\ 1 & -50 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} 10^{-6} & 0 \\ 0 & 10^{-2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \sigma_w^2 = [10^2 \quad -1] \begin{bmatrix} 10^{-6} & 0 \\ 0 & 10^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10^2 \\ -1 \end{bmatrix} = 1/50.$$

□

## 1.4 Illustration sous Matlab

Le fichier `bruit.m` donné ci-dessous permet d'illustrer l'utilisation de macro-fonctions Matlab pour résoudre l'exemple 1.6. Il montre également comment simuler sur un calculateur numérique un tel bruit coloré à partir d'un bruit pseudo-blanc

échantillonné-bloqué à la cadence  $dt$  et permet donc de valider les résultats des exemples 1.4 et 1.5. Il utilise pour cela le fichier Simulink `simule_bruit.mdl` représenté sur la figure 1.10 <sup>8</sup>. Les réponses du bruit pseudo-blanc  $b(t)$  et du bruit de roulement  $w(t)$  présentées respectivement figures 1.11 et 1.12 mettent en évidence que la variance de  $w(t)$  est indépendante de  $dt$  (du moment que  $dt$  est rapide par rapport à la dynamique du filtre  $G(s)$ ) alors que la variance de  $b(t)$  est égale à  $1/dt$ : on retrouve que cette variance tend vers l'infini si  $dt$  tend vers 0 tout comme la variance d'un bruit blanc continu est infinie (par contre la densité spectrale de  $b(t)$  est indépendante de  $dt$  et vaut 1).

L'exemple B.1 en annexe complète cette illustration par une analyse de la variance du bruit  $w$  en temps discret (à la cadence  $dt$ ).

```
%=====
clear all close all
% Définition du filtre:
G=tf([-1 100],[1 50 10000])
% Calcul d'une réalisation:
[A,B,C,D]=ssdata(G);
% Calcul de la variance par l'équation de Lyapunov:
P=lyap(A,B*B'); var_w=C*P*C'
% ==> On retrouve bien le résultat espéré: variance=1/50.
%      (écart type: sigma=0.14)

% Validation en simulation: voir fichier SIMULINK: simule_bruit.mdl

% Choix d'un pas d'échantillonnage rapide par rapport à
% la dynamique du filtre (100 rd/s):
dt=0.0001;
% Simulation:
sim('simule_bruit');
% Tracé des résultats:
plot(b.time,b.signals.values,'k');
% Calcul numérique de la variance de b(t):
var(b.signals.values) % On retrouve var_b=1/dt=10000.
figure
plot(w.time,w.signals.values,'k')
% Calcul numérique de la variance de w(t):
var(w.signals.values) % On retrouve var_w=1/50 (à peu près)
```

<sup>8</sup>Merci d'envoyer un mail à [alazard@supaero.fr](mailto:alazard@supaero.fr) avec "Introduction Kalman" pour sujet si vous désirez une copie des 2 fichiers `bruit.m` et `simule_bruit.mdl`.

```

% On multiplie le pas d'échantillonnage par 10:
dt=0.001;
sim('simule_bruit');
figure(1) hold on
plot(b.time,b.signals.values,'g-');
var(b.signals.values) % On retrouve var_b=1/dt=1000.
figure(2) hold on
plot(w.time,w.signals.values,'g-')
var(w.signals.values) % On retrouve var_w=1/50 (à peu près).
%=====

```

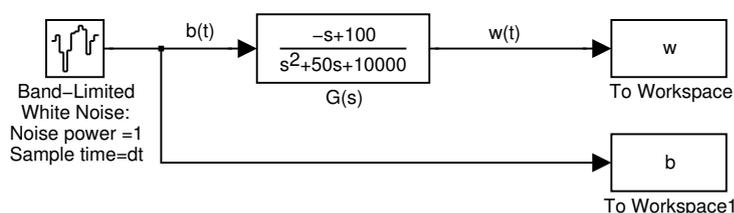


Figure 1.10: Fichier SIMULINK `simule_bruit.mdl` pour la simulation du bruit de roulement.

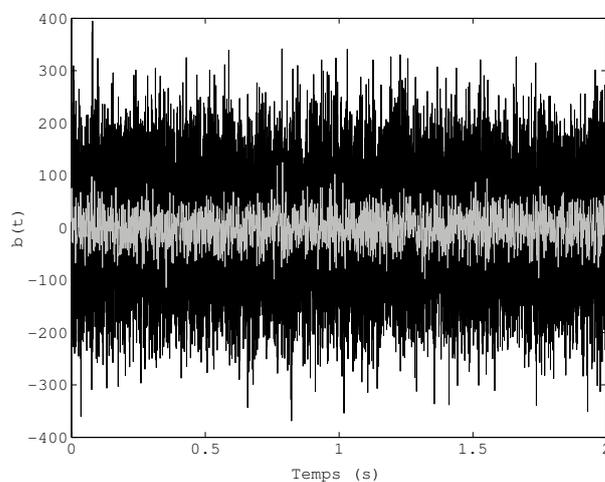


Figure 1.11: Réponse du bruit blanc normalisé  $b(t)$  (avec  $dt = 0.0001$  s: noir; avec  $dt = 0.001$  s: gris).

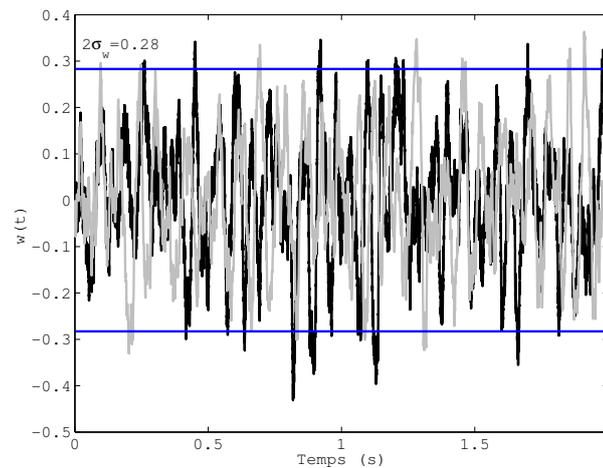


Figure 1.12: Réponse du bruit de roulement  $w(t)$  (avec  $dt = 0.0001$  s: noir; avec  $dt = 0.001$  s: gris).

## 1.5 Conclusion

Ce chapitre a permis de présenter les outils mathématiques utilisés pour analyser les signaux aléatoires continus et leurs transmission dans les systèmes dynamiques linéaires. Il a également permis d'introduire la notion de bruit gaussien centré (hypothèse requise dans le modèle de KALMAN présenté dans le chapitre suivant) qui a l'avantage d'être entièrement caractérisé par sa fonction d'autocorrélation (ou son spectre complexe s'il est stationnaire).

Le lecteur trouvera en annexe B des compléments pour l'analyse des signaux aléatoires discrets.

# Chapitre 2

## Le filtre de Kalman

### 2.1 Principe du filtre de Kalman

#### 2.1.1 Le modèle de Kalman

Nous reprenons le modèle présenté au début du chapitre 1 qui fait apparaître des entrées déterministes  $u(t)$  et aléatoires  $w(t)$  et  $v(t)$ . Nous supposons donc que notre système perturbé peut être modélisé par le modèle d'état suivant appelé **modèle de Kalman** :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Mw(t) & \text{équation d'état, } x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, w \in \mathbb{R}^q \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) + v(t) & \text{équation de mesure, } y \in \mathbb{R}^p, v \in \mathbb{R}^p \end{cases} \quad (2.1)$$

L'objectif du filtre de KALMAN est d'estimer les états  $x(t)$  du système. Cet estimé, noté  $\hat{x}(t)$ , est la sortie du filtre de KALMAN.

Le **modèle de Kalman** (2.1) suggère une relation entrée-sortie entre l'entrée déterministe  $u$  et la sortie  $y$ . Dans le domaine du traitement des signaux, cette relation entrée-sortie peut être différente de la relation classiquement utilisée en théorie des asservissements. En effet, et plus particulièrement dans la conception des filtres de navigation pour les véhicules aérospatiaux, le **modèle de Kalman model** (2.1) peut être utilisé pour décrire la relation entre deux types de mesures: les mesures primaires (regroupées dans le vecteur  $u$ ) et les mesures secondaires (regroupées dans le vecteur  $y$ ). L'objectif de filtre de KALMAN filter consiste alors à hybrider (fusionner) de façon optimale les mesures primaires et secondaires.

**Exemple 2.1** *Let us consider the motion of an aerospace vehicle (with a mass  $m$ ) along a single translation degree-of-freedom. Its position along this degree-of-freedom is named  $p(t)$ . To control the position  $p(t)$ , the spacecraft is fitted with an actuator (thruster). This actuator can be considered itself as a dynamic sub-system with a transfer function  $A(s)$  between its input  $u_c(t)$  (in fact the output of the control*

algorithm) and the output  $F(t)$ : the real thrust applied to the spacecraft ( $N$ ). The spacecraft is instrumented with:

- a linear accelerometer which measures the acceleration  $\ddot{p}(t) = \frac{d^2p(t)}{dt^2}$  with a noise  $w(t)$ , that is:  $\ddot{p}_m(t) = \ddot{p}(t) + w(t)$ ,
- a position sensor (star tracker) which measures the position  $p(t)$  with a noise  $v(t)$ , that is:  $p_m(t) = p(t) + v(t)$ .

The control algorithm (out of the scope of this document) requires estimates of the position  $\hat{p}(t)$  and the velocity  $\hat{v}(t) = \dot{\hat{p}}(t)$  of the spacecraft in order to compute the control signal  $u_c(t)$  to be sent to the actuator. Note that the velocity is not measured. To solve such a problem, one can use a KALMAN filter involving the accelerometer as primary measurement  $u(t) = \ddot{p}_m(t)$  (seen as the input of the KALMAN model) and the position sensor as secondary measurement  $y(t) = p_m(t)$  (seen as the output of the KALMAN model). Obviously, the **Kalman model** between  $u$  (acceleration) and  $y$  (position) is a double integration and reads:

$$\begin{aligned}\dot{p}(t) &= v(t) \\ \dot{v}(t) &= \ddot{p}(t) = u(t) - v(t) \\ y(t) &= p(t) + v(t)\end{aligned}$$

or using the general state-space representation (2.1) with  $x(t) = [p(t) \quad v(t)]^T$ :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} w(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + 0u(t) + v(t) \end{cases} \quad (2.2)$$

The block-diagram sketch of the whole system is represented in Figure 2.1. Of course such a KALMAN filter cannot be used to estimate the internal state of the actuator sub-system  $A(s)$  as the model of the actuator is not taken into account in the KALMAN model.

□

### 2.1.2 Hypothèses

Nous supposons que :

**H1:** La paire  $(A, C)$  est détectable, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de mode instable et inobservable dans le système,

**H2:** les signaux  $w(t)$  et  $v(t)$  sont des **bruits blancs gaussiens centrés de Densité Spectrale de Puissance (DSP)  $W$  et  $V$**  respectivement, c'est-à-dire :

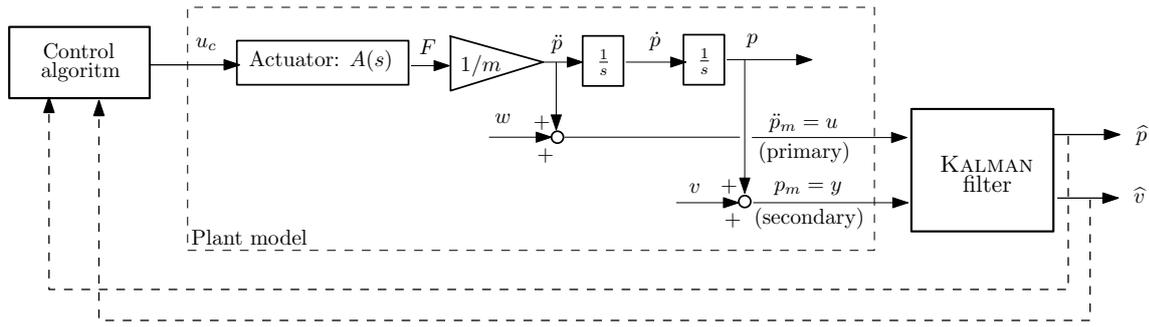


Figure 2.1: Schéma fonctionnel pour le contrôle d'un véhicule aérospatial basé sur un filtre de KALMAN pour fusionner les mesures primaire (accélération) et secondaire (position).

- $E[w(t)w(t+\tau)^T] = W\delta(\tau)$ ,
- $E[v(t)v(t+\tau)^T] = V\delta(\tau)$
- $E[w(t)v(t+\tau)^T] = 0$  (cette dernière relation traduit l'indépendance stochastique des bruits  $w(t)$  et  $v(t)$  : cette hypothèse est introduite pour alléger les calculs qui vont suivre mais n'est pas nécessaire. On trouvera dans la référence [4] les formules qui prennent en compte une corrélation entre les bruits d'état et de mesure).

**H3:**  $V$  est inversible (il y a autant de sources de bruits blancs indépendantes que de mesures dans l'équation de mesure)<sup>1</sup>.

### Quelques remarques:

- Bien que toute la théorie du filtre KALMAN soit valable dans le cas non-stationnaire, nous supposons que le système et les bruits sont stationnaires: les matrices  $A$ ,  $B$ ,  $M$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $W$  et  $V$  sont supposés ici indépendantes du temps.
- La moyenne d'un signal aléatoire, que l'on appelle aussi **biais**, est considérée comme déterministe et doit être, le cas échéant, extraite du signal  $w(t)$  pour que celui-ci satisfasse l'hypothèse de signal **centré** (hypothèse **H2**). Par exemple si le signal aléatoire  $w(t)$  qui perturbe le système linéaire défini par (2.1) est biaisé et si ce biais  $E[w(t)]$  est connu alors on appliquera le filtre de KALMAN sur le modèle suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + [B \quad M] \begin{bmatrix} u(t) \\ E[w(t)] \end{bmatrix} + M(w(t) - E[w(t)]) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) + v(t) \end{cases}$$

<sup>1</sup> $V$  est donc une matrice définie positive et  $W$  est une matrice semi-définie positive.

Le bruit d'état  $\bar{w}(t) = w(t) - E[w(t)]$  est maintenant centré. Si le biais  $E[w(t)]$  est inconnu alors on pourra le modéliser comme une condition initiale sur une variable d'état supplémentaire et le filtre de KALMAN permettra d'estimer ce biais (voir exemple de la section 2.3).

- Si les bruits sont des bruits colorés et caractérisés par des spectres complexes alors les résultats de la section 1.3.2 permettront de prendre en compte la "couleur" (ou réponse fréquentielle) de ces bruits par un modèle de KALMAN augmenté de la **représentation Markovienne** des bruits. Par exemple: si on connaît le spectre complexe  $\Phi_{ww}(s)$  du signal aléatoire  $w(t)$  centré et coloré qui intervient dans l'équation d'état (2.1), la décomposition  $\Phi_{ww}(s) = G(-s)G^T(s)$  permettra de déterminer une **représentation Markovienne** du signal aléatoire  $w(t)$  c'est-à-dire une représentation d'état de  $G(s)$  (voir exemple 1.6) :

$$\begin{cases} \dot{x}_G(t) = A_G x_G(t) + B_G b(t) \\ w(t) = C_G x_G(t) \end{cases}$$

où  $b(t)$  est maintenant un signal aléatoire de spectre complexe unitaire  $\Phi_{bb}(s) = I_{q \times q}$  (c'est-à-dire un bruit blanc normalisé).

Le modèle augmenté:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ x_G(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & M C_G \\ 0 & A_G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_G(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ B_G \end{bmatrix} b(t) \\ y(t) = [C \quad 0] \begin{bmatrix} x(t) \\ x_G(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

satisfait maintenant les hypothèses du modèle de KALMAN.

En fait toute l'information déterministe que l'on peut connaître du système doit être regroupée dans le modèle (soit  $\dot{x} = Ax + Bu$ ,  $y = Cx + Du$  et la matrice  $M$ ); toute l'information aléatoire doit être regroupée dans les bruits  $w(t)$  et  $v(t)$ . Le bruit d'état  $w_x = Mw$  représente les perturbations extérieures (le vent dans le cas d'un avion, les irrégularités de la route dans le cas d'une voiture, ...) et/ou également les erreurs de modélisation (écart entre le modèle tangent et le modèle non-linéaire qui apparaît lors de la linéarisation, phénomènes dynamiques négligés,...):  $w_x$  est un **majorant** de tout ce qui fait que l'état n'évolue pas exactement comme le prédit le modèle déterministe  $\dot{x} = Ax + Bu$ .

### 2.1.3 Structure d'un estimateur non biaisé

Un filtre de KALMAN est un système dynamique avec 2 entrées (vectorielles): la commande déterministe  $u$  et la mesure  $y$ , c'est-à-dire tous les signaux connus du système. L'état  $\hat{x}$  (ou la sortie) de ce filtre est un estimé de l'état  $x$  du système.

Soit :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A_f \hat{x}(t) + [B_f \quad K_f] \begin{bmatrix} u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$= A_f \hat{x}(t) + B_f u(t) + K_f y(t) \quad (2.4)$$

la représentation d'état de ce filtre. Bien entendu il faut **initialiser ce filtre avec**  $\hat{x}(t_0)$ : l'estimé de l'état du système à l'instant initial  $t_0$ .

On note  $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  l'erreur d'estimation de l'état du système et  $\varepsilon(t_0) = x(t_0) - \hat{x}(t_0)$  l'erreur d'initialisation.

En retranchant l'équation (2.4) de l'équation d'état (2.1) et en utilisant l'équation de mesure, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= Ax + Bu + Mw - A_f \hat{x} - B_f u - K_f (Cx + Du + v) \\ &= (A - K_f C)x - A_f \hat{x} + (B - B_f - K_f D)u + Mw - K_f v \\ &= (A - K_f C)\varepsilon + (A - K_f C - A_f)\hat{x} + (B - K_f D - B_f)u + Mw - K_f v. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Etant donné que les bruits  $w$  et  $v$  sont gaussiens et le système est linéaire, on peut affirmer que  $\varepsilon(t)$  est une variable aléatoire gaussienne. Nous allons maintenant nous intéresser à l'espérance mathématique (moyenne) de  $\varepsilon(t)$ .

**Estimateur non biaisé:** avant tout, on souhaite que l'estimateur soit non biaisé, c'est-à-dire que:

- quel que soit le profil de commande  $u(\tau)$  appliqué sur l'horizon  $\tau \in [t_0, t]$ ,
- quel que soit l'initialisation  $\hat{x}(t_0)$ ,

on souhaite que la moyenne de l'erreur d'estimation tende vers 0 lorsque  $t$  tend vers l'infini.

Les bruits  $w$  et  $v$  étant centrés, nous pouvons écrire :

$$E[\dot{\varepsilon}(t)] = E[\dot{\varepsilon}(t)] = (A - K_f C)E[\varepsilon(t)] + (A - K_f C - A_f)E[\hat{x}(t)] + (B - K_f D - B_f)u(t)$$

et  $\lim_{t \rightarrow \infty} E[\varepsilon(t)] = 0, \quad \forall u(t), \quad \forall E[\hat{x}(t)],$  si et seulement si :

$$A_f = A - K_f C, \quad B_f = B - K_f D \quad (2.6)$$

$$\text{et } A - K_f C \text{ est stable.} \quad (2.7)$$

En effet, d'après le théorème 1.1 (page 21), on a alors :

$$E[\varepsilon(t)] = e^{(A - K_f C)(t - t_0)} \varepsilon(t_0) \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} E[\varepsilon(t)] = 0.$$

Si l'on reporte (2.6) dans (2.4), l'équation du filtre de KALMAN s'écrit:

$$\hat{\dot{x}} = (A\hat{x} + Bu) + K_f(y - C\hat{x} - Du) . \quad (2.8)$$

On reconnaît dans le premier terme du second membre de cette équation, le modèle du système ( $A\hat{x} + Bu$ ) qui est exploité pour prédire l'évolution de l'état du système à partir de l'estimation courante  $\hat{x}$ . Cette prédiction est en fait une simulation en ligne du modèle du système. Le modèle étant faux, la prédiction est recalée en fonction de l'erreur entre la mesure  $y$  et la mesure prédite  $\hat{y} = C\hat{x} + Du$  et du gain du filtre  $K_f$ . Le signal d'erreur  $y - \hat{y}$  est aussi appelé l'*innovation*. Le schéma correspondant (dans le cas où  $D = 0$ ) est représenté sur la figure 2.2. Cette structure garantit que l'estimateur est non biaisé quel que soient les matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  du système et le gain  $K_f$  tel que  $A - K_f C$  soit stable (cela justifie en fait l'hypothèse **H1**: la présence d'un mode instable et inobservable ne permet pas de trouver de gain  $K_f$  stabilisant et donc de construire un estimateur non-biaisé).

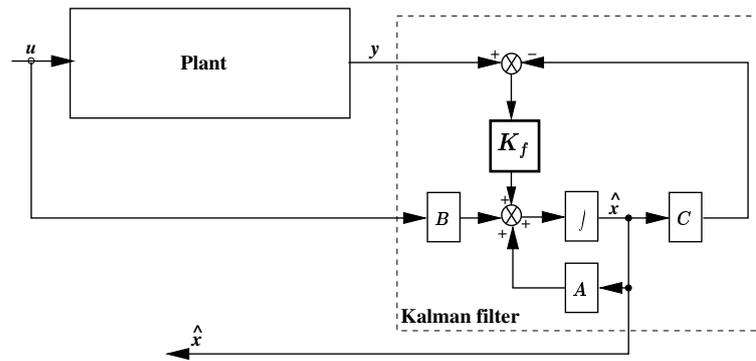


Figure 2.2: Schéma fonctionnel du filtre de KALMAN (cas  $D = 0$ ).

## 2.2 Estimateur à variance minimale

Le gain  $K_f$  est calculé en fonction de la *confiance* que l'on a dans le modèle (exprimée par la densité spectrale  $W$ ) relativement à la *confiance* que l'on a dans la mesure (exprimée par la densité spectrale  $V$ ). Si le modèle est très bon ( $W$  très "petit") et la mesure très bruitée ( $V$  très "grand") alors le gain  $K_f$  devra être très petit. En fait parmi tous les gains  $K_f$  satisfaisant la contrainte (2.7), nous allons choisir celui qui minimise la variance de l'erreur d'estimation de l'état du système  $\varepsilon(t)$  ( $\forall t$ ). Nous rappelons (voir section précédente) que  $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  est une variable aléatoire vectorielle (à  $n$  composantes) centrée (non-biaisée) gaussienne. Le caractère gaussien de cette variable permet d'affirmer que si la variance de l'erreur d'estimation est effectivement minimisée, alors  $\hat{x}(t)$  est vraiment le meilleur estimé de  $x(t)$ .

### 2.2.1 Solution générale

On cherche donc  $K_f$  qui minimise :

$$J(t) = \sum_{i=1}^n E[\varepsilon_i(t)^2] = E[\varepsilon^T(t)\varepsilon(t)] \quad (2.9)$$

$$= \text{trace } E[\varepsilon(t)\varepsilon^T(t)] \quad (2.10)$$

$$= \text{trace } P(t) . \quad (2.11)$$

$P(t) = E[(x(t) - \hat{x}(t))(x(t) - \hat{x}(t))^T]$ : matrice de covariance de l'erreur d'estimation.

En reportant (2.6) dans (2.5), l'évolution de  $\varepsilon(t)$  est décrite par l'équation d'état :

$$\dot{\varepsilon}(t) = (A - K_f C)\varepsilon(t) + [M \quad -K] \begin{bmatrix} w(t) \\ v(t) \end{bmatrix} , \quad (2.12)$$

avec :

$$E \left[ \begin{bmatrix} w(t) \\ v(t) \end{bmatrix} [w^T(t+\tau) \quad v^T(t+\tau)] \right] = \begin{bmatrix} W_{q \times q} & 0_{q \times p} \\ 0_{p \times q} & V_{p \times p} \end{bmatrix} \delta(\tau) .$$

On peut donc appliquer le théorème 1.1 (page 21) et conclure que la covariance de l'erreur d'estimation  $P(t)$  obéit à l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= (A - K_f C)P(t) + P(t)(A - K_f C)^T + [M \quad -K_f] \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M^T \\ -K_f^T \end{bmatrix} \\ &= (A - K_f C)P(t) + P(t)(A - K_f C)^T + MWM^T + K_f V K_f^T . \end{aligned} \quad (2.13)$$

Pour minimiser, par rapport à  $K_f$  et à chaque instant  $t$ ,  $\text{trace } P(t)$ , il suffit de minimiser  $\text{trace } \dot{P}(t)$  :<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\text{trace } \dot{P}(t))}{\partial K_f} &= -P(t)C^T - P(t)C^T + 2K_f V \\ \Rightarrow & \boxed{K_f(t) = P(t)C^T V^{-1}} . \end{aligned} \quad (2.14)$$

En reportant (2.14) dans (2.13), nous obtenons :

$$\boxed{\dot{P}(t) = AP(t) + P(t)A^T - P(t)C^T V^{-1} C P(t) + MWM^T} . \quad (2.15)$$

Cette équation différentielle de RICCATI doit être intégrée et initialisée avec  $P(t_0)$  qui traduit la confiance que l'on a dans l'initialisation du filtre avec  $\hat{x}(t_0)$ :

$$P(t_0) = E[(x(t_0) - \hat{x}(t_0))(x(t_0) - \hat{x}(t_0))^T] .$$

<sup>2</sup>En effet: partant de la condition initiale imposée  $P(t_0)$ , pour minimiser  $\text{trace } P(t)$  quelque soit  $t > t_0$ , il suffit de minimiser à chaque instant  $t > t_0$  les accroissements de  $\text{trace } P(t)$ , c'est à dire, sa dérivée temporelle.

On obtient alors le gain  $K_f(t)$  à partir de  $P(t)$  et de l'équation (2.14). Le filtre de KALMAN est donc non-stationnaire.

Les équations (2.8), (2.14) et (2.15) constituent les équations du filtre de KALMAN continu qu'il faut intégrer à partir de l'initialisation  $\hat{x}(t_0)$  et  $P(t_0)$ . L'intégration de (2.15) et le calcul de  $K_f(t)$  (2.14) peuvent être effectués en ligne ou hors ligne. Dans ce dernier cas, il faudra stocker dans le calculateur la loi  $K_f(t)$ . En pratique, l'implantation du filtre de KALMAN se fera sur un calculateur numérique et donc en temps discret. On peut alors discrétiser l'équation d'état (2.8) du filtre de KALMAN (intégration par la formule des rectangles ou des trapèzes, utilisation la transformation bilinéaire si l'on ne s'intéresse qu'au régime permanent, ...). On peut aussi choisir de faire la synthèse d'un filtre de KALMAN directement en discret (voir section 2.4.2). Enfin, les équations du filtre sont entièrement définies par les données du problème, c'est-à-dire les matrices  $A$ ,  $B$ ,  $M$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $W$  et  $V$ .

### 2.2.2 Régime permanent du filtre de Kalman

En régime permanent, une fois passé le régime transitoire dû aux erreurs d'initialisation, l'erreur d'estimation devient un signal aléatoire stationnaire (cela est vrai pour tous les signaux qui "circulent" dans le schéma de la figure 2.2). On donc :

$$\dot{P}(t) = 0.$$

$P$ , matrice constante définie positive qui représente la covariance de l'erreur d'estimation en régime permanent, est la solution positive de l'équation algébrique de RICCATI :

$$\boxed{AP + PA^T - PC^T V^{-1} CP + MWM^T = 0} \quad (2.16)$$

Le gain du filtre  $K_f = PC^T V^{-1}$  devient également constant.

On peut vérifier que la positivité de  $P$  implique la stabilité du filtre, c'est-à-dire que toutes les valeurs propres de la matrice  $A - K_f C$  sont à partie réelle négative (d'après le régime permanent de l'équation de LYAPUNOV (2.13)).

On trouvera dans [1], une méthode générale pour trouver la solution positive d'une équation de RICCATI. Sur la plan pratique, il faut savoir que tels solveurs sont disponibles dans les logiciels de CAO d'automatique : fonction `lqe` sous **Matlab** ou **Scilab** qui fournit directement  $P$  et  $K_f$  (voir aussi les fonctions `care` et `kalman` sous **Matlab**).

### 2.2.3 Réglage du filtre de Kalman

Pour un modèle donné (matrices  $A$ ,  $B$ ,  $M$ ,  $C$ ,  $D$ ), le gain du filtre  $K_f$  et son évolution en fonction du temps ne dépendent que de :

- $W$ : la confiance que l'on a dans l'équation d'état,

- $V$ : la confiance que l'on a dans la mesure,
- $P(t_0)$ : la confiance que l'on a dans l'initialisation.

En régime permanent si le système et les bruits sont stationnaires, le gain de KALMAN  $K_f$  est constant et sa valeur ne dépend plus que de  $W$  et  $V$ .

Le gain  $K_f$  et la réponse de l'erreur d'estimation  $\varepsilon(t)$  dépendent du poids relatif de  $P(t_0)$  par rapport à  $V$  (en régime transitoire) et du poids relatif de  $W$  par rapport à  $V$  (en régime permanent). Il est en effet aisé de vérifier que le gain  $K_f$  (et donc le filtre) ne change pas si l'on multiplie les trois matrices  $W$ ,  $V$  et  $P(t_0)$  par une constante  $\alpha$ . Par contre la covariance de l'erreur d'estimation  $P$  sera également multipliée par  $\alpha$ . Par conséquent il faudra vérifier que ces 3 matrices sont réalistes si l'on souhaite analyser  $P$  pour juger de la qualité de l'estimation et conclure par exemple: *la probabilité est de 95 % pour que la  $i$ ème composante de l'état  $x_i(t)$  soit comprise entre  $\hat{x}_i(t) - 2\sqrt{P_{(i,i)}(t)}$  et  $\hat{x}_i(t) + 2\sqrt{P_{(i,i)}(t)}$  (propriété des variables gaussiennes) . En pratique, il est donc nécessaire de valider le filtre de KALMAN sur un **modèle de validation** qui prend en compte des bruits de mesure réalistes et surtout une modélisation la plus fine possible des perturbations (non-linéarités,...) que l'on a majorées par un bruit d'état dans le **modèle de Kalman**.*

Quel que soit le réglage, on peut vérifier que la variance de l'erreur d'estimation  $P(t)$  est toujours inférieure à la variance du bruit d'état propagé dans l'équation d'état (donnée par  $\dot{P} = AP + PA^T + MWM^T$ ) et la variance de l'erreur d'estimation de la sortie non bruitée  $y_p = Cx + Du$ , c'est-à-dire :  $CP(t)C^T$ , est toujours inférieure à la variance du bruit de mesure (qui est infinie en continu !! mais cette remarque reste vrai et également plus pertinente en discret, voir section 2.4). Il vaut mieux donc utiliser  $\hat{y}_p = C\hat{x} + Du$  plutôt que la mesure brute  $y$  pour estimer la sortie réelle du système  $y_p$ .

On pourra s'appuyer sur les compromis suivants pour régler qualitativement la réponse de l'erreur d'estimation.

**Influence de  $P(t_0)$  ./.**  $V$ : en régime transitoire l'erreur d'estimation initiale  $\varepsilon_0$  sera d'autant plus vite recalée (et la gain de KALMAN sera d'autant plus grand) que  $P(t_0)$  est grand rapport à  $V$ . Mais l'estimé sera alors pollué par le bruit de mesure dans laquelle on accorde beaucoup de confiance.

**Influence de  $W$  ./.**  $V$  en régime permanent, le gain  $K_f$  sera très faible et l'estimation très lisse si  $W$  est très faible par rapport à  $V$  (on fait confiance au modèle). Par contre, si le modèle est soumis à une perturbation que l'on a sous estimée en réduisant trop  $W$ , l'estimé ne suivra pas ou "mettra beaucoup de temps" à se recalculer, la variance de l'erreur d'estimation  $P$  ne sera pas non plus représentative de ce phénomène.

Ces comportements sont illustrés sur l'exemple suivant qui, bien qu'étant très simple (modèle du premier ordre), permet de dégager des conclusions qui restent

valables sur des cas plus complexes (continus ou discrets).

## 2.3 Exercices corrigés

### 2.3.1 Système du premier ordre

**Énoncé:** on considère un système stable du premier ordre

$$G(s) = \frac{1}{s - a} \quad \text{avec } a < 0 .$$

La mesure  $y$  de la sortie de ce système est polluée par un bruit blanc  $v(t)$  de densité spectrale unitaire. L'entrée de ce système est soumise à un retard de transmission de durée  $T$  inconnue et variable. Pour la synthèse du filtre de KALMAN que l'on souhaite élaborer pour estimer la sortie de ce système, on propose de modéliser (très grossièrement) cette perturbation de modèle comme un bruit blanc  $w(t)$ , de densité spectrale  $W$  et indépendant de  $v$ , agissant directement sur le signal d'entrée selon la figure 2.3.

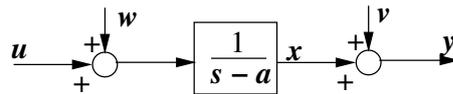


Figure 2.3: Modèle de synthèse pour le filtre de KALMAN.

- Donner le modèle de KALMAN et calculer le filtre de KALMAN permettant d'estimer la sortie  $x$  du système en fonction de  $a$ ,  $W$  et  $P_0$  (la variance de l'erreur d'initialisation:  $\varepsilon = x_0 - \hat{x}_0$ ). Étudier le comportement asymptotique du gain du filtre pour  $W$  tendant vers 0.
- Construire un simulateur sous *Matlab/Simulink* afin de vérifier l'influence des paramètres  $W$  et  $P_0$  sur la réponse de l'erreur d'estimation  $\varepsilon(t)$  et sur sa variance  $P(t)$ .

Application numérique:

- $a = -1$ ,  $x_0 = 20$ ,  $\hat{x}_0 = 0$ ,
  - $T = 0, 0.1, 0.5, 1(s)$  (on essaiera ces diverses valeurs),
  - $u(t)$ : créneau d'amplitude 10 et de période 5 s,
  - $dt = 0.01 s$  (pas d'intégration du simulateur).
- Que proposeriez vous de faire pour améliorer la qualité de l'estimé dans le cas d'un retard  $T$  important et connu ( $T = 1 s$ ) ?

**Correction:** Question a): le modèle de KALMAN est immédiat :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) + u(t) + w(t) \\ y(t) = x(t) + v(t) \end{cases} \quad (n = 1; m = 1; p = 1),$$

avec  $E[w(t)w(t + \tau)] = W\delta(\tau)$ ,  $E[v(t)v(t + \tau)] = \delta(\tau)$  et  $E[v(t)w(t + \tau)] = 0$ .

Le première étape dans le calcul du filtre de KALMAN consiste à résoudre l'équation différentielle de RICCATI (2.15) qui est ici scalaire :

$$\dot{P}(t) = 2aP(t) - P(t)^2 + W$$

On trouvera dans les formulaires de mathématiques ([6]) une méthode générale de résolution d'une telle équation différentielle scalaire. Cette méthode consiste à :

- chercher une solution particulière constante (car les coefficients de l'équation différentielle ne dépendent pas du temps) qui correspond en fait à la solution en régime permanent  $p = p_\infty$  qui vérifie :

$$P_\infty^2 - 2aP_\infty - W = 0.$$

La seule solution positive est  $\boxed{P_\infty = a + \sqrt{a^2 + W}}$ ,

- chercher une solution générale du type:

$$P(t) = P_\infty + \frac{1}{z(t)}.$$

Après développement de  $\dot{P}(t)$  on trouve :

$$\dot{z}(t) = 2\sqrt{a^2 + W}z(t) + 1.$$

L'intégration de cette équation différentielle par la méthode de la variation de la constante donne :

$$z(t) = \frac{1}{2\sqrt{a^2 + W}} \left[ e^{2\sqrt{a^2 + W}(t-t_0)} - 1 \right] + e^{2\sqrt{a^2 + W}(t-t_0)} z_0$$

où  $t_0$  est l'instant initial et  $z_0 = z(t_0)$  est la condition initiale sur  $z(t)$  :

$$z_0 = \frac{1}{P_0 - P_\infty}$$

avec  $P_0$  condition initiale sur  $P(t)$ . En notant  $k = 2\sqrt{a^2 + W}$ , il vient :

$$\begin{aligned} P(t) &= P_\infty + \frac{k(P_0 - P_\infty)}{(P_0 - P_\infty)(e^{k(t-t_0)} - 1) + ke^{k(t-t_0)}} \\ &= P_\infty + \frac{k(P_0 - P_\infty)}{e^{k(t-t_0)}(P_0 - P_\infty + k) + P_\infty - P_0}. \end{aligned}$$

Enfin:  $K_f(t) = P(t)$ .

Si  $W = 0$  alors  $P_\infty = a + |a| = 0$  si  $a < 0$  (système stable)

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} K_f = 0 .$$

Une fois recalée l'erreur d'initialisation, on utilise plus que le modèle pour estimer  $x$ . Ceci est logique puisque l'on a supposé le modèle parfait ( $W = 0$ ). Cela suppose également que le modèle soit stable. En effet si le modèle est instable ( $a > 0$ ) alors :

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} K_f = 2a .$$

C'est la valeur du gain qui permet de stabiliser la dynamique du filtre ( $A - K_f C$ ) tout en minimisant l'effet du bruit de mesure sur la variance de l'erreur d'estimation de  $x$ .

Question b): Le simulateur développé sous Matlab Simulink est représenté sur la figure 2.4. Les différents paramètres d'entrée utilisés par ce fichier Simulink (`simuKalman.mdl`) sont mentionnés à même le schéma. La fonction Matlab `Kf_t.m` utilisée pour implanter le gain  $K_f$  non stationnaire est donnée en annexe C ainsi que le fichier `demoKalman.m` définissant les différents paramètres et permettant le tracé des résultats<sup>3</sup>. Différents résultats de simulation sont présentés sur les figures 2.5 à 2.9 :

- Figure 2.5 : La confiance  $P_0$  dans l'initialisation n'est pas du tout représentative de l'erreur d'estimation initiale qui est en fait très importante ( $\varepsilon_0 = x_0 - \hat{x}_0 = 20$ ). Le transitoire de recalage de cette erreur initiale est donc long et l'estimation de  $x$  à  $\pm 2\sigma$  (avec  $\sigma(t) = \sqrt{P(t)}$ ) ne permet pas de cadrer la valeur réelle de  $x$  durant le régime transitoire.
- Figure 2.6 : Si l'on dégrade cette confiance dans l'initialisation ( $P_0 = 100$ ), ce transitoire devient plus rapide car le filtre exploite davantage les mesures. L'estimé est donc un peu plus bruité durant ce transitoire. En régime permanent, l'estimé redevient plus lisse car on fait confiance au modèle  $W = 1$  (faible bruit d'état). On peut constater que l'estimé est non biaisé. Enfin l'estimation est bonne car pour cette simulation le modèle de validation (avec  $T = 0$ ) correspond effectivement au modèle de synthèse du filtre de KALMAN.
- Figure 2.7 : Si maintenant on prends en compte un retard de 1 s dans le modèle de validation, la (bonne) confiance que l'on a dans le modèle ( $W = 1$ ) ne permet pas de représenter les erreurs réelles de modèles; le filtre fait confiance au modèle (qui est faux), réagi très lentement et exploite mal les mesures.

<sup>3</sup>Merci d'envoyer un mail à [alazard@supaero.fr](mailto:alazard@supaero.fr) avec "Introduction Kalman" pour sujet si vous désirez une copie de ces fichiers.

- Figure 2.8 : Si l'on spécifie maintenant que le modèle n'est pas bon ( $W = 100$ ), le filtre fait davantage confiance aux mesures : l'estimé devient plus sensible au bruit de mesure.
- Figure 2.9 (réponse à la question c)) : si l'on sait effectivement qu'il y a un retard de 1 s, on peut en tenir compte dans le modèle de KALMAN soit en propageant directement ce retard dans la prédiction soit, ce qui est proposé ici, en prenant compte d'un filtre de PADE en série avec le modèle du système (voir fichier `demoKalman.m`).

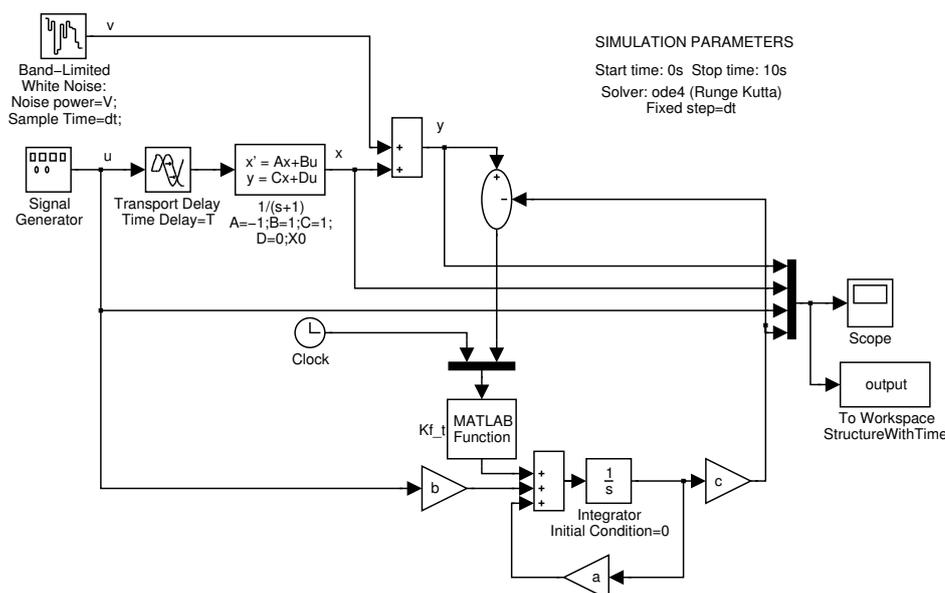


Figure 2.4: Fichier SIMULINK `simuKalman.mdl` pour la simulation du filtre de KALMAN.

### 2.3.2 Estimation d'un biais

**Énoncé :** un mobile se déplace le long d'un axe  $Ox$ . On mesure la vitesse  $\dot{x}$  et la position  $x$  de ce mobile et on note  $v_m$  et  $x_m$  ces mesures.

La mesure  $x_m$  est entachée d'un bruit blanc gaussien centré  $v(t)$  de densité spectrale unitaire  $V = 1 (m^2/Hz)$  :  $x_m(t) = x(t) + v(t)$ .

La mesure  $v_m$  est biaisée par un signal  $b(t)$  modélisé comme un échelon d'amplitude  $b_0$  inconnue :  $v_m(t) = \dot{x}(t) + b(t)$ .

A partir des 2 mesures  $v_m$  et  $x_m$ , on désire construire un filtre de KALMAN permettant d'estimer la position  $x(t)$  et le biais  $b(t)$ .

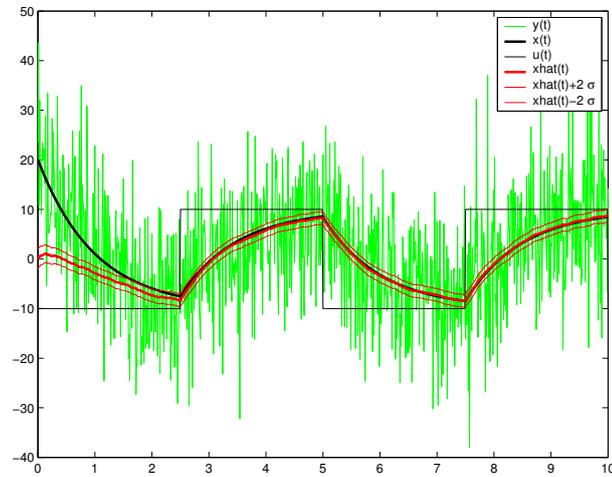


Figure 2.5: Simulation avec  $P_0 = 1$ ,  $W = 1$ ,  $T = 0$ .

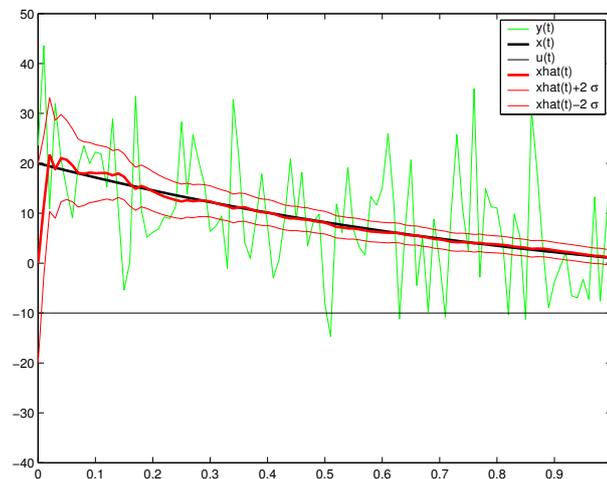
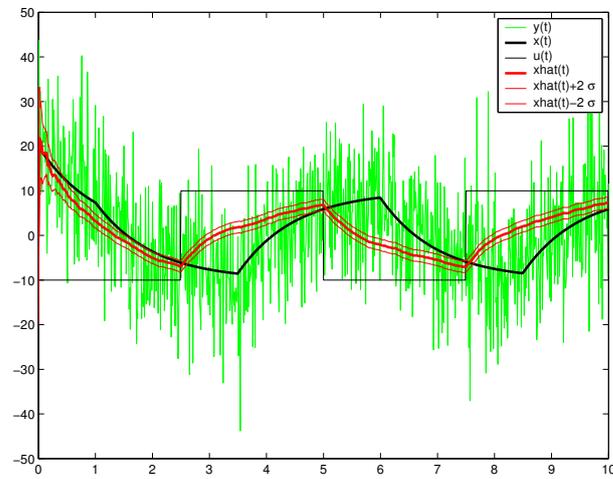
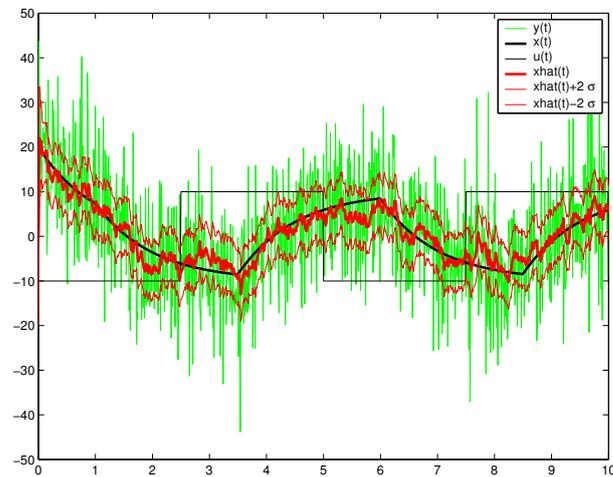


Figure 2.6: Simulation avec  $P_0 = 100$ ,  $W = 1$ ,  $T = 0$  (zoom autour du transitoire) .

Figure 2.7: Simulation avec  $P_0 = 100$ ,  $W = 1$ ,  $T = 1$ .Figure 2.8: Simulation avec  $P_0 = 100$ ,  $W = 100$ ,  $T = 1$ .

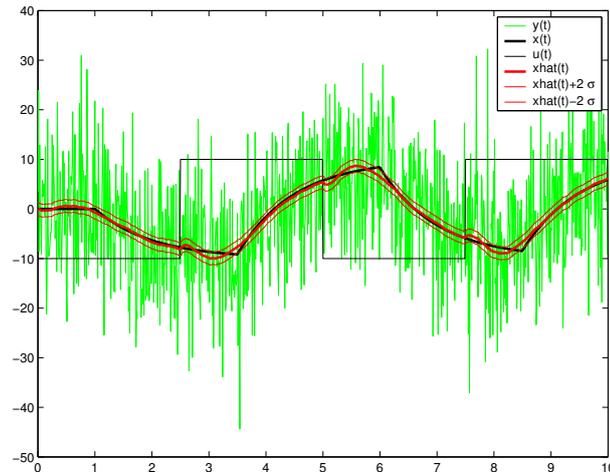


Figure 2.9: Simulation du filtre de KALMAN stationnaire calculé sur un modèle tenant compte d'une approximation de PADE à l'ordre 2 du retard ( $W = 1$ ,  $T = 1$  s).

- 1) Donnez les équations d'état du modèle de KALMAN avec  $x$  et  $b$  comme variable d'état,  $v_m$  comme variable d'entrée,  $x_m$  comme variable de sortie.
- 2) Interpréter ce résultat à l'aide d'un schéma fonctionnel.

En fait le biais  $b(t)$  est susceptible de dériver avec le temps. Pour tenir compte de ces variations éventuelles, on suppose que la dérivée du biais est polluée par un bruit blanc  $w(t)$  de densité spectrale  $W = q^2$  indépendant de  $v(t)$  :

$$\dot{b}(t) = w(t) .$$

- 3) Donnez les nouvelles équations du modèle de KALMAN, calculez le gain de KALMAN en régime permanent (en fonction de  $q$ ) et donnez la représentation d'état du filtre permettant de calculer les estimés  $\hat{x}$  et  $\hat{b}$  à partir de  $x_m$  et de  $v_m$ .
- 4) Comment procéderiez vous pour estimer la vitesse du mobile  $\hat{\dot{x}}$ ?
- 5) Calculer la matrice de transfert  $F(s)$  du filtre :

$$\begin{bmatrix} \hat{X}(s) \\ \hat{\dot{X}}(s) \end{bmatrix} = F(s) \begin{bmatrix} X_m(s) \\ V_m(s) \end{bmatrix} .$$

- 6) Commentez ce transfert (notamment  $\hat{X}(s)/V_m(s)$ ) en fonction  $q$ . Montrer que ce filtre  $F(s)$  donne des estimés parfaits si les mesures sont parfaites.

**Correction: Question 1.** On peut directement écrire :

$$\begin{cases} v_m(t) = \dot{x}(t) + b(t) \\ x_m(t) = x(t) + v(t) \end{cases} \text{ soit: } \begin{cases} \dot{x} = -b + v_m \\ x_m = x + v \end{cases} .$$

Le biais est modélisé comme un état intégral ( $\dot{b} = 0$ ) avec une condition initiale  $b_0$ .  
On a donc :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} v_m \\ x_m = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ b \end{bmatrix} + v \end{cases} \quad (2.17)$$

avec  $E[v(t)v^T(t + \tau)] = \delta(\tau)$ .

**Question 2.** Le schéma fonctionnel du modèle de KALMAN est représenté sur la figure 2.10

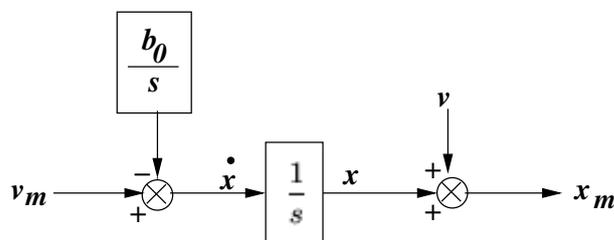


Figure 2.10: Schéma fonctionnel du modèle.

**Question 3.** Si l'on calcule le filtre de KALMAN sur le modèle 2.17, on trouvera un gain nul en régime permanent car l'équation d'état n'est pas bruitée: une fois le biais initial estimé, le filtre ne sera plus capable de détecter une dérive éventuelle de ce biais. Pour pallier ce problème on introduit un bruit  $w$  sur  $\dot{b}(t)$  pour spécifier que ce biais n'est pas constant. Le modèle s'écrit alors :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} v_m + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w \\ x_m = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ b \end{bmatrix} + v \end{cases} \quad (2.18)$$

avec  $E[w(t)w^T(t + \tau)] = q^2\delta(\tau)$ . On a bien un modèle de la forme de (2.1) et on peut identifier les matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $M$ .

La solution en régime permanent s'écrit :  $K_f = PC^TV^{-1}$  avec  $P = \begin{bmatrix} p_1 & p_{12} \\ p_{12} & p_2 \end{bmatrix}$   
solution **positive** de l'équation algébrique de RICCATI:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_{12} \\ p_{12} & p_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & p_{12} \\ p_{12} & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 & p_{12} \\ p_{12} & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_{12} \\ p_{12} & p_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

soit :

$$\begin{cases} 2p_{12} + p_1^2 = 0 \\ p_2 + p_1 p_{12} = 0 \\ p_{12}^2 = q^2 \end{cases} .$$

la solution positive s'écrit:

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{2q} & -q \\ -q & q\sqrt{2q} \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{K_f = \begin{bmatrix} \sqrt{2q} \\ -q \end{bmatrix}} .$$

L'équation d'état du filtre s'écrit (d'après (2.8)) :

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{b}} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{b} \end{bmatrix} + Bv_m + K_f \left( x_m - C \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{b} \end{bmatrix} \right) = (A - K_f C) \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{b} \end{bmatrix} + [K_f \quad B] \begin{bmatrix} x_m \\ v_m \end{bmatrix} ,$$

$$\text{soit : } \boxed{\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{b}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2q} & -1 \\ q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{b} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{2q} & 1 \\ -q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m \\ v_m \end{bmatrix}} .$$

**Question 4.** On a directement un estimé non-biaisé de la vitesse en retranchant l'estimé du biais  $\hat{b}$  de la mesure de vitesse  $v_m$ :  $\hat{x} = v_m - \hat{b}$ .

**Question 5.** La représentation d'état du transfert recherché s'écrit :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{b}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2q} & -1 \\ q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{b} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{2q} & 1 \\ -q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m \\ v_m \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{b} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m \\ v_m \end{bmatrix} \end{cases}$$

La matrice de transfert  $F(s)$  correspondante s'écrit donc :

$$F(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\sqrt{2q} & -1 \\ q & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \sqrt{2q} & 1 \\ -q & 0 \end{bmatrix} .$$

On en déduit :

$$\begin{bmatrix} \hat{X}(s) \\ \hat{X}(s) \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} \sqrt{2q}s + q & s \\ qs & s^2 + \sqrt{2q}s \end{bmatrix}}{s^2 + \sqrt{2q}s + q} \begin{bmatrix} X_m(s) \\ V_m(s) \end{bmatrix} . \quad (2.19)$$

**Question 6.**

$$\frac{\hat{X}}{V_m}(s) = \frac{s^2 + \sqrt{2q}s}{s^2 + \sqrt{2q}s + q} .$$

C'est un filtre passe haut du second ordre de pulsation  $\sqrt{q}$  (rd/s) et d'amortissement  $\sqrt{2}/2$  ( $\forall q$ ) qui a un gain statique nul (on filtre les composantes continues). La fréquence de coupure est d'autant plus grande que  $q$  est grand, c'est-à-dire que le biais est susceptible de dériver.

Si les mesures sont parfaites alors  $x_m = x$  et  $v_m = \dot{x}$ . On a donc:

- $X_m(s) = X(s)$  et  $V_m(s) = sX(s)$ . En reportant cela dans la première ligne de (2.19), on obtient:

$$\widehat{X}(s) = \frac{(\sqrt{2q}s + q)X(s) + s^2X(s)}{s^2 + \sqrt{2q}s + q} \Rightarrow \widehat{X}(s) = X(s).$$

- $V_m(s) = \dot{X}(s)$  et  $X_m(s) = 1/s \dot{X}(s)$ . En reportant cela dans la seconde ligne de (2.19), on obtient:

$$\widehat{X}(s) = \frac{\dot{X}(s) + (s^2 + \sqrt{2q}s)\dot{X}(s)}{s^2 + \sqrt{2q}s + q} \Rightarrow \widehat{X}(s) = \dot{X}(s).$$

Le filtre n'entraîne donc aucune dégradation de la qualité de la mesure. On appelle un tel filtre un **filtre complémentaire**.

□

## 2.4 Le filtre de Kalman discret

### 2.4.1 Le modèle de Kalman discret

Par analogie directe avec le cas continu le modèle de KALMAN discret s'écrit :

$$\begin{cases} x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k) + M_d w_d(k) & \text{équation d'état, } x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, w_d \in \mathbb{R}^q \\ y(k) = C_d x(k) + D_d u(k) + v_d(k) & \text{équation de mesure, } y \in \mathbb{R}^p, v_d \in \mathbb{R}^p \end{cases} \quad (2.20)$$

**Hypothèses** : nous supposons que :

**H1**: La paire  $(A_d, C_d)$  est détectable,

**H2**: les signaux  $w_d(k)$  et  $v_d(k)$  sont des **bruits pseudo-blancs gaussiens centrés** de **matrices de covariance**  $W_d$  et  $V_d$  respectivement, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} - E[w_d(k) w_d(k+l)^T] &= W_d \delta(l), \\ - E[v_d(k) v_d(k+l)^T] &= V_d \delta(l) \\ - E[w_d(k) v_d(k+l)^T] &= 0 \text{ (avec } \delta(l) = 1 \text{ si } l = 0; 0 \text{ sinon).} \end{aligned}$$

**H3**:  $V_d$  est inversible.

**Remarque 2.1** : Alors que dans le cas continu, les bruits blancs du modèle de KALMAN sont définis par des matrices de densité spectrale de puissance (DSP)  $W$  et  $V$  (les variances sont infinies), les bruits du modèle de KALMAN discret sont définis par leurs matrices de covariances  $W_d$  et  $V_d$  (les variances sont finies). Les densités spectrales de puissance de ces bruits sont constantes (et égales à  $W_d$  et  $V_d$ ) mais sur une plage limitée de la pulsation réduite  $\theta \in [-\pi \quad \pi]$  (voir annexe B.1); d'où le qualificatif de bruit **pseudo-blanc**.

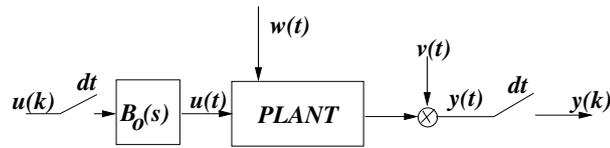


Figure 2.11: Système continu avec commande échantillonnée-bloquée et observation discrète.

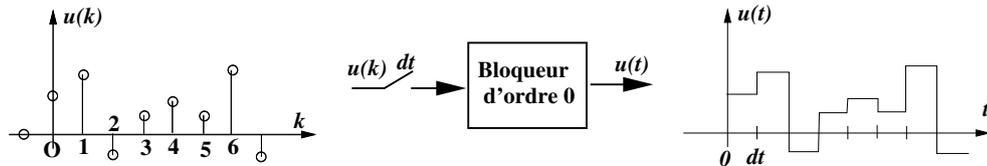


Figure 2.12: Le bloqueur d'ordre 0:  $B_o(s)$ .

**Remarque 2.2 :** *comme dans le cas continu, si le bruit  $w_d$  est coloré de spectre complexe  $\Phi_{ww}(z)$  la décomposition  $\Phi_{ww}(z) = G(z^{-1})G^T(z)$  (voir section B.3.2) permet de trouver une représentation markovienne de  $w_d$  que l'on pourra prendre en compte dans un modèle de KALMAN augmenté.*

## 2.4.2 Cas particulier d'un système continu échantillonné

Comme nous l'avons déjà mentionné, l'implantation pratique des filtres de KALMAN, même pour les systèmes continus, ce fait en règle générale sur un ordinateur numérique. Nous allons donc considérer que la sortie du modèle continu (1.1) est échantillonnée à la cadence  $dt$  (observation discrète) et nous supposons que des bloqueurs d'ordre 0 sont placés sur les signaux déterministes  $u$  (voir figures 2.11 et 2.12) et nous allons chercher une représentation d'état discrète de ce modèle.

On note  $x(k dt) = x(k)$ . D'après la solution générale (1.3), l'intégration de l'équation d'état entre l'instant  $t_0 = k dt$  et  $t = (k + 1) dt$  s'écrit :

$$x(k+1) = e^{A dt} x(k) + \left( \int_{k dt}^{(k+1) dt} e^{A((k+1) dt - \tau)} B d\tau \right) u(k) + \int_{k dt}^{(k+1) dt} e^{A((k+1) dt - \tau)} M w(\tau) d\tau .$$

Le changement de variable :  $(k + 1) dt - \tau = v$  conduit au résultat :

$$x(k + 1) = e^{A dt} x(k) + \left( \int_0^{dt} e^{A v} B dv \right) u(k) + \int_0^{dt} e^{A v} M w((k + 1) dt - v) dv .$$

L'équation de sortie aux instants d'échantillonnage s'écrit :

$$y(k) = C x(k) + D u(k) + v(k)$$

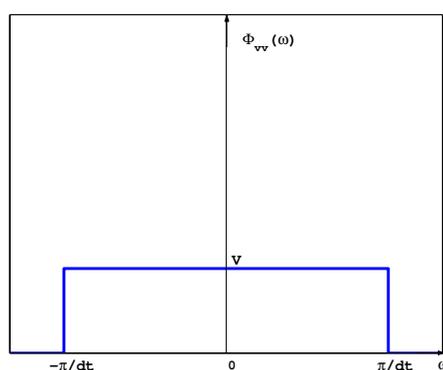


Figure 2.13: Limitation en fréquence du bruit de mesure continu.

L'équation d'état discrète est donc bien de la forme (2.20) avec :

$$\boxed{A_d = e^{A dt}, \quad B_d = \int_0^{dt} e^{A v} B dv, \quad M_d = I_n, \quad C_d = C, \quad D_d = D} \quad (2.21)$$

Les bruits d'états et de mesure discrets s'écrivent :

$$w_d(k) = \int_0^{dt} e^{A v} M w((k+1)dt - v) dv, \quad v_d(k) = v(kdt),$$

il faut les caractériser par leur matrices de covariances respectives.

Du fait de l'échantillonnage, la matrice de covariance du bruit de mesure discret devient :

$$\boxed{V_d = V/dt}. \quad (2.22)$$

**Justification:** l'équation de mesure continue  $y(t) = Cx(t) + Du(t) + v(t)$  fait intervenir un bruit blanc  $v(t)$  de variance infinie et de DSP finie  $V$ . L'échantillonnage de la mesure à ma cadence  $dt$  fournira donc une suite numérique  $y(k)$  de variance infinie et rendra singulier le calcul du filtre de KALMAN. On doit limiter entre  $-\pi/dt$  et  $\pi/dt$  la réponse fréquentielle ou la DSP du bruit  $v(t)$  pour pouvoir échantillonner la mesure  $y(t)$  correctement. On retrouve, de façon analogue à la condition de SHANNON pour les signaux déterministes, que l'échantillonnage ne peut pas restituer les composantes du signal de pulsation supérieure à  $\pi/dt$ . La DSP du bruit de mesure continu limité en fréquence est représenté sur la figure 2.4.2. La variance de ce signal est maintenant finie et vaut (voir remarque 1.3) :

$$\sigma_v^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{vv}(\omega) d\omega = \frac{V}{2\pi} \int_{-\pi/dt}^{\pi/dt} d\omega = \frac{V}{dt}.$$

L'échantillonnage d'un signal ne change pas sa variance donc l'échantillonnage de la mesure s'écrit :  $y(k) = Cx(k) + Du(k) + v_d(k)$  avec  $E[v_d(k) v_d(k+l)^T] = \frac{V}{dt} \delta(l)$ .

□

Calculons maintenant la matrice de covariance  $W_d$  du bruit d'état  $w_d(k)$  :

$$\begin{aligned}
 W_d &= E[w_d(k)w_d^T(k)] = E \left[ \int_0^{dt} e^{Av} M w((k+1)dt - v) dv \int_0^{dt} w^T((k+1)dt - \tau) M^T e^{A^T \tau} d\tau \right] \\
 &= \int \int_0^{dt} e^{Av} M E[w((k+1)dt - v)w^T((k+1)dt - \tau)] M^T e^{A^T \tau} dv d\tau \\
 &= \int \int_0^{dt} e^{Av} M W \delta(\tau - v) M^T e^{A^T \tau} dv d\tau \\
 &= \boxed{W_d = \int_0^{dt} e^{Av} M W M^T e^{A^T v} dv} . \tag{2.23}
 \end{aligned}$$

**Remarque 2.3** : on indique en annexe B (voir remarque B.2, équation (B.13)) comment calculer  $W_d$  mais on peut aussi utiliser l'approximation  $W_d \approx dt M W M^T$  si  $dt$  est petit par rapport au temps de réponse du système. Enfin on retiendra les macro-fonctions Matlab `lqed` ou `kalmd` qui englobent tous ces calculs et qui permettent d'obtenir le filtre de KALMAN discret en régime permanent directement à partir des données continues ( $A, B, C, D, M, W$  et  $V$ ) et d'une cadence d'échantillonnage  $dt$  (voir illustration Matlab en annexe C.3). Cette approche ne supporte pas des bruits d'état  $w$  et de mesure  $v$  corrélés.

### 2.4.3 Les équations récurrentes du filtre de Kalman

Le principe du filtre de KALMAN discret est le même qu'en continu. Il utilise une prédiction qui s'appuie sur le modèle déterministe et un recalage qui s'appuie sur l'innovation (différence entre la mesure et la sortie prédite) mais en discret on distinguera :

- **l'état prédit** à l'instant  $k+1$  connaissant toutes les mesures jusqu'à l'instant  $k$  que l'on note  $\hat{x}(k+1|k)$  et auquel on associe la matrice de **covariance de l'erreur de prédiction** notée :

$$P(k+1|k) = E \left[ \left( x(k+1) - \hat{x}(k+1|k) \right) \left( x(k+1) - \hat{x}(k+1|k) \right)^T \right] .$$

- **l'état estimé** connaissant la mesure à l'instant  $k+1$  (après le recalage) que l'on note  $\hat{x}(k+1|k+1)$  auquel on associe la matrice de **covariance de l'erreur d'estimation** notée :

$$P(k+1|k+1) = E \left[ \left( x(k+1) - \hat{x}(k+1|k+1) \right) \left( x(k+1) - \hat{x}(k+1|k+1) \right)^T \right] .$$

**Prédiction:** à l'instant  $k$ , on connaît  $\hat{x}(k|k)$ , on prédit l'état à l'instant  $k + 1$  en utilisant le modèle déterministe:

$$\boxed{\hat{x}(k + 1|k) = A_d \hat{x}(k|k) + B_d u(k)} \quad (2.24)$$

À l'instant  $k$ , l'erreur d'estimation était caractérisé par  $P(k|k)$ . Le modèle de prédiction étant faux, l'erreur ne peut que croître et l'erreur de prédiction à l'instant  $k + 1$  sera caractérisée par (voir annexe théorème B.1) :

$$\boxed{P(k + 1|k) = A_d P(k|k) A_d^T + M_d W_d M_d^T} \quad (2.25)$$

**Recalage:** à l'instant  $k + 1$ , on recale la prédiction avec l'innovation via le gain du filtre:

$$\boxed{\hat{x}(k + 1|k + 1) = \hat{x}(k + 1|k) + K_f(k + 1) \left( y(k + 1) - C_d \hat{x}(k + 1|k) - D_d u(k + 1) \right)} \quad (2.26)$$

En utilisant l'équation de mesure du modèle (2.20), on peut écrire :

$$x(k+1) - \hat{x}(k+1|k+1) = \left( I_n - K_f(k+1)C_d \right) (x(k+1) - \hat{x}(k+1|k)) - K_f(k+1)v_d(k+1) \quad \text{et :}$$

$$\begin{aligned} P(k + 1|k + 1) &= \left( I_n - K_f(k + 1)C_d \right) P(k + 1|k) \left( I_n - K_f(k + 1)C_d \right)^T + K_f(k + 1)V_d K_f^T(k + 1) \\ &= P(k + 1|k) - K_f(k + 1)C_d P(k + 1|k) - P(k + 1|k)C_d^T K_f^T(k + 1) \cdots \\ &\quad \cdots + K_f(k + 1) \left( C_d P(k + 1|k)C_d^T + V_d \right) K_f^T(k + 1). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Comme dans le cas continu, on cherche  $K_f(k + 1)$  qui minimise  $\text{trace}(P(k + 1|k + 1))$  :

$$\frac{\partial \text{trace}(P(k + 1|k + 1))}{\partial K_f(k + 1)} = -2P(k + 1|k)C_d^T + 2K_f(k + 1) \left( C_d P(k + 1|k)C_d^T + V_d \right).$$

On en déduit :

$$\boxed{K_f(k + 1) = P(k + 1|k)C_d^T \left( C_d P(k + 1|k)C_d^T + V_d \right)^{-1}} \quad (2.28)$$

En reportant cette expression dans 2.27, on obtient :

$$\boxed{P(k + 1|k + 1) = \left( I_n - K_f(k + 1)C_d \right) P(k + 1|k)} \quad (2.29)$$

Les équations (2.24), (2.25), (2.26), (2.28) et (2.29) constituent les équations du filtre de KALMAN discret. On initialise (2.24) et (2.26) avec  $\hat{x}(0|0)$ , l'estimé initial et on initialise (2.25), (2.28) et (2.29) avec  $P(0|0)$ , la confiance que l'on a dans l'initialisation.

Si le modèle et les bruits sont stationnaires, on peut intégrer (2.25), (2.28) et (2.29) hors ligne. En reportant (2.28) et (2.29) dans (2.25), on trouve une équation récurrente de RICCATI en la covariance de l'erreur de prédiction :

$$P(k+1|k) = A_d P(k|k-1) A_d^T - A_d P(k|k-1) C_d^T \left( C_d P(k|k-1) C_d^T + V_d \right)^{-1} C_d P(k|k-1) A_d^T + M_d W_d M_d^T. \quad (2.30)$$

Enfin, en régime permanent,  $K_f(k+1) = K_f(k) = K_f$ , mais on distingue :

- $P_p = P(k+1|k) = P(k|k-1) = \dots$  : la matrice de covariance de l'erreur de prédiction en régime permanent qui vérifie l'équation algébrique discrète de RICCATI :

$$\boxed{P_p = A_d P_p A_d^T - A_d P_p C_d^T (C_d P_p C_d^T + V_d)^{-1} C_d P_p A_d^T + M_d W_d M_d^T}. \quad (2.31)$$

- $P_e = P(k+1|k+1) = P(k|k) = \dots$  : la matrice de covariance de l'erreur d'estimation en régime permanent qui vérifie :

$$P_e = (I - K_f C_d) P_p.$$

La représentation d'état du filtre de KALMAN stationnaire en régime permanent s'écrit alors (il suffit de reporter (2.26) dans (2.24)) :

$$\boxed{\begin{cases} \hat{x}(k+1|k) = A_d (I - K_f C_d) \hat{x}(k|k-1) + [A_d K_f & B_d - A_d K_f D_d] \begin{bmatrix} y(k) \\ u(k) \end{bmatrix} \\ \hat{x}(k|k) = (I - K_f C_d) \hat{x}(k|k-1) + [K_f & -K_f D_d] \begin{bmatrix} y(k) \\ u(k) \end{bmatrix} \end{cases}} \quad (2.32)$$

L'état de cette représentation correspond à l'état prédit, la sortie correspond à l'état estimé.

#### Remarque 2.4 :

- On a toujours  $0 < P_e < P_p$ . En effet en reportant (2.28) dans (2.29), on obtient :

$$P_e = P_p - P_p C_d^T (C_d P_p C_d^T + V_d)^{-1} C_d P_p.$$

Le second terme du membre de droite est toujours positif donc :  $P_e < P_p$ , c'est-à-dire que la variance de l'erreur d'estimation est toujours inférieure à la variance de l'erreur de prédiction (ou la variance du bruit d'état propagé dans l'équation d'état).

- Enfin on peut estimer la sortie  $y_p(k) = C_d x(k) + D_d u(k)$  par  $\hat{y}_p(k) = C_d \hat{x}(k|k) + D_d u(k)$ . La covariance de l'erreur d'estimation de cette sortie (non-bruitée) est :

$$C_d P_e C_d^T = C_d P_p C_d^T - C_d P_p C_d^T (C_d P_p C_d^T + V_d)^{-1} C_d P_p C_d^T = C_d P_p C_d^T (C_d P_p C_d^T + V_d)^{-1} V_d .$$

D'où:

$$C_d P_e C_d^T - V_d = \left( C_d P_p C_d^T (C_d P_p C_d^T + V_d)^{-1} - I \right) V_d = -V_d (C_d P_p C_d^T + V_d)^{-1} V_d < 0 .$$

On a donc toujours  $C_d P_e C_d^T < V_d$  c'est-à-dire que  $\hat{y}_p(k)$  est un meilleur estimé de  $y_p$  que la mesure directe.

- Nous ne détaillerons pas les techniques de résolution de l'équation de RICCATI discrete (DARE: Discrete Algebraic Riccati Equation). Des macro-fonctions (`lqe` sous Scilab ou `dlqe`, `dare`, `kalman` sous Matlab) permettent de résoudre de telles équations, de calculer le gain  $K_f$  et de fournir la représentation d'état (2.32) du filtre en régime permanent. L'utilisation de ces fonctions est illustrée dans la session Matlab présentée en annexe C.3.

**Exercice 2.1** Démontrer que dans le cas d'un système continu échantillonné à la cadence  $dt$ , le filtre de KALMAN continu synthétisé à partir des données continues ( $A, B, M, C, W, V$ ) puis discrétisé à la cadence  $dt$  par la méthode d'EULER et le filtre de KALMAN discret synthétisé à partir des données des équations (2.21), (2.22) et (2.23) tendent vers la même solution lorsque  $dt$  tend vers 0 (calcul au premier ordre en  $dt$ ).

**Solution :** Le filtre de KALMAN continu est défini par les équations (2.8), (2.14) et (2.15). La méthode d'EULER consiste à remplacer  $\dot{x}(t)$  et  $\dot{x}(t)$  par  $\frac{x(k+1)-x(k)}{dt}$  et  $x(k)$  respectivement. En reportant (2.14) dans (2.8), ce premier filtre discret est entièrement défini par :

$$\begin{cases} P(k+1) &= P(k) + dt \left( AP(k) + P(k)A^T - P(k)C^T V^{-1} C(k)P + MWM^T \right) \\ \hat{x}(k+1) &= \hat{x}(k) + dt \left( A\hat{x}(k) + Bu(k) + P(k)C^T V^{-1} \left( y(k) - C\hat{x}(k) - Du(k) \right) \right) \end{cases} \quad (2.33)$$

La covariance de l'erreur de prédiction du filtre de KALMAN discret est définie par l'équation (2.30), en notant  $P(k|k-1) = P(k)$ , en utilisant les relations (2.21), (2.22) et (2.23) et en remarquant qu'au premier ordre  $W_d \approx dtMWM^T$ , on obtient :

$$P(k+1) \approx e^{Adt} P(k) e^{A^T dt} - e^{Adt} P(k) C^T \left( CP(k)C^T + V/dt \right)^{-1} CP(k) e^{A^T dt} + dtMWM^T .$$

Soit en développant au premier ordre :

$$\begin{aligned} P(k+1) &\approx (I + Adt)P(k)(I + A^T dt) + dtMWM^T \\ &\quad - dt(I + Adt)P(k)C^T \left( I - dtV^{-1}CP(k)C^T \right) V^{-1}CP(k)(I + A^T dt) \\ &\approx P(k) + dt \left( AP(k) + P(k)A^T - P(k)C^T V^{-1}CP(k) + MWM^T \right) + dt^2(\dots) . \end{aligned}$$

On voit donc qu'au premier ordre on retrouve la première équation de (2.33). Le gain  $K_f$  devient :

$$K_f(k) = P(k)C^T \left( CP(k)C^T V^{-1} dt + I \right)^{-1} V^{-1} dt \approx P(k)C^T V^{-1} dt,$$

et l'équation d'état du filtre (équation (2.32)) devient (on note  $\hat{x}(k|k-1) = \hat{x}(k)$  et on remarque que  $B_d \approx dtB$  au premier ordre) :

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= e^{A dt} \left( I - dt P(k) C^T V^{-1} C \right) \hat{x}(k) + dt e^{A dt} P(k) C^T V^{-1} y(k) \\ &\quad + \left( B_d - dt e^{A dt} P(k) C^T V^{-1} D \right) u(k) \\ &\approx (I - A dt) \left( I - dt P(k) C^T V^{-1} C \right) \hat{x}(k) + dt (I - A dt) P(k) C^T V^{-1} y(k) \\ &\quad + \left( B_d - dt (I - A dt) P(k) C^T V^{-1} D \right) u(k) \\ &\approx \hat{x}(k) + dt \left( A \hat{x}(k) + B u(k) + P(k) C^T V^{-1} \left( y(k) - C \hat{x}(k) - D u(k) \right) \right) + dt^2(\dots). \end{aligned}$$

Au premier ordre, on retrouve la seconde équation de (2.33). Les 2 filtres discrets sont donc équivalents lorsque  $dt$  tend vers 0.

#### 2.4.4 Exemple

On reprend l'exercice 2.3.2 sur l'estimation d'un biais. On souhaite implanter le filtre sur un ordinateur numérique, les deux mesures  $v_m$  et  $x_m$  étant échantillonnées à la cadence  $dt$ .

- Donner les équations d'état du modèle de KALMAN discret avec  $[x(k), \quad b(k)]^T$  comme vecteur d'état.
- Calculer sous Matlab le gain  $K_f$  et la covariance de l'erreur d'estimation en régime permanent. Application numérique:  $dt = 0.01 \text{ s}$ ,  $V = 1$ ,  $q = 1$ .

**Correction :** Le calcul du modèle d'état discret consiste à appliquer les formules de discrétisation (2.21), (2.22) et (2.23) au modèle continu défini par l'équation (2.18). On suppose la mesure de vitesse  $v_m(k)$  constante sur une période d'échantillonnage; ce qui correspond bien à l'introduction d'un bloqueur d'ordre 0. On a donc :

$$\begin{aligned} A_d &= e^{\begin{bmatrix} 0 & -dt \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -dt \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \dots = \begin{bmatrix} 1 & -dt \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ B_d &= \int_0^{dt} \begin{bmatrix} 1 & -v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} dv = \begin{bmatrix} dt \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$C_d = [1 \quad 0], \quad D_d = 0, \quad V_d = \frac{1}{dt},$$

$$W_d = \int_0^{dt} \begin{bmatrix} 1 & -v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -v & 1 \end{bmatrix} dv = \int_0^{dt} \begin{bmatrix} q^2 v^2 & -q^2 v \\ -q^2 v & q^2 \end{bmatrix} dv$$

$$\Rightarrow W_d = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} q^2 dt^3 & -\frac{1}{2} q^2 dt^2 \\ -\frac{1}{2} q^2 dt^2 & q^2 dt \end{bmatrix} \left( \approx \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q^2 dt \end{bmatrix} \right).$$

Le modèle de KALMAN discret s'écrit donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} x(k+1) \\ b(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -dt \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ b(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dt \\ 0 \end{bmatrix} v_m(k) + w_d(k) \\ x_m(k) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x(k) \\ b(k) \end{bmatrix} + v_d(k) \end{array} \right. \quad (2.34)$$

On trouvera en annexe C.3 le fichier Matlab `demoKalmand` permettant de calculer ces différents paramètres du modèle et de déterminer le gain  $K_f$  et la covariance de l'erreur d'estimation en régime permanent à partir de la fonction `dlqe`. On montre également comment utiliser la fonction `lqed` directement à partir des données du modèle continu.

□

## 2.5 Exercices

### 2.5.1 Système du second ordre:

Une masse  $m$  se déplace le long d'un axe  $Ox$  sous l'effet d'une commande en force  $u(t)$ . Une force perturbatrice  $w(t)$  agit également sur cette masse.  $w(t)$  est modélisé comme un bruit blanc gaussien centré de densité spectrale  $W$ . On mesure la position  $x(t)$  de cette masse. On note  $x_m(t)$  cette mesure. La mesure  $x_m(t)$  est entachée d'un bruit blanc gaussien centré  $v(t)$  de densité spectrale  $V$ .

**A.N.:**  $m = 1 \text{ (Kg)}$ ;  $W = 1 \text{ (N}^2/\text{Hz)}$ ;  $V = \rho^2 \text{ (m}^2/\text{Hz)}$ .

A partir de la mesure  $x_m$  et de la commande  $u$ , on désire construire un filtre de KALMAN permettant d'estimer la position  $x(t)$  et la vitesse  $\dot{x}(t)$  de cette masse. On note  $\hat{x}(t)$  et  $\hat{\dot{x}}(t)$  ces estimés.

- 1) Donnez les équations d'état du modèle de KALMAN.
- 2) Calculez le gain de KALMAN en régime permanent (en fonction de  $\rho$ ).
- 3) Calculez la matrice de transfert  $F(s)$  du filtre :

$$\begin{bmatrix} \hat{X}(s) \\ \hat{\dot{X}}(s) \end{bmatrix} = F(s) \begin{bmatrix} X_m(s) \\ U(s) \end{bmatrix}$$

- 4) Commentez ce transfert (réponses fréquentielles des différentes composantes, évolution en fonction de  $\rho$ ).
- 5) On souhaite implanter le filtre sur un ordinateur numérique à la cadence d'échantillonnage  $dt$ . Donner les équations d'état du modèle discret et les équations récurrentes du filtre de KALMAN discret. On note  $\hat{x}_0$  et  $\hat{\hat{x}}_0$  l'estimation initiale et  $P_0$  la covariance de l'erreur d'estimation initiale.

# Chapitre 3

## A propos des unités physiques

Il est important de donner des unités physiques aux différentes caractéristiques des signaux aléatoires que l'on a à utiliser ou à simuler. Le but de ce chapitre est de clarifier ce point.

On rappelle avant tout que si on désigne par  $u$  l'unité physique d'une variable aléatoire  $\mathcal{X}$ , alors sa fonction de répartition  $F(x)$  est sans unité et sa densité de probabilité  $f(x)$  a pour dimension  $u^{-1}$ .

Si on désigne par  $u$  l'unité physique d'un signal aléatoire continu  $w(t)$  alors les unités physiques des différentes caractéristiques stochastiques sont rappelées dans le tableau 3.1 (on rappelle également les équations qui permettent de vérifier l'homogénéité des dimensions).

Variable	Notation	Unité physique	Equations
signal	$w(t)$	$u$	
espérance	$E[w(t)]$	$u$	(1.8) et (1.5)
auto-corrélation (variance)	$\phi_{ww}(t, \tau)$	$u^2$	(1.9) et (1.6)
spectre complexe (et DSP)	$\Phi_{ww}(s)$	$u^2 s$ ou $(u^2/Hz)$	(1.10)

Table 3.1: Unités physiques des caractéristiques d'un signal aléatoire continu.

Dans le cas d'un signal aléatoire discret, on se reportera au tableau 3.2 (voir annexe B.1).

On constate donc un facteur temps entre le spectre complexe d'un signal continu et celui d'un signal discret ou échantillonné. L'équation (2.22), utilisée lors de la discrétisation de l'équation de mesure d'un système continu, respecte cette homogénéité. Pour caractériser un bruit continu sur une grandeur  $u$ , on spécifie parfois également la racine carrée de la DSP qui s'exprime donc en  $u/\sqrt{Hz}$  (et que l'on apparente abusivement à un écart type).

Si l'on considère maintenant le modèle de KALMAN continu (2.1) et si l'on note

Variable	Notation	Unité physique
signal	$w(n)$	$u$
espérance	$E[w(n)]$	$u$
auto-corrélation (variance)	$\phi_{ww}(n, k)$	$u^2$
spectre complexe (et DSP)	$\Phi_{ww}(z)$	$u^2$

Table 3.2: Unités physiques des caractéristiques d'un signal aléatoire discret.

$u$  l'unité physique de la variable d'état  $x(t)$ , alors l'unité physique du bruit d'état  $w_x(t) = Mw(t)$  est en  $u/s$  et sa DSP  $W_x = MW M^T$  s'exprime en  $u^2/s$ .

Dans le cas du modèle de KALMAN discret (2.20), si l'on note  $u$  l'unité physique de la variable d'état  $x(k)$  (et donc de  $x(k+1)$ ) alors  $M_d w_d(k)$  s'exprime également en  $u$  et la DSP du bruit d'état  $M_d W_d M_d^T$  s'exprime en  $u^2$ . L'équation (2.23) utilisée pour discrétiser un bruit d'état continu ou son approximation  $W_d = W dt$  respecte également cette homogénéité.

# Références

- 1 “Robustesse et Commande Optimale”: D. Alazard, C. Cumer, P. Apkarian, M. Gauvrit et G. Ferrères - Cépaduès Éditions,
- 2 “Commande numérique des systèmes: application aux engins mobiles et aux robots”: Ouvrage collectif publié sous la direction de C. Fargeon, Éditions Masson.
- 3 “Linear optimal control systems”: H. Kwakernaak and R. Sivan, Wiley inter-science, John Wiley and Sons, 1972.
- 4 “Le filtrage et ses applications”: M. Labarrère, J. P. Krief et B. Gimonet, Cépaduès Editions.
- 5 “Les processus stochastiques”: J. L. Pac, photocopié SUPAERO.
- 6 “Formulaire de mathématiques spéciales”: G Flory, Ed. Vuibert

PAGE SANS TEXTE

# Appendix A

## Intégration de l'équation l'état

### A.1 Cas continu

Considérons le modèle d'état continu :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

La réponse de ce modèle à des entrées déterministes  $u(t)$  sur un horizon  $t \in [t_0, t]$  et à des conditions initiales  $x(t_0)$  s'écrit :

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau \quad (\text{A.2})$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (\text{A.3})$$

**Démonstration:** la solution générale de l'équation d'état dite "sans second membre"  $\dot{x}(t) - Ax(t) = 0$  s'écrit:

$$x(t) = e^{At}K .$$

La recherche d'une solution particulière de l'équation d'état par la méthode de la variation de la constante ( $K \rightarrow K(t)$ ) entraîne :

$$Ae^{At}K(t) + e^{At}\dot{K}(t) = Ae^{At}K(t) + Bu(t) \quad (\text{A.4})$$

$$\dot{K}(t) = e^{-At}Bu(t) \quad (\text{A.5})$$

$$K(t) = \int_{t_0}^t e^{-A\tau}Bu(\tau) d\tau + K_0 \quad (\text{A.6})$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{At}K_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau . \quad (\text{A.7})$$

La prise en compte de la condition initiale à  $t = t_0$  entraîne  $K_0 = e^{-At_0}x(t_0)$  et permet de trouver la solution particulière (A.2). Enfin, on a la relation statique :  $y(t) = Cx(t) + Du(t)$ .

□

**Remarque A.1** En appliquant (A.2) avec  $t_0=0$ ,  $x_0 = 0$  et  $u(t) = \delta(t)$  (le Dirac), la réponse impulsionnelle générale du système défini par le quadruplet  $(A, B, C, D)$  s'écrit donc:

$$f(t) = Ce^{At}B + D\delta(t) \quad \forall t \geq 0 \quad (f(t) = 0 \text{ si } t < 0).$$

La transformée de LAPLACE:  $F(s) = \int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-\tau s}d\tau$  permet de retrouver le résultat :

$$F(s) = \int_0^{+\infty} (Ce^{A\tau}B + D\delta(\tau))e^{-\tau s}d\tau = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (\forall s \in \text{domaine de convergence}). \quad (\text{A.8})$$

**Exemple A.1** On considère le système du second ordre:  $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s+1)^2}$ .

- a) calculer la réponse impulsionnelle du système,
- b) calculer la réponse du système à des conditions initiales  $y(0) = y_0$  et  $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$  (on suppose  $t_0 = 0$ ).

**Correction:** si l'utilisation des tables de transformées de LAPLACE permet de répondre directement à la question a):  $y(t) = te^{-t}$ , il est recommandé d'utiliser une représentation d'état et l'équation (A.2) pour répondre à la question b). Considérons une représentation sous forme de JORDAN du système :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

La matrice dynamique  $A$  n'étant pas diagonalisable (une valeur propre double), le calcul de l'exponentielle de matrice  $e^{At}$  peut être effectué par son développement limité :

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \frac{A^4t^4}{4!} + \dots$$

On obtient alors :

$$e^{\begin{bmatrix} -t & t \\ 0 & -t \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \dots & t - t^2 + \frac{t^3}{2!} - \frac{t^4}{3!} + \dots \\ 0 & 1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Réponse impulsionnelle: avec  $t_0 = 0$ ,  $x(t_0) = 0$  et  $u(t) = \delta(t)$  (impulsion de DIRAC), l'équation (A.2) devient :

$$x(t) = \int_0^t \begin{bmatrix} (t - \tau)e^{\tau-t} \\ e^{\tau-t} \end{bmatrix} \delta(\tau)d\tau = \begin{bmatrix} te^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad y(t) = [1 \quad 0]x(t) = te^{-t}.$$

Réponse à des conditions initiales ( $u(t) = 0$ ): il faut maintenant établir la relation entre le vecteur d'état  $x = [x_1, x_2]^T$  de la représentation (A.9) et le vecteur constitué de la sortie  $y$  et de sa dérivée  $\dot{y}$  sur lesquelles sont spécifiées les conditions initiales. L'équation de mesure et sa dérivation nous permet d'écrire :

$$\begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x \quad \Rightarrow \quad x(t_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ \dot{y}_0 \end{bmatrix}.$$

On en déduit que :

$$y(t) = Ce^{At}x(t_0) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ \dot{y}_0 \end{bmatrix} = e^{-t}(1+t)y_0 + te^{-t}\dot{y}_0.$$

Remarque: nous aurions pu également considérer une représentation sous forme compagne horizontale qui fait directement apparaître dans le vecteur d'état la sortie et sa dérivée :

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u. \quad (\text{A.10})$$

Le calcul de l'exponentielle de matrice donne alors :

$$e^{\begin{bmatrix} 0 & t \\ -t & -2t \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} e^{-t}(1+t) & te^{-t} \\ -te^{-t} & e^{-t}(1-t) \end{bmatrix}.$$

□

## A.2 Cas discret

Considérons le modèle d'état discret :

$$\begin{cases} x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k) \\ y(k) = C_d x(k) + D_d u(k) \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

La réponse de ce modèle à des entrées déterministes  $u(\cdot)$  sur un horizon  $[k_0, k]$  et à des conditions initiales  $x(k_0) = x_0$  s'écrit :

$$x(k) = A_d^{k-k_0} x_0 + \sum_{i=k_0}^{k-1} A_d^{i-k_0} B_d u(k-1-i+k_0) \quad (\text{A.12})$$

$$y(k) = C_d x(k) + D_d u(k) \quad (\text{A.13})$$

la démonstration est immédiate en résolvant la récurrence sur l'équation d'état :

$$\begin{aligned} x(k) &= A_d x(k-1) + B_d u(k-1) \\ &= A_d^2 x(k-2) + A_d B_d u(k-2) + B_d u(k-1) \\ &= \dots \end{aligned}$$

**Remarque A.2** En appliquant (A.12) avec  $n_0=0$ ,  $x_0 = 0$  et  $u(i) = \delta(i)$  (le Dirac en discret:  $\delta(0) = 1$ ;  $\delta(i) = 0$  si  $i \neq 0$ ), la réponse impulsionnelle générale du système défini par le quadruplet  $(A_d, B_d, C_d, D_d)$  s'écrit donc:

$$f(0) = D_d, \quad f(i) = C_d A_d^{i-1} B_d \quad \forall i \geq 1 \quad (f(i) = 0 \text{ si } i < 0).$$

La transformée en  $\mathcal{Z}$ :  $F(z) = \sum_{i=0}^{\infty} f(i)z^{-i}$  permet de retrouver le résultat :

$$F(z) = \sum_{i=1}^{\infty} C_d A_d^{i-1} B_d z^{-i} + D_d = C_d (zI - A_d)^{-1} B_d + D_d \quad (\forall z \in \text{domaine de convergence}).$$

(A.14)

# Appendix B

## Passage d'un bruit dans un système linéaire

Les démonstrations qui suivent sont extraites de la référence [4] et adaptées aux notations de ce document.

### B.1 Complément: caractérisation des signaux aléatoires discrets

On étend ici au cas discret les notions introduites au chapitre 1.

Soit  $w(n)$  une suite de variables aléatoires.

- Espérance mathématique (moyenne) :  $m(n) = E[w(n)]$ .
- Fonction d'autocorrélation :  $\phi_{ww}(n, k) = E[w(n)w^T(n+k)]$ .
- Stationnarité à l'ordre 2 :  $m(n) = m$ ;  $\phi_{ww}(n, k) = \phi_{ww}(k) \quad \forall n$ .
- Variance :  $\sigma_w^2 = \phi_{ww}(k)|_{k=0}$ .
- Spectre complexe :

$$\Phi_{ww}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi_{ww}(k)z^{-k}, \text{ et inversement :}$$

$$\phi_{ww}(k) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\text{cercle unité}} \Phi_{ww}(z)z^{k-1}dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{ww}(e^{j\theta})e^{j\theta k}d\theta.$$

- Densité spectrale de puissance : cette fonction de la pulsation  $\omega$  suppose que l'on introduise une échelle de temps. On introduit donc la période d'échantillonnage

$dt$  entre les événements <sup>1</sup>  $w(n)$ .

$$\Phi_{ww}(\omega) = \Phi_{ww}(z)|_{z=e^{j\omega dt}}$$

On a alors :

$$\phi_{ww}(k) = \frac{dt}{2\pi} \int_{-\pi/dt}^{\pi/dt} \Phi_{ww}(\omega) e^{j\omega dt k} d\omega \quad \text{et} \quad \sigma_w^2 = \frac{dt}{2\pi} \int_{-\pi/dt}^{\pi/dt} \Phi_{ww}(\omega) d\omega .$$

La variance est à  $dt/2/\pi$  près, l'intégrale de la densité spectrale de puissance entre  $-\pi/dt$  et  $\pi/dt$ .

## B.2 Approche temporelle

### B.2.1 Cas continu

**Théorème 1.1 (rappel de la page 21).** Soit le système linéaire continu:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Mw(t) . \quad (\text{B.1})$$

$w(t)$  est un bruit blanc gaussien centré de densité spectrale de puissance  $W$ . On note  $m(t_0)$  et  $P(t_0)$  la moyenne et la covariance de l'état initial  $x(t_0)$  (lui aussi aléatoire gaussien mais indépendant de  $w(t)$ ). On montre que  $x(t)$  est un signal aléatoire gaussien :

- de moyenne:

$$m(t) = E[x(t)] = e^{A(t-t_0)}m(t_0)$$

- de covariance  $P(t) = E[(x(t)-m(t))(x(t)-m(t))^T]$  vérifiant l'équation différentielle de LYAPUNOV :

$$\dot{P}(t) = AP(t) + P(t)A^T + MWM^T . \quad (\text{B.2})$$

Si le système est stable (toutes les valeurs propres de  $A$  sont à partie réelle négative) on tend vers un régime permanent:  $\dot{P} = 0$  et  $P(t) = P$  vérifie alors l'équation de LYAPUNOV continue :

$$AP + PA^T + MWM^T = 0 . \quad (\text{B.3})$$

**Démonstration:** l'intégration de l'équation (B.1) entre l'instant initial  $t_0$  et le l'instant courant  $t$  s'écrit :

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Mw(\tau)d\tau$$

$x(t)$  est donc une combinaison linéaire de signaux aléatoires gaussiens ( $x(t_0)$  et  $w(\tau)$ ),  $x(t)$  est donc également un signal aléatoire gaussien. Calculons sa moyenne  $m(t) = E(x(t))$  et sa matrice de covariance  $P(t) = E[(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T]$ .

<sup>1</sup>On note  $\theta = \omega dt$  la pulsation réduite.

**Moyenne  $m(t)$ :**

$$m(t) = e^{A(t-t_0)} E[x(t_0)] + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} M E[w(\tau)] d\tau ,$$

or  $E[w(\tau)] = 0$  (bruit centré) et  $E[x(t_0)] = m(t_0)$  donc:

$$\boxed{m(t) = e^{A(t-t_0)} m(t_0)} .$$

**Covariance  $P(t)$ :**

$$\begin{aligned} x(t) - m(t) &= e^{A(t-t_0)} \left( x(t_0) - m(t_0) \right) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} M w(\tau) d\tau \\ &= e^{A(t-t_0)} \left( x(t_0) - m(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t_0-\tau)} M w(\tau) d\tau \right) . \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned} \left( x(t) - m(t) \right) \left( x(t) - m(t) \right)^T &= e^{A(t-t_0)} \left( \left( x(t_0) - m(t_0) \right) \left( x(t_0) - m(t_0) \right)^T + \right. \\ &+ \int_{t_0}^t e^{A(t_0-\tau)} M w(\tau) \left( x(t_0) - m(t_0) \right)^T d\tau + \\ &+ \int_{t_0}^t \left( x(t_0) - m(t_0) \right) w^T(\tau) M^T e^{A^T(t_0-\tau)} d\tau + \\ &\left. + \iint_{t_0}^t e^{A(t_0-\tau)} M w(\tau) w^T(u) M^T e^{A^T(t_0-u)} d\tau du \right) e^{A^T(t-t_0)} . \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

$$\begin{aligned} P(t) &= e^{A(t-t_0)} \left( P(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t_0-\tau)} M E \left[ w(\tau) \left( x(t_0) - m(t_0) \right)^T \right] d\tau + \right. \\ &+ \int_{t_0}^t E \left[ \left( x(t_0) - m(t_0) \right) w^T(\tau) \right] M^T e^{A^T(t_0-\tau)} d\tau + \\ &\left. + \iint_{t_0}^t e^{A(t_0-\tau)} M E \left[ w(\tau) w^T(u) \right] M^T e^{A^T(t_0-u)} d\tau du \right) e^{A^T(t-t_0)} . \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Du fait des hypothèses ( $x(t_0)$  et  $w(\tau)$  sont indépendants  $\forall \tau > t_0$  et  $w(t)$  est un bruit blanc centré), on peut affirmer:

- $E \left[ w(\tau) \left( x(t_0) - m(t_0) \right)^T \right] = 0$
- $E \left[ w(\tau) w^T(u) \right] = W \delta(\tau - u)$ .

On a donc:

$$P(t) = e^{A(t-t_0)} \left( P(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t_0-\tau)} M W M^T e^{A^T(t_0-\tau)} d\tau \right) e^{A^T(t-t_0)}. \quad (\text{B.7})$$

et

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= \frac{dP(t)}{dt} = A e^{A(t-t_0)} \left( P(t_0) + \dots \right) e^{A^T(t-t_0)} + e^{A(t-t_0)} \left( P(t_0) + \dots \right) e^{A^T(t-t_0)} A^T \\ &+ e^{A(t-t_0)} \left( e^{A(t_0-t)} M W M^T e^{A^T(t_0-t)} \right) e^{A^T(t-t_0)}. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Soit:

$$\boxed{\dot{P}(t) = AP(t) + P(t)A^T + M W M^T}. \quad (\text{B.9})$$

**Remarque B.1** *En régime permanent, la solution générale de l'équation  $AP + PA^T + M W M^T = 0$  s'écrit :*

$$P = \int_0^\infty e^{At} M W M^T e^{A^T t} dt.$$

*En effet:*

$$\begin{aligned} AP + PA^T &= \int_0^\infty A e^{At} M W M^T e^{A^T t} + e^{At} M W M^T e^{A^T t} A^T dt \\ &= \int_0^\infty \frac{d[e^{At} M W M^T e^{A^T t}]}{dt} dt \\ &= [e^{At} M W M^T e^{A^T t}]_0^\infty = 0 - M W M^T \quad (\text{ssi } A \text{ est stable}). \end{aligned}$$

Si l'on note  $h(t) = e^{At} B$ ,  $\forall t \geq 0$  la réponse impulsionnelle des états  $x$  du système, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} P &= \int_0^\infty h(t) W h^T(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty H(-j\omega) W H^T(j\omega) d\omega \quad (\text{égalité de PARSEVAL}) \\ &= [\mathcal{L}_{II}^{-1} \Phi_{xx}(s)]_{s=0} \quad \text{avec: } \Phi_{xx}(s) = H(-s) W H^T(s). \end{aligned}$$

Ces dernières égalités permettent de faire le lien avec l'approche fréquentielle qui suit (théorème 1.2) et de montrer que la variance est égale (à  $2\pi$  près) à l'intégrale du carré de la réponse fréquentielle du bruit.

## B.2.2 Cas discret

**Théorème B.1** *Soit le système linéaire discret:*

$$x(k+1) = A_d x(k) + M_d w_d(k). \quad (\text{B.10})$$

$w_d(k)$  est un bruit pseudo-blanc gaussien centré de densité spectrale  $W_d$  (c'est-à-dire  $E[w_d(k)w_d(k+j)^T] = W_d\delta(j)$ ). On note  $m(0)$  et  $P(0)$  la moyenne et la covariance de l'état initial  $x(k_0) = x(0)$  (lui aussi aléatoire gaussien mais indépendant de  $w_d(k)$ ). On montre que  $x(k)$  est un signal aléatoire gaussien :

- de moyenne:

$$m(k) = E[x(k)] = A_d^{k-k_0} m(0)$$

- de covariance  $P(k) = E[(x(k) - m(k))(x(k) - m(k))^T]$  vérifiant l'équation récurrente de LYAPUNOV :

$$P(k+1) = A_d P(k) A_d^T + M_d W_d M_d^T . \quad (\text{B.11})$$

Si le système est stable (toutes les valeurs propres de  $A_d$  sont de module inférieur à 1) on tend vers un régime permanent:  $P(k+1) = P(k) = P$  vérifie alors l'équation de LYAPUNOV discrète:

$$P = A_d P A_d^T + M_d W_d M_d^T . \quad (\text{B.12})$$

**Démonstration:** (elle est en fait beaucoup plus simple que dans le cas continu). L'équation (A.12), qui fait apparaître  $x(k)$  comme une combinaison linéaire de variables aléatoires gaussiennes, permet de conclure que  $x(k)$  est effectivement une variable aléatoire gaussienne.  $w_d(k)$  étant centré ( $\forall k$ ), on peut conclure que  $E[x(k)] = A_d^{k-k_0} m(0)$ .

Enfin, on peut remarquer que  $x(k+1) - m(k+1) = A_d(x(k) - m(k)) + M_d w_d(k)$ . L'indépendance, à tout instant  $k$ , des variables **centrées**  $x(k) - m(k)$  et  $w_d(k)$  permet de conclure que  $P(k+1) = A_d P(k) A_d^T + M_d W_d M_d^T$ .

**Remarque B.2** A partir de l'équation B.7 on retrouve l'équation de LYAPUNOV discrète dans le cas d'un système continu échantillonné à la cadence  $dt$ . Il suffit de prendre  $t_0 = n dt$  et  $t = (n+1) dt$  où  $dt$  désigne la période d'échantillonnage. On note alors  $P(t) = P(n+1)$  et  $P(t_0) = P(n)$ , on obtient:

$$P(n+1) = e^{A dt} P(n) e^{A^T dt} + \int_0^{dt} e^{A u} M W M^T e^{A^T u} du$$

On note :

- $e^{A dt} = A_d$ : la matrice dynamique discrète,
- $\int_0^{dt} e^{A u} M W M^T e^{A^T u} du = W_d$  la matrice de covariance du bruit intégré sur une période d'échantillonnage,

pour obtenir:

$$P_{n+1} = A_d P_n A_d^T + W_d$$

(dont le régime permanent s'écrit:  $P_n = A_d P_n A_d^T + W_d$ ). On retrouve bien l'équation (B.11) avec  $M_d = I$ .

On peut vérifier que :

- si  $A$  est inversible,  $W_d$  vérifie l'équation de LYAPUNOV:

$$AW_d + W_d A^T + M W M^T - e^{A dt} M W M^T e^{A^T dt} = 0, \quad (\text{B.13})$$

- $W_d \approx dt M W M^T$  si  $dt$  est petit par rapport au temps de réponse du système.

**Exemple B.1 (Illustration sous Matlab)** On reprend l'exercice 1.6 que l'on complète sous Matlab par une analyse de la variance du bruit  $w$  en temps discret :

```
% Définition du filtre:
G=tf([-1 100],[1 50 10000])
% Calcul d'une réalisation:
[A,B,C,D]=ssdata(G);
% Calcul de la variance par l'équation de Lyapunov continue:
P=lyap(A,B*B'); var_w=C*P*C' % ==> var_w=1/50.

% Analyse en discret:
dt=0.001; A_d=expm(A*dt);
Wd=lyap(A,B*B'-A_d*B*B'*A_d'); %Dans cet exemple: W=I; M=B.
Pd=dlyap(A_d,Wd);var_wd=C*Pd*C'
% ==> on retrouve exactement la variance de w(t): var_w=1/50.

% Calcul aproximatif: Wd=dt*B*B'
Pdp=dlyap(A_d,dt*B*B');var_wdp=C*Pdp*C'
% ==> cela ne marche pas trop mal.
```

□

## B.3 Approche fréquentielle

### B.3.1 Cas continu

**Théorème 1.2 (rappel).** La sortie  $y$  d'un système linéaire, continu et **stable** défini par la matrice de transfert  $G(s)_{p \times q}$  et attaqué par un signal aléatoire stationnaire

$w$  de spectre complexe  $\Phi_{ww}(s)_{q \times q}$  est un signal aléatoire stationnaire de spectre complexe

$$\Phi_{yy}(s)_{p \times p} = G(-s)\Phi_{ww}(s)G^T(s).$$

**Démonstration:** sans perte de généralité la démonstration est faite dans le cas d'un système strictement propre (pas de transmission directe). On note  $(A, M, C)$  la réalisation du transfert  $G(s)$ , c'est-à-dire :  $G(s) = C(sI - A)^{-1}M$ .

Par définition :

$$\Phi_{yy}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{yy}(\tau) e^{-\tau s} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} E [y(t)y^T(t + \tau)] e^{-\tau s} d\tau \quad (\text{B.14})$$

Pour calculer  $y(t)$  nous allons utiliser la formule (A.2) dans la quelle nous choisirons  $x(t_0) = 0$  et  $t_0 = -\infty$  car on ne s'intéresse qu'au régime permanent (régime stationnaire) :

$$y(t) = \int_{-\infty}^t C e^{A(t-u)} M w(u) du = \int_0^{\infty} C e^{Av} M w(t-v) dv \quad (\text{changement de variable: } t - u = v).$$

$$\begin{aligned} \Phi_{yy}(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} E \left[ \int_0^{\infty} C e^{Av} M w(t-v) dv \int_0^{\infty} w^T(t + \tau - u) M^T e^{A^T u} C^T du \right] e^{-\tau s} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} C e^{Av} M E [w(t-v)w^T(t + \tau - u)] M^T e^{A^T u} C^T du dv \right\} e^{-\tau s} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} C e^{Av} M e^{vs} \phi_{ww}(\tau + v - u) e^{-(\tau+v-u)s} M^T e^{A^T u} C^T e^{-us} du dv \right\} d\tau \\ &= \int_0^{\infty} C e^{Av} M e^{vs} dv \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{ww}(\tau + v - u) e^{-(\tau+v-u)s} d\tau \int_0^{\infty} M^T e^{A^T u} C^T e^{-us} du \\ &= G(-s)\Phi_{ww}(s)G^T(s) \quad \text{d'après (A.8) et (B.14)}. \end{aligned}$$

### B.3.2 Cas discret

**Théorème B.2 (Passage d'un bruit dans un système linéaire discret)** *La sortie  $y$  d'un système linéaire, discret et **stable** défini par la matrice de transfert  $G(z)_{p \times q}$  et attaqué par un signal aléatoire  $w$  stationnaire de spectre  $\Phi_{ww}(z)_{q \times q}$  est un signal aléatoire stationnaire de spectre*

$$\Phi_{yy}(z)_{p \times p} = G(z^{-1})\Phi_{ww}(z)G^T(z).$$

**Démonstration:** sans perte de généralité la démonstration est faite dans le cas d'un système strictement propre (pas de transmission directe). On note  $(A_d, M_d, C_d)$  la réalisation du transfert  $G(z)$ , c'est-à-dire :  $G(z) = C_d(zI - A_d)^{-1}M_d$ .

Par définition :

$$\Phi_{yy}(z) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \phi_{yy}(i) z^{-i} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} E [y(k) y^T(k+i)] z^{-i} \quad (\text{B.15})$$

Pour calculer  $y(k)$  nous allons utiliser la formule (A.12) dans la quelle nous choisirons  $x_0 = 0$  et  $k_0 = -\infty$  car on ne s'intéresse qu'au régime permanent (régime stationnaire) :

$$y(k) = \sum_{j=-\infty}^{k-1} C_d A_d^{j-k_0} M_d w(k-1-j+k_0) = \sum_{j=0}^{+\infty} C_d A_d^j M_d w(k-1-j) \quad (j \leftarrow j - k_0).$$

$$\begin{aligned} \Phi_{yy}(z) &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} E \left[ \sum_{j=0}^{+\infty} C_d A_d^j M_d w(k-1-j) \sum_{l=0}^{+\infty} w^T(k+i-1-l) M_d^T A_d^{T^l} C_d^T \right] z^{-i} \\ &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} C_d A_d^j M_d E [w(k-1-j) w^T(k+i-1-l)] M_d^T A_d^{T^l} C_d^T \right\} z^{-i} \\ &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} C_d A_d^j M_d z^{j+1} \phi_{ww}(i-l+j) z^{-(i-l+j)} M_d^T A_d^{T^l} C_d^T z^{-l-1} \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} C_d A_d^{j-1} M_d z^j \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_{ww}(k) z^{-k} \sum_{l=1}^{+\infty} M_d^T A_d^{T^{l-1}} C_d^T z^{-l} \quad (k = i - l + j) \\ &= G(z^{-1}) \Phi_{ww}(z) G^T(z) \quad \text{d'après (A.14) et (B.15)}. \end{aligned}$$

# Appendix C

## Code source Matlab des fichiers de démonstration

### C.1 Fonction Kf\_t.m

```
function y=Kf_t(u)
% y=Kf_t(u)
% input:
%     * u(1): time (t),
%     * u(2:length(u)): innovation (y(t)-yhat(t))
% output:
%     * y = Kf(t)*(y(t)-yhat(t))
global a c W P0

% Compute P(t):
Pinf=a+sqrt(a^2+W);
k=2*sqrt(a^2+W);
P=Pinf+k*(P0-Pinf) ./ (exp(k*u(1))*(P0-Pinf+k)+Pinf-P0);

% Compute Kf(t):
Kf=P*c';

% Output
y=Kf*u(2:length(u));
```

### C.2 Fichier demoKalman.m

```
% Global Variable declaration
```

```

global a c W P0
% Kalman model data:
a=-1;      % state space date
b=1;
c=1;
W=1;      % Process noise spectral density
V=1;
P0=1;     % Initial estimation error variance
X0=20;    % Initial condition for the process output
% Simulation data
dt=0.01;  % Integration sampling period
T=0;      % Time delay in the validation model

% Start simulation:
sim('simuKalman');

% Output plots:
figure plot(output.time,output.signals.values(:,1),'g-') hold on
plot(output.time,output.signals.values(:,2),'k-','LineWidth',2)
plot(output.time,output.signals.values(:,3),'k-')
plot(output.time,output.signals.values(:,4),'r-','LineWidth',2)
% Compute state estimation error variance as a function of time:
t=output.time;
Pinf=a+sqrt(a^2+W);
k=2*sqrt(a^2+W);
Pdet=Pinf+k*(P0-Pinf)./(exp(k*t)*(P0-Pinf+k)+Pinf-P0);
% plot estimation+2*sigma:
plot(output.time,output.signals.values(:,4)+2*sqrt(Pdet),'r-')
% plot estimation-2*sigma:
plot(output.time,output.signals.values(:,4)-2*sqrt(Pdet),'r-')
legend('y(t)', 'x(t)', 'u(t)', 'xhat(t)', ...
       'xhat(t)+2\sigma', 'xhat(t)-2 \sigma')

return

% Solution with a 2nd order Pade approximation of a 1 second delay
% taken into account in the Kalman filter:
T=1; sys=ss(a,b,c,0);
[num,den]=pade(T,2);
ret=tf(num,den);
sysret=sys*ret;

```

```

[a,b,c,d]=ssdata(sysret);
W=1;
[Kf,P]=lqe(a,b,c,W,1);
% Output estimation error variance:
var=c*P*c';

% Start simulation only in steady state behavior:
X0=0;
sim('simuKalman_p'); % same as simuKalman.mdl but
                    % the matlab Function Kf_t is
                    % replaced by a static Gain

% Output plots:
figure plot(output.time,output.signals.values(:,1),'g-') hold on
plot(output.time,output.signals.values(:,2),'k-','LineWidth',2)
plot(output.time,output.signals.values(:,3),'k-')
plot(output.time,output.signals.values(:,4),'r-','LineWidth',2)
% plot estimation+2*sigma:
plot(output.time,output.signals.values(:,4)+2*sqrt(var),'r-')
% plot estimation-2*sigma:
plot(output.time,output.signals.values(:,4)-2*sqrt(var),'r-')
legend('y(t)', 'x(t)', 'u(t)', 'xhat(t)', ...
      'xhat(t)+2\sigma', 'xhat(t)-2 \sigma')

```

### C.3 Fichier demoKalmand.m

```

% Continuous-time model data:
A=[0 -1;0 0];
B=[1;0];
M=[0;1];
C=[1 0];
D=0;
sysc=ss(A,B,C,D);
V=1;
q=1; W=q^2;
% Continuous-time Kalman filter:
[Kf,P]=lqe(A,M,C,W,V)

dt=0.01;
% Compute Discrete-time model:

```

```
sysd=c2d(sysc,dt,'zoh');  
[A_d,B_d,C_d,D]=ssdata(sysd)  
Vd=V/dt  
Wd=[1/3*q^2*dt^3 -1/2*q^2*dt^2;-1/2*q^2*dt^2 q^2*dt] % Wd can not  
%      be computed by a Lyapunov equation (equation B.13) since A  
%      is not invertible !! (see how Wd can be computed in LQED)  
% Discrete-time Kalman filter using dlqe:  
[Kfd1,Pd1]=dlqe(A_d,eye(2),C_d,Wd,Vd)  
% Discrete-time Kalman filter using lqed (from continuous-time data):  
[Kfd2,Pd2]=lqed(A,M,C,W,V,dt) %=> same solution !
```