EISC-106/208 – Chaînes de Markov

F. Simatos
20 mai 2019

Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace
SUPAERO

EISC-106/208 – Chaînes de Markov

F. Simatos
20 mai 2019

Table des matières

Remerciements

Je tiens à chaudement remercier Xavier Gendre, tout fraîchement arrivé à l'ISAE SUPAERO, de m'avoir permis d'utiliser cette classe LaTeX sans laquelle je ne me serais pas lancé dans une écriture si précise de ces notes de cours.

Hum, à la réflexion j'aurais en fait économisé beaucoup de temps s'il n'avait pas été là, mais je suis malgré tout content du résultat.

0 — Préambule

A FAIRE: A compléter

Au-délà des difficultés conceptuelles liées à la nature intrinsèque des chaînes de Markov, les étudiants qui suivent ce cours ont aussi souvent du mal avec le formalisme probabiliste, ce qu'il serait bien malvenu de leur reprocher. Avant de commencer ce cours, je vous demande donc de lire ce qui suit, et de faire les exercices indiqués.

0.1 Utilisation des indicatrices

Exercice 0.1. 1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un espace E, et $A \subset E$: montrez que $\mathbb{E}(\mathbb{1}(X \in A)) = \mathbb{P}(X \in A)$.
2. Soit $T \in \mathbb{N}$ une variable aléatoire à valeurs dans les entiers $\mathbb{N}$. Montrez que

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(T > n).$$

0.2 Bestiaire de mauvaises utilisations

Voici un bestiaire d'utilisations fausses : avant de commencer ce cours, je vous encourage à le lire, et à essayer de comprendre ce qui ne va pas.

1. Soit X une variable aléatoire : $\mathbb{P}(X) > 0$;
2. On considère T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$: alors pour tout $n \leq T$, on a $\mathbb{P}(n \leq T) = 1$;

1 — Définitions et propriétés de base

1.1 Définition

Une suite de variables aléatoires (X_n) à valeurs dans un espace d'état dénombrable E est une chaîne de Markov si conditionnellement au présent, futur et passé sont indépendants. Il y a plusieurs manières de formaliser cela, on prendra la définition classique suivante.

Définition 1.1 (Propriété de Markov)**.** Une suite de variables aléatoires (X_n) à valeurs dans un espace d'état dénombrable E est une **chaîne de Markov** si pour tous $n \geq 0$ et $x_0, \ldots, x_{n+1} \in E$ on a

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n). \tag{1.1}$$

Si par ailleurs $\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_{n+1} \mid X_0 = x_n)$ on dit que (X_n) est **homogène en temps**.

Dans le reste du cours, on note $x_m^n = (x_k, k = m, \ldots, n)$ pour tout vecteur x et $m \leq n$, si bien que la propriété de Markov peut se réécrire

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0^n = x_0^n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n).$$

La suite $X_t^\infty = (X_{t+n}, n \geq 0)$ est appelée **chaîne décalée à l'instant** t, et $X_0^t = (X_n, n = 0, \ldots, t)$ **chaîne tuée à l'instant** t.

On considère dans tout le reste du cours (X_n) une chaîne de Markov homogène en temps dans un espace d'état E supposé dénombrable (fini ou infini)

Un exemple trivial de chaîne de Markov est le cas où les X_i sont i.i.d.. Néanmoins, attention : de nombreux résultats vrais pour le cas i.i.d. ne le sont pas nécessairement pour une chaîne de Markov générale. Par exemple, on montre dans l'Exercice 1.6 qu'une fonction d'une chaîne de Markov n'est pas nécessairement une chaîne de Markov (alors qu'une fonction de variables i.i.d. reste une suite de variables i.i.d.).

1.2 Matrice de transition

Définition 1.2. Pour une chaîne de Markov homogène en temps, la probabilité $\mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_n = x)$ ne dépend donc pas du temps : on appelle cette probabilité **probabilité de transition** (de x à y) et on la note

$$p_{xy} = \mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_n = x) = \mathbb{P}(X_1 = y \mid X_0 = x).$$

L'ensemble des probabilités de transition définit la **matrice de transition** notée P :

$$P = (p_{xy})_{x,y\in E}.$$

REMARQUE 1.3 La "matrice" P peut effectivement être vue comme une matrice, mais lorsque E est infini il s'agit d'une "matrice" infinie. En toute rigueur il faudrait parler d'opérateurs de semi-groupes, cf. le cours EISC-105/205 sur ce sujet. ■

Dans ce cours on a uniquement besoin de multiplier ces matrices entre elles, ce qui se fait avec la même règle qu'en dimension finie : si P et Q sont deux matrices de transition, on définit PQ la matrice dont l'entrée (x,y) est donnée par $\sum_z p_{xz}q_{zy}$.

On a aussi besoin de multiplier à droite et à gauche. Précisons la terminologie utilisée. Un élément $u \in \mathbb{R}^E$ pourra être vu comme un vecteur colonne $u = (u_x, x \in E) = (u(x), x \in E)$: cela donne sens à $Pu \in \mathbb{R}^E$, $u^T P \in \mathbb{R}^E$ et $v^T u$ avec $v \in \mathbb{R}^E$, à savoir

$$(Pu)_x = \sum_{y\in E} p_{xy}u_y,\ (u^T P)_y = \sum_{x\in E} u_x p_{xy} \ \text{ et } \ v^T u = \sum_{x\in E} v_x u_x.$$

Puisque par définition on a $p_{xy} = \mathbb{P}(X_1 = y \mid X_0 = x)$, $Pu(x)$ est donc la moyenne de $u(X_1)$ conditionnellement à $X_0 = x$:

$$Pu(x) = \mathbb{E}\left(u(X_1) \mid X_0 = x\right).$$

Avec cette notation, on voit donc $u : E \to \mathbb{R}$ comme une fonction. Par ailleurs, on appellera **mesure** un vecteur dont toutes les coordonnées sont ≥ 0. On fait agir les mesures $v \in \mathbb{R}_+^E$ sur les fonctions/vecteurs $f \in \mathbb{R}^E$, à savoir

$$v(f) = \sum_{x\in E} v_x f(x) = v^T f.$$

Une mesure particulière est la mesure de Dirac, notée δ_x, et définie par $\vec{1} = \mathbb{1}\,(x = y)$. Ainsi, on a par exemple

$$\delta_x(Pf) = Pf(x) = \mathbb{E}(f(X_1) \mid X_0 = x).$$

Dans le cas où E est infini, tous les objets ci-dessus sont sujets à être bien définis, i.e., que les sommes considérées ont bien un sens. En pratique, nous ne considérerons presque que des vecteurs ≥ 0, et donc toutes les sommes considérées auront bien un sens dans $[0,\infty]$.

Pour toute matrice de transition on a les propriétés élémentaires suivantes :

$$\forall x, y,\ p_{xy} \geq 0 \ \text{ et } \ \forall x,\ \sum_y p_{xy} = 1. \tag{1.2}$$

Si $\vec{1}$ est le vecteur dont toutes les coordonnées valent 1, la deuxième relation peut se noter de manière condensée $P\vec{1} = \vec{1}$, ce qui montre que $\vec{1}$ est vecteur propre à droite de P, associé à la valeur propre 1. Une matrice qui vérifie ces propriétés est dite **stochastique**. On utilisera donc indifféremment la terminologie matrice de transition ou matrice stochastique (ce qui est justifié par la Proposition 1.7 qui montre qu'effectivement, une matrice stochastique est la matrice de transition d'une chaîne de Markov).

Lemme 1.4. *Si P et Q sont stochastiques, alors PQ est stochastique.*

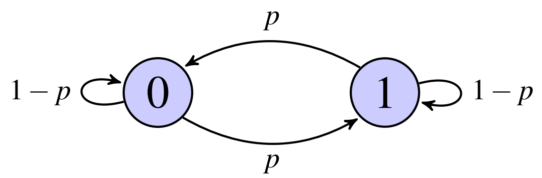
Démonstration. On a $(PQ)_{xy} = \sum_z p_{xz}q_{zy} \geq 0$ et $\sum_y (PQ)_{xy} = \sum_z p_{xz} \left(\sum_y q_{zy}\right)$. □

La matrice de transition se représente souvent sous la forme du graphe de transition dont les nœuds sont les états $x \in E$, il y a une arête orientée de x à y si la chaîne de Markov peut aller de x à y, et l'arête porte un poids égal à la probabilité de transition p_{xy}.

EXEMPLE 1.5 On utilisera fréquemment les exemples suivants.

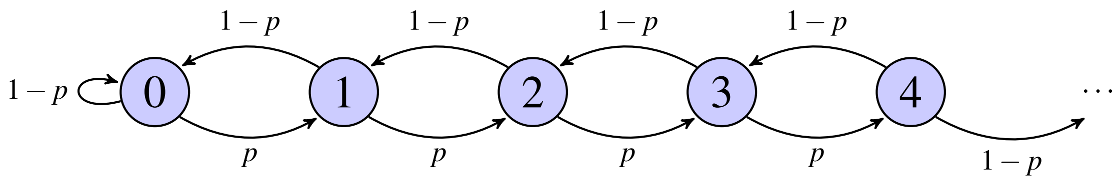
- Chaîne de Markov à deux états sur $E = \{0,1\}$: $p_{0,1} = p_{1,0} = 1 - p_{0,0} = 1 - p_{1,1} = p$,

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}.$$



- Marche aléatoire réfléchie sur $\mathbb{N}$: $p_{x,x+1} = 1 - p_{x,x-1} = p$ pour $x > 0$, et $p_{0,1} = 1 - p_{0,0} = p$.

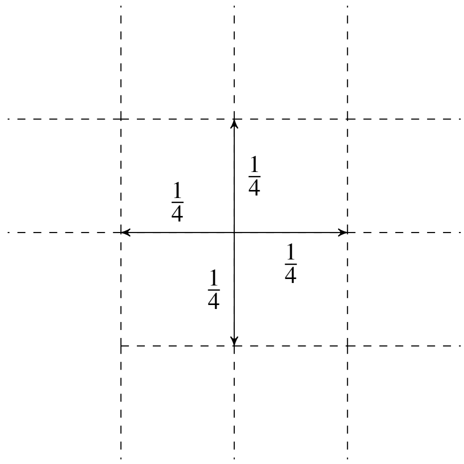
$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & 0 & \cdots \\ 1-p & 0 & p & 0 & \ddots \\ 0 & 1-p & 0 & p & \ddots \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$



- Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$: $p_{x,x+1} = 1 - p_{x,x-1} = p$.

$$P = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1-p & 0 & p & 0 & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & p & 0 & \ddots \\ \vdots & \ddots & 0 & 1-p & 0 & p & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

- Marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^d$: $p_{x,y} = \frac{1}{2^d}$ avec y un voisin de x dans $\mathbb{Z}^d$, i.e., $y = x \pm e_i$ avec e_i qui n'a que des 0 sauf en position i où il y a un 1. Là il n'est a priori pas commode de représenter la matrice de transition car il n'y a pas d'ordre naturel.



■

1.3 Chaîne de Markov comme système dynamique aléatoire

En pratique, on peut définir une chaîne de Markov ou bien en spécifiant les probabilités de transition $\mathbb{P}(X_1 = y \mid X_0 = x)$ (cf. ci-dessous) ou alors en exprimant X_{n+1} en fonction de X_n et d'une source d'aléatoire U_n. Le résultat suivant montre qu'effectivement, si la source d'aléatoire (U_n) est i.i.d. et indépendante de X_0 alors on obtient bien une chaîne de Markov.

Proposition 1.6. *Soit $x \in E$, (U_n) une suite de variables aléatoires i.i.d. dans un espace d'états $\mathscr{U}$ et $F : E \times \mathscr{U} \to E$. Si X_0 est indépendant de (U_n), alors la suite (X_n) définie par*

$$X_{n+1} = F(X_n, U_{n+1}),\ n \geq 0, \tag{1.3}$$

définit une chaîne de Markov homogène en temps.

Démonstration. Pour $n \geq 0$ on a

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0^n = x_0^n) = \mathbb{P}(F(x_n, U_{n+1}) = x_{n+1} \mid X_0^n = x_0^n).$$

Par récurrence on a $X_k = F_k(X_0, U_0, \ldots, U_k)$ et donc X_0^n et U_{n+1} sont indépendants et donc

$$\mathbb{P}(F(x_n, U_{n+1}) = x_{n+1} \mid X_0^n = x_0^n) = \mathbb{P}(F(\vec{1}0) = x_{n+1})$$

qui n'est bien qu'une fonction de x_n et x_{n+1} (et pas du temps). □

Le résultat suivant, laissé en exercice, montre que la réciproque est vraie, i.e., que toute chaîne de Markov peut se représenter sous la forme d'un système dynamique aléatoire.

Proposition 1.7. *Soit P une matrice stochastique. Il existe une fonction $F : E \times [0,1] \to E$ telle que si les (U_n) sont i.i.d. uniformément réparties sur $[0,1]$, alors la suite $X_{n+1} = F(X_n, U_{n+1})$ est une chaîne de Markov de matrice de transition P.*

Démonstration. Exercice 1.1. □

1.4 Loi d'une chaîne de Markov

Définition 1.8 (Loi d'un processus)**.** La **loi d'une suite** (X_k) est la donnée de

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n)$$

pour tout $n \geq 0$ et $x_0, \ldots, x_n \in E$.

La propriété suivante est parfois prise comme définition d'une chaîne de Markov, et permet de caractériser la loi d'une chaîne de Markov.

Proposition 1.9. *Si X est une chaîne de Markov de matrice de transition P, alors pour tout $n \geq 0$ et $x_0^n \in E^{n+1}$ on a*

$$\mathbb{P}(X_0^n = x_0^n) = \mathbb{P}(X_0 = x_0) \prod_{i=1}^{n} p_{x_{i-1}x_i}.$$

Démonstration. On fait une récurrence sur $n \geq 0$. Pour $n = 0$ il n'y a rien à prouver (avec la convention $\prod_0^{-1} = 1$). Supposons $n \geq 1$. Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(X_0^{n+1} = x_0^{n+1}\right) &= \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}, X_0^n = x_0^n) \\ &= \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0^n = x_0^n)\, \mathbb{P}(X_0^n = x_0^n) \\ &= p_{x_n x_{n+1}} \mathbb{P}(X_0 = x_0) \prod_{i=1}^{n} p_{x_{i-1}x_i} \end{aligned}$$

où la dernière égalité provient de la propriété de Markov pour le terme $p_{x_n x_{n+1}}$ et de l'hypothèse de récurrence pour le deuxième terme $\mathbb{P}(X_0 = x_0) \prod_{i=1}^{n} p_{x_i x_{i-1}}$. La proposition est démontrée. □

La Proposition 1.9 montre que la matrice de transition P ne caractérise pas la loi de (X_n) : **il faut aussi spécifier la condition initiale** $(\mathbb{P}(X_0 = x), x \in E)$. Par la suite on notera ℓ ou ℓ_0 la condition initiale, avec $\ell = (\ell(x), x \in E)$ et $\ell(x) = \mathbb{P}(X_0 = x)$ et ℓ_n la loi de X_n, i.e., $\ell_n = (\ell_n(x), x \in E)$ avec $\ell_n(x) = \mathbb{P}(X_n = x)$.

Théorème 1.10. *La loi initiale ℓ et la matrice de transition P caractérisent la loi de la chaîne de Markov.*

Dans la suite du cours on dira que (X_n) est Markov(ν, P) si sa loi initiale est ν et sa matrice de transition P, i.e., en vertu de la Proposition 1.9, si

$$\mathbb{P}(X_0^n = x_0^n) = \nu(x_0) \prod_{i=1}^{n} p_{x_{i-1}x_i}.$$

`A FAIRE: Commande pour ce genre de remarques ?`

NOTATION : dans le reste du cours on notera $\mathbb{P}_x = \mathbb{P}(\cdot \mid X_0 = x)$ la loi de la chaîne de Markov démarrée de $x \in E$. Plus généralement, si $v \in [0,\infty]^E$ (i.e., $v = (v(x), x \in E)$ avec $v(x) \in [0,\infty]$ pour chaque $x \in E$) on notera

$$\mathbb{P}_v = \sum_x v(x)\mathbb{P}_x.$$

Ainsi, si v est une loi de probabilités sur E, $\mathbb{P}_v$ est la loi de la chaîne de Markov commencée en x avec probabilités $v(x)$, et on a donc $\mathbb{P}_x = \mathbb{P}_{\delta_x}$ (δ_x est la mesure de Dirac : $\delta_x(y) = \mathbb{1}(x = y)$). Les opérateurs d'espérance associés seront notés $\mathbb{E}_x$ et $\mathbb{E}_v$.

1.5 Equation d'évolution : un système linéaire à gauche

Théorème 1.11. *La suite des lois $(\ell_n, n \geq 0)$ vérifie le système dynamique linéaire déterministe suivant :*

$$\ell_{n+1}^T = \ell_n^T P, \; n \geq 0. \tag{1.4}$$

En particulier, $\ell_n^T = \ell_0^T P^n$.

L'équation d'évolution 1.4 est appelée équation de Chapman–Kolmogorov, ou aussi parfois équation maîtresse (surtout en anglais, *master equation*).

Démonstration du Théorème 1.11. Pour $n \geq 0$ et $x \in E$ on a

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x) = \sum_{x_n} \mathbb{P}(X_{n+1} = x \mid X_n = x_n)\,\mathbb{P}(X_n = x_n).$$

□

REMARQUE **1.12** L'équation d'évolution de la chaîne de Markov est donc obtenue en **multipliant la matrice de transition à gauche** et a été obtenue par une **analyse en dernière étape**. ■

Corollaire 1.13. *Pour tout $x, y \in E$ et $n \geq 0$ on a $(P^n)_{xy} = \mathbb{P}(X_n = y \mid X_0 = x)$.*

Démonstration. Exercice 1.2. □

Cette propriété justifie la définition suivante.

Définition 1.14. P^n est appelée matrice de transition en n étapes.

On notera donc que la matrice de transition, si elle ne définit pas la loi du processus, caractérise par contre sa dynamique. On peut résumer le résultat précédent de la manière suivante :

Chaîne de Markov

$=$

Système dynamique linéaire déterministe sur les lois !

Corollaire 1.15. *Pour toute distribution initiale ν sur E et toute fonction $f : E \to \mathbb{R}_+$, on a*

$$\mathbb{E}_\nu(f(X_n)) = \nu^T P^n f.$$

En particulier, pour $x \in E$ on a $\mathbb{E}_x(f(X_n)) = P^n f(x)$.

Démonstration. Exercice 1.3. □

1.6 Mesures invariantes et distributions stationnaires

1.6.1 Définition

Puisqu'on a un système dynamique déterministe, on peut naturellement définir et considérer ses points fixes.

Définition 1.16. ℓ est une **mesure invariante** si $\ell^T P = \ell^T$, $\ell \neq 0$ et $\ell \geq 0$ (i.e., $\ell(x) \in [0,\infty[$ pour tout $x \in E$).
Si ℓ est une mesure invariante et qu'en outre $\sum_x \ell(x) = 1$, i.e., ℓ est une mesure de probabilité, alors ℓ est appelée **distribution stationnaire**.

On notera immédiatement que si ℓ est une mesure invariante, alors $c\ell$ aussi pour tout $c \geq 0$: il n'y a donc jamais unicité des mesures invariantes, et on s'intéressera à l'unicité à une constante multiplicative près.

Puisque $\ell^T P$ est la loi de X_1 sous $\mathbb{P}_\ell$, il vient directement que si $X_0 \sim \ell$ avec ℓ une distribution stationnaire, alors $X_n \sim \ell$ pour tout n : en d'autres termes, si X_0 est tiré selon une distribution stationnaire, alors la loi de X_n est invariante dans le temps. **Les distributions stationnaires sont donc les points fixes de notre système dynamique!** On se posera plus tard la question d'existence et d'unicité de ces points fixes, puis de convergence vers ceux-ci.

1.6.2 Pourquoi s'intéresser aux mesures invariantes ?

Comme on vient de le voir, les distributions stationnaires sont des objets naturels à considérer, et sont les candidats naturels pour les limites éventuelles de la loi de notre chaîne de Markov. Les mesures invariantes, quant à elles, ont une interprétation probabiliste plus limitées. Pourquoi donc s'intéresser à ces objets ? En fait, chercher des distributions stationnaires revient à chercher π satisfaisant les trois conditions suivantes :

$$\pi^T P = \pi^T, \ \pi \geq 0 \ \text{ et } \ \sum_{x \in E} \pi_x = 1.$$

Pour étudier l'existence et l'unicité de ces objets, on va d'abord s'intéresser aux mesures stationnaires, qui satisfont

$$v^T P = v^T, \ v \geq 0 \ \text{ et } \ v \neq 0.$$

Une fois que l'on aura bien compris l'existence et l'unicité (à une constante multiplicative près, comme expliqué ci-dessus) des mesures invariantes, on pourra alors facilement en déduire les mêmes propriétés concernant les distributions stationnaires. En effet, si π est une distribution stationnaire alors c'est une mesure invariante. A contrario, si v est une mesure invariante, alors les candidats naturels pour les distributions stationnaires sont de la forme

$$\pi_x = \frac{1}{\sum_y v_y} v_x$$

avec v mesure invariante. Néanmoins, ce faisant on ne définit bien une distribution stationnaire que si v est de masse finie, i.e., $\sum_x v_x < \infty$. Sinon, on divise par 0 et on a donc $\pi = 0$.

L'approche générale que l'on va suivre pour étudier l'existence et l'unicité des distributions stationnaires est donc la suivante :

- existence et unicité (à une constante multiplicative près) des mesures invariantes ;
- étude des conditions sous lesquelles ces mesures invariantes ont une masse finie, auquel cas on peut les normaliser en une distribution stationnaire.

On montrera en particulier que :

- si P est irréductible et récurrente, alors il existe une unique mesure invariante (à une constante multiplicative près) ;
- si P est irréductible et récurrente positive, alors il existe une unique distribution stationnaire obtenue en normalisant les mesures invariantes.

1.6.3 Equation de balance de flots

Cas général

On commence par montrer une caractérisation par flots des mesures invariantes. Cette caractérisation n'est pas immédiatement indispensable, mais permet de donner une interprétation physique à ces mesures et elle s'avère parfois très utile, comme pour les chaînes de vie et de mort.

Proposition 1.17. *v est une mesure invariante si et seulement si pour tout ensemble $C \subset E$ avec $\sum_{x,y \in C} v_x p_{xy} < \infty$ les flots entrants et sortants sont égaux :*

$$\sum_{x \in C, y \notin C} v_x p_{xy} = \sum_{x \in C, y \notin C} v_y p_{yx}.$$

Démonstration. $\boxed{\Leftarrow}$ on prend $C = \{x\}$.
$\boxed{\Rightarrow}$ pour tout $x \in C$ on a

$$v_x = \sum_y v_y p_{yx}$$

On ré-exprime les deux membres de l'égalité :

$$v_x = \sum_{y \notin C} v_x p_{xy} + \sum_{y \in C} v_x p_{xy} \quad \text{et} \quad \sum_y v_y p_{yx} = \sum_{y \notin C} v_y p_{yx} + \sum_{y \in C} v_y p_{yx}$$

et donc on obtient en sommant sur $x \in C$

$$\sum_{x \in C} \sum_{y \notin C} v_x p_{xy} + \sum_{x \in C} \sum_{y \in C} v_x p_{xy} = \sum_{x \in C} \sum_{y \notin C} v_y p_{yx} + \sum_{x \in C} \sum_{y \in C} v_y p_{yx}.$$

Puisque $\sum_{x,y \in C} v_x p_{xy} < \infty$ on peut donc retrancher des deux membres de l'égalité pour obtenir le résultat. $\square$

Il y a deux cas où la condition $\sum_{x,y\in C} \nu_x p_{xy} < \infty$ de la Proposition 1.17 est automatiquement satisfaite : C est fini et si l'on sait que ν est une mesure de probabilité.

Corollaire 1.18. *Soit ν une mesure de probabilité. Alors ν est une distribution stationnaire si et seulement si pour tout ensemble $C \subset E$ les flots entrants et sortants sont égaux :*

$$\sum_{x\in C, y\notin C} \nu_x p_{xy} = \sum_{x\in C, y\notin C} \nu_y p_{yx}.$$

Réversibilité et équations de balance locale

Il y a un cas particulier où les équations de balance sont automatiquement vérifiées, c'est quand ses équations sont vérifiées localement.

Définition 1.19. On dit que π satisfait les équations de balance locale si pour tout $x, y \in E$ on a $\pi_x p_{xy} = \pi_y pyx$.

Si π satisfait les équations de balance locale, alors π est une mesure invariante/distribution stationnaire. On dit alors que la chaîne de Markov(π, P) est réversible.

Définition 1.20. Si P est une matrice de transition et ν une mesure, on dit que le couple (P, ν) est **réversible** ou que P est réversible par rapport à ν si $\nu_x p_{xy} = \nu_y p_{yx}$ pour tous x, y. On dit que P est réversible s'il existe ν telle que (P, ν) soit réversible.

La Proposition 1.17 entraîne immédiatement le résultat suivant.

Corollaire 1.21. *Si (P, ν) est réversible, alors ν est une mesure invariante pour P.*

Le résultat suivant justifie la terminologie de "réversibilité".

Proposition 1.22. *Soit P irréductible et récurrente positive avec π sa distribution stationnaire. Soit $N \geq 0$ arbitraire. Sous $\mathbb{P}_\pi$, $Y_n = X_{N-n}$ est une chaîne de Markov aux temps $0, \ldots, N$ de matrice de transition*

$$q_{yx} = \frac{\pi(x)}{\pi(y)} p_{xy}.$$

En particulier, si (P, π) est réversible, alors Y a la même dynamique que X.

Démonstration. On a

$$\mathbb{P}_\pi(Y_{n+1} = y_{n+1} \mid Y_0^n = y_0^n) = \frac{\mathbb{P}_\pi(X_{N-n-1} = y_{n+1}, \cdots, X_N = y_0)}{\mathbb{P}_\pi(X_{N-n} = y_n, \cdots, X_N = y_0)}$$

Puisque π est une distribution stationnaire, on a

$$\mathbb{P}_\pi(X_{N-n-1} = y_{n+1}, \cdots, X_N = y_0) = \mathbb{P}_\pi(X_0 = y_{n+1}, \cdots, X_{n+1} = y_0)$$

et

$$\mathbb{P}_\pi(X_{N-n} = y_n, \cdots, X_N = y_0) = \mathbb{P}_\pi(X_0 = y_n, \cdots, X_n = y_0)$$

et donc

$$\mathbb{P}_\pi(Y_{n+1} = y_{n+1} \mid Y_0^n = y_0^n) = \frac{\pi(y_{n+1}) p_{y_{n+1} y_n} \cdots p_{y_1 y_0}}{\pi(y_n) p_{y_1 y_{n-1}} \cdots p_{y_1 y_0}} = \frac{\pi(y_{n+1}) p_{y_{n+1} y_n}}{\pi(y_n)}$$

□

REMARQUE 1.23 La notion de réversibilité est très importante : elle est équivalente au fait que P est auto-adjoint dans l'espace de Hilbert des fonctions L_2 muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle_\pi = \pi(fg) = \sum_x \pi(x) f(x) g(x)$ puisqu'alors

$$\langle Pf, g \rangle_\pi = \sum_x \pi(x) Pf(x) g(x) = \sum_{x,y} \pi(x) p_{xy} f(y) g(x) = \sum_{x,y} \pi(y) p_{yx} f(y) g(x) = \langle f, Pg \rangle_\pi.$$

Cette propriété d'auto-adjonction a des conséquences très importantes notamment sur les propriétés spectrales de P et donc, comme nous le verrons plus loin, sur les vitesses de convergence à l'équilibre. ■

1.7 Exercices

1.7.1 Exercices théoriques

EXERCICE 1.1. Démontrez la Proposition 1.7.

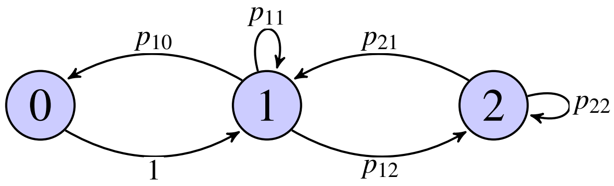
EXERCICE 1.2. Prouvez le Corollaire 1.13.

EXERCICE 1.3. Démontrez le Corollaire 1.15.

EXERCICE 1.4. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités et $A, B \in \mathscr{F}$ deux évènements mesurables. On note $\mathbb{Q} = \mathbb{P}(\cdot \mid A)$ la mesure conditionnelle à A. Exprimez la mesure conditionnelle $\mathbb{Q}(\cdot \mid B)$ en fonction de $\mathbb{P}$, A et B.

EXERCICE 1.5. Ecrivez la matrice de transition et dessinez le graphe de transition de la file d'attente, décrite par la récurrence $X_{n+1} = (X_n - 1)^+ + A_{n+1}$. Vous exprimerez votre réponse en fonction de $a_k = \mathbb{P}(A_1 = k)$.

EXERCICE 1.6. Dans cet exercice on montre que le futur et le présent ne sont pas indépendants conditionnellement à n'importe quelle information sur le présent, et qu'une fonction d'une chaîne de Markov n'est pas forcément une chaîne de Markov. Pour cela on considère la chaîne de Markov sur $\{0, 1, 2\}$ de loi initiale $\mu = (\mu_0, \mu_1, \mu_2)$ (i.e., $\mathbb{P}(X_0 = i) = \mu_i$) et avec les probabilités de transition suivantes.



1. Calculez $\mathbb{P}(X_2 = 0 \mid X_1 \in \{1,2\}, X_0 = 2)$ et $\mathbb{P}(X_2 = 0 \mid X_1 \in \{1,2\})$ et déduisez-en que l'on peut avoir

$$\mathbb{P}(X_2 = 0 \mid X_1 \in \{1,2\}, X_0 = 2) \neq \mathbb{P}(X_2 = 0 \mid X_1 \in \{1,2\}).$$

2. On considère $Y_n = \mathbb{1}(X_n = 2)$. Calculez $\mathbb{P}(Y_2 = 1 \mid Y_1 = 0, Y_0 = 1)$ et $\mathbb{P}(Y_2 = 1 \mid Y_1 = 0)$ puis concluez : une fonction d'une chaîne de Markov est-elle nécessairement une chaîne de Markov ?

EXERCICE 1.7. Soit P une matrice de transition.

1. Montrez que 1 est toujours valeur propre à droite, i.e., qu'il existe $v \neq 0$ avec $Pv = v$.

2. Dans le cas où E est fini, P et sa transposée P^T ayant le même spectre, cela implique que 1 est aussi valeur propre à gauche. Cela implique-t-il nécessairement l'existence de mesures invariantes ?

Dans le reste de l'exercice on considère

$$P = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$$

avec $p = 1 - q \in [0,1]$.

3. Etudiez l'existence et l'unicité des mesures invariantes et distributions stationnaires en fonction des différentes valeurs de p.

4. Diagonalisez P et déduisez-en que la loi au temps n de la chaîne de Markov (ℓ, P) avec $\ell = (\ell_0, \ell_1)$ une mesure de probabilités arbitraire sur $\{0,1\}$ est donnée par

$$\mathbb{P}_\ell(X_n = 0) = \frac{1}{2}\left(1 + (p-q)^n(\ell_0 - \ell_1)\right) \text{ et } \mathbb{P}_\ell(X_n = 1) = \frac{1}{2}\left(1 - (p-q)^n(\ell_0 - \ell_1)\right).$$

5. Quel est le comportement asymptotique de la loi de X_n lorsque $n \to \infty$?

EXERCICE 1.8. On considère la matrice de transition suivante, avec $p, q > 0$ et $p + q = 1$:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & q \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ p & 0 & q & 0 \end{pmatrix}$$

1. Dessinez le graphe de transition de cette chaîne.

2. Montrez que (X_{2n}) est une chaîne de Markov et identifiez sa matrice de transition.

3. Déduisez à l'aide de l'Exercice 1.7 que la loi de (X_{2n}) converge.

4. Trouvez une condition initiale sous laquelle la loi de (X_n) ne converge pas.

EXERCICE 1.9. Construisez une chaîne de Markov $Z_n = (X_n, Y_n)$ sur un espace produit $E \times F$ telle que :

(i) chaque marginale (X_n) et (Y_n) est une chaîne de Markov ;

(ii) aucune des marginales ne l'est ;

(iii) une des marginales est une chaîne de Markov et pas l'autre.

EXERCICE 1.10. On considère le graphe obtenu de la manière suivante : les nœuds sont les états de E, et l'arête (x,y) est présente si $p_{x,y} > 0$. Montrez que si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. $p_{x,y} > 0$ si et seulement si $p_{y,x} > 0$;
2. le graphe précédent est un arbre ;

alors la chaîne de Markov est réversible.

EXERCICE 1.11. Montrez que P est réversible si et seulement si $p_{xy} > 0 \Leftrightarrow p_{yx} > 0$ et pour tout cycle $x_0 \to \cdots \to x_n = x_0$ avec $p_{x_i,x_{i+1}} > 0$ on a $\prod_{i=0}^{n-1} p_{x_i,x_{i+1}} = \prod i = 0^{n-1} p_{x_{i+1},x_i}$.

1.7.2 Applications

2 — Propriété de Markov

2.1 Propriété de Markov

Lemme 2.1. *Si* $(X_n) \sim \text{Markov}(\nu, P)$*, alors pour tout* $n, k \geq 0$ *et* $x_0^{n+k} \in E^{n+k+1}$ *on a*

$$\mathbb{P}_\nu\left(X_n^{n+k} = x_n^{x+k} \mid X_0^n = x_0^n\right) = \mathbb{P}_{x_n}\left(X_0^k = x_n^{x+k}\right).$$

Démonstration. Récurrence sur $k \geq 1$. Pour $k \geq 1$ c'est la définition. Supposons $k \geq 2$:

$$\mathbb{P}_\nu\left(X_n^{n+k} = x_n^{x+k} \mid X_0^n = x_0^n\right) = \mathbb{P}_\nu\left(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0^n = x_0^n\right) \mathbb{P}_\nu\left(X_{n+1}^{n+k} = x_{n+1}^{x+k} \mid X_0^{n+1} = x_0^{n+1}\right)$$

Dans le membre de droite, on utilise la définition pour le premier terme et l'hypothèse de récurrence pour le second terme pour obtenir

$$\mathbb{P}_\nu\left(X_n^{n+k} = x_n^{x+k} \mid X_0^n = x_0^n\right) = p_{x_n x_{n+1}} \mathbb{P}_{x_{n+1}}\left(X_0^{k-1} = x_{n+1}^{x+k}\right)$$

ce qui donne le résultat en utilisant la Proposition 1.9. □

Théorème 2.2. *Soit* (X_n) *Markov*(ν, P)*. Alors conditionnellement à* $X_n = x$*,* X_n^∞ *est Markov*(δ_x, P) *et est indépendante de* X_0^n*.*
De manière équivalente et plus utile en pratique, pour tout $n \geq 0$ *et toutes fonctions* $\varphi : E^{n+1} \to \mathbb{R}_+$ *et* $\phi : E^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}_+$ *on a*

$$\mathbb{E}\left[\varphi(X_0^n)\phi(X_n^\infty) \mid X_n = x\right] = \mathbb{E}\left[\varphi(X_0^n) \mid X_n = x\right] \mathbb{E}_x\left[\phi(X)\right].$$

Démonstration. On ne fait que la preuve dans le cas où ϕ ne dépend que d'un nombre fini de termes, i.e., il existe $h \geq 0$ tel que $\phi(X) = \phi(X_0^h)$. Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\varphi(X_0^n)\phi(X_n^\infty); X_n = x\right] &= \sum_{x_0^{n+h}: x_n = x} \mathbb{E}\left[\varphi(X_0^n)\phi(X_n^{n+h}); X_0^{n+h} = x_0^{n+h}\right] \\
&= \sum_{x_0^{n+h}: x_n = x} \mathbb{E}\left[\varphi(x_0^n)\phi(x_n^{n+h}); X_0^{n+h} = x_0^{n+h}\right] \\
&= \sum_{x_0^{n+h}: x_n = x} \varphi(x_0^n)\phi(x_n^{n+h})\mathbb{P}\left(X_0^{n+h} = x_0^{n+h}\right)
\end{aligned}$$

En écrivant $\mathbb{P}\left(X_0^{n+h} = x_0^{n+h}\right) = \mathbb{P}\left(X_0^n = x_0^n\right)\mathbb{P}\left(X_n^{n+h} = x_n^{n+h} \mid X_0^n = x_0^n\right)$ et en utilisant le corollaire précédent, on obtient

$$\mathbb{E}\left[\varphi(X_0^n)\phi(X_n^\infty); X_n = x\right] = \sum_{x_0^{n+h}: x_n = x} \varphi(x_0^n)\phi(x_n^{n+h})\mathbb{P}\left(X_0^n = x_0^n\right)\mathbb{P}\left(X_0^h = x_n^{n+h} \mid X_0 = x_n\right)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\varphi(X_0^n)\phi(X_n^\infty) \mid X_n = x\right] = &\left(\sum_{x_0^n: x_n = x} \varphi(x_0^n)\mathbb{P}\left(X_0^n = x_0^n \mid X_n = x_n\right)\right) \\
&\times \left(\sum_{x_n^{n+h}: x_n = x} \phi(x_n^{n+h})\mathbb{P}\left(X_0^h = x_n^{n+h} \mid X_0 = x_n\right)\right)
\end{aligned}$$

Le théorème de transfert nous assure que

$$\sum_{x_0^n: x_n = x} \varphi(x_0^n)\mathbb{P}\left(X_0^n = x_0^n \mid X_n = x\right) = \mathbb{E}\left[\varphi(X_0^n) \mid X_n = x\right]$$

et

$$\sum_{x_n^{n+h}: x_n = x} \phi(x_n^{n+h})\mathbb{P}\left(X_0^h = x_n^{n+h} \mid X_0 = x_n\right) = \mathbb{E}\left[\phi(X_0^h) \mid X_0 = x\right]$$

ce qui prouve bien le résultat. □

Ce résultat très général va nous permettre de prouver à peu près n'importe quelle propriété qui utilise le fait que futur et passé sont indépendants conditionnellement au présent. Par exemple, le fait que

$$\mathbb{P}\left(X_{n+2} = x_{n+2} \mid X_0^n = x_0^n\right) = p_{x_n, x_{n+2}}(2)$$

ou de manière plus générale, le résultat suivant.

Corollaire 2.3. *Pour tout $n, k \geq 0$, $x \in E$ et A_i ensembles mesurables, on a*

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(X_i \in A_i, i = n+1, \ldots, n+k \mid X_n = x, X_i \in A_i, i = 0, \ldots, n-1\right) \\
&\qquad\qquad = \mathbb{P}_x\left(X_i \in A_{n+i}, i = 1, \ldots, k\right).
\end{aligned}$$

Démonstration. Si on définit $A_n = \{X_n = x\}$ on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X_i \in A_i, i = n+1, \ldots, n+k \mid X_n = x, X_i \in A_i, i = 0, \ldots, n-1\right)\\ = \frac{\mathbb{P}\left(X_i \in A_i, i = 0, \ldots, n+k\right)}{\mathbb{P}\left(X_i \in A_i, i = 0, \ldots, n\right)}\\ = \frac{\mathbb{P}\left(X_i \in A_i, i = 0, \ldots, n+k \mid X_n = x_n\right)}{\mathbb{P}\left(X_i \in A_i, i = 0, \ldots, n \mid X_n = x_n\right)}\end{aligned}$$

En prenant

$$\varphi(y) = \mathbb{1}\left(y_i \in A_i, i = 0, \ldots, n\right), \ y \in E^{n+1}$$

et

$$\phi(y) = \mathbb{1}\left(y_i \in A_{n+i}, i = 0, \ldots, k\right), \ y \in E^{\mathbb{N}},$$

on peut réécrire

$$\mathbb{P}\left(X_i \in A_i, i = 0, \ldots, n+k \mid X_n = x\right) = \mathbb{E}\left(\varphi(X_0^n)\phi(X_n^\infty) \mid X_n = x\right)$$

et

$$\mathbb{P}\left(X_i \in A_i, i = 0, \ldots, n+k \mid X_n = x\right) = \mathbb{E}\left(\varphi(X_0^n) \mid X_n = x\right)$$

et donc la propriété de Markov donne

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X_i \in A_i, i = 0, \ldots, n+k \mid X_n = x\right) &= \mathbb{E}\left(\varphi(X_0^n) \mid X_n = x\right)\mathbb{E}_x\left(\phi(X_0^\infty)\right)\\ &= \mathbb{E}\left(\varphi(X_0^n) \mid X_n = x\right)\mathbb{P}_x\left(X_i \in A_{n+i}, i = 0, \ldots, k\right)\end{aligned}$$

ce qui donne bien le résultat voulu. □

Attention ! Dans le résultat précédent, on ne peut pas mettre $X_n \in A_n$ au lieu de $X_n = x_n$: l'Exercice 1.6 fournit un contre-exemple.

2.2 Temps d'arrêt

L'exemple suivant montre que la propriété de Markov (1.1) n'est pas forcément valide si n est un **temps aléatoire** et non déterministe.

EXEMPLE 2.4 Soit X la chaîne de Markov à deux états et T le premier instant où l'on observe deux 0 consécutifs :

$$T = \inf\{n \geq 0 : X_{n+1} = X_n = 0\}.$$

Alors $\mathbb{P}(X_{T+1} = 0 \mid X_T = 0, X_{T-1} = 0) = 1$ alors que pour n déterministe, on a $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 0, X_{n-1} = 0) = p$. La différence avec la propriété de Markov (1.1) est que le temps aléatoire T **contient de l'information sur le futur**. ■

Le problème de l'exemple précédent est que T est défini à partir d'information disponible dans le futur, i.e., pour savoir si l'on est à T il faut savoir quel est le prochain état. Ainsi, la variable aléatoire X_T qui formellement ne semble dépendre que du passé $X_0, \ldots, X_T$, dépend en fait aussi du future et notamment de X_{T+1}.

Si l'on s'interdit cela, i.e., que l'on considère un temps aléatoire T qui n'est défini qu'à partir du passé (i.e., quand on y est, on le sait) alors la propriété de Markov reste valable : c'est la propriété de Markov forte. Les “bons” temps aléatoires, ceux qui ne regardent pas dans le futur, sont appelés des **temps d'arrêt**.

Définition 2.5 (Temps d'arrêt)**.** Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On dit que T est un **temps d'arrêt** si pour tout n la variable aléatoire $\mathbb{1}(T \leq n)$ est une fonction de X_0^n, i.e., si pour chaque $n \geq 0$ il existe une fonction $\psi_n : E^{n+1} \to \mathbb{N}$ telle que l'on peut écrire $\mathbb{1}(T \leq n) = \psi_n(X_0^n)$.

Pour montrer qu'un temps aléatoire T est un temps d'arrêt, il est parfois plus commode de regarder les évènements du type $\{T = n\}$.

Lemme 2.6. *T est un temps d'arrêt si pour chaque $n \geq 0$ il existe une fonction ψ_n : $E^{n+1} \to \mathbb{N}$ telle que l'on peut écrire $\mathbb{1}(T = n) = \psi_n(X_0^n)$.*

Démonstration. Exercice 2.1 □

De manière équivalente, T est un temps d'arrêt si on peut décrire l'évènement $\{T \leq n\}$ uniquement à l'aide des variables $X_0, \dots, X_n$ et que l'on n'a pas besoin des $X_{n+1}, X_{n+2}, \dots$. En d'autres termes, T est un temps d'arrêt si quand on y est, on le sait.

Les temps d'atteinte $T = \inf\{n \geq 0 : X_n \in A\}$ sont des temps d'arrêt puisque

$$T \leq n \Leftrightarrow X \text{ visite } A \text{ avant } n \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \mathbb{1}(X_k \in A) \geq 1$$

et donc $\mathbb{1}(T \leq n) = \varphi(X_0^n)$ avec $\varphi : x_0^n \in E^{n+1} \mapsto \mathbb{1}\left(\sum_{k=0}^n \mathbb{1}(x_k \in A) \geq 1\right)$. Par contre, les derniers temps de visite $T = \sup\{n \geq 0 : X_n \in A\}$ ne sont en général pas des temps d'arrêt. Il n'est pas toujours évident de montrer qu'un temps aléatoire n'est pas un temps d'arrêt (il peut être dur de montrer qu'il n'existe pas de fonction qui...), mais la propriété de Markov forte que l'on va voir nous donner un moyen de faire cela, cf..

2.3 Propriété de Markov forte

Convention : $X_\infty = \Delta \notin E$. Ainsi, pour $x = E$ les évènements $\{X_T = x\}$ et $\{X_T \in x, T < \infty\}$ sont égaux.

Théorème 2.7. *Toute chaîne de Markov vérifie la propriété de Markov forte : si T est un temps d'arrêt, alors conditionnellement à $X_T = x$ les deux propriétés suivantes sont vraies :*

1. *X_0^T et X_T^∞ sont indépendantes ;*
2. *$X_T^\infty \sim \mathrm{Markov}(\delta_x, P)$.*

De manière équivalente, pour toutes fonctions $\varphi : \cup_{n \geq 1} E^n \to \mathbb{R}_+$ et $\phi : E^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}_+$ on a

$$\mathbb{E}\left[\varphi(X_0^T)\phi(X_T^\infty) \mid X_T = x\right] = \mathbb{E}_x\left[\phi(X)\right] \mathbb{E}\left(\varphi(X_0^T) \mid X_T = x\right). \tag{2.1}$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\varphi(X_0^T)\phi(X_T^\infty);X_T=x\right] &= \sum_{t\geq 0}\mathbb{E}\left[\varphi(X_0^T)\phi(X_T^\infty)\mathbb{1}\left(T=t\right);X_T=x\right]\\ &= \sum_{t\geq 0}\mathbb{E}\left[\varphi(X_0^t)\phi(X_t^\infty)\mathbb{1}\left(T=t\right);X_t=x\right].\end{aligned}$$

Comme T est un temps d'arrêt, pour chaque $t \geq 0$ il existe une fonction ψ_t telle que $\mathbb{1}\left(T=t\right) = \psi_t(X_0^t)$ et donc

$$\mathbb{E}\left[\varphi(X_0^t)\phi(X_t^\infty)\mathbb{1}\left(T=t\right);X_t=x\right] = \mathbb{E}\left[\varphi'(X_0^t)\phi(X_t^\infty);X_t=x\right]$$

avec $\varphi' = \varphi\psi_t$. Le Théorème 2.2 donne alors

$$\mathbb{E}\left[\varphi(X_0^t)\phi(X_t^\infty)\mathbb{1}\left(T=t\right);X_t=x\right] = \mathbb{E}\left[\varphi'(X_0^t);X_t=x\right]\mathbb{E}_x\left(\phi(X)\right)$$

Puisque

$$\mathbb{E}\left[\varphi'(X_0^t);X_t=x\right]\mathbb{E}_x\left(\phi(X)\right) = \mathbb{E}\left[\varphi(X_0^T);X_T=x,T=t\right]$$

on obtient donc

$$\mathbb{E}\left[\varphi(X_0^T)\phi(X_T^\infty);X_T=x\right] = \mathbb{E}_x(\phi(X))\sum_{t\geq 0}\mathbb{E}\left[\varphi(X_0^T);X_T=x,T=t\right]$$

ce qui donne le résultat. □

2.4 Exercices

2.4.1 Exercices théoriques

EXERCICE 2.1. Prouvez le Lemme 2.6.

EXERCICE 2.2. Soit (X_n) une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{N}$ et S,T des temps d'arrêt. Montrez que tous les temps suivants sont des temps d'arrêt.

1. $\inf\{n \geq T : X_n = 1\}$.
2. Les constantes, i.e., les temps t avec $t \in \mathbb{N}$ fixé.
3. $T+S$.
4. $\min(T,S)$.
5. $(T-n)^+$ avec $n \geq 0$.
6. Montrez en revanche que $\max(S,T)$ n'est pas forcément un temps d'arrêt.

EXERCICE 2.3. Soit (X_n) une chaîne de Markov sur E avec matrice de transition P. On définit itérativement $\tau_0 = 0$ et

$$\tau_{k+1} = \begin{cases}\infty & \text{si } \tau_k = \infty,\\ \inf\{n \geq \tau_k : X_n \neq X(\tau_k)\} \in \mathbb{N}\cup\{\infty\} & \text{sinon,}\end{cases}$$

avec la convention $\inf\emptyset = \infty$.

1. Montrez que pour tout $k \geq 0$, τ_k est un temps d'arrêt.

2. On considère un état cimetière $\Delta \notin E$ et on définit $X(\infty) = \Delta$. Montrez que $(X(\tau_n))$ est une chaîne de Markov, décrivez son espace d'états et calculez sa matrice de transition.

3. Quelle est la loi de τ_1 conditionnellement à $X_0 = x \in E$?

4. On suppose que $p_{xx} < 1$ pour tout $x \in E$. Montrez que $\mathbb{P}_x(\forall k : \tau_k < \infty) = 1$ pour tout $x \in E$ et explicitez la loi de la suite (τ_n) conditionnellement à la suite $(X(\tau_n))$.

A FAIRE: Application au collecteur de coupon

EXERCICE 2.4. Cet exercice généralise l'exercice précédent. Soit τ un temps d'arrêt, que l'on voit comme une fonctionnelle $\tau : E^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On définit récursivement

$$\tau_0 = 0 \ \text{ et } \ \tau_{n+1} = \tau_n + \tau\left(X_{\tau_n}^{\infty}\right)$$

avec les conventions $\tau_{n+1} = \infty$ si $\tau_n = \infty$ et $X_\infty = \Delta$ pour un certain état cimetière $\Delta \notin E$. Montrez que $(X(\tau_n), n \geq 0)$ est une chaîne de Markov.

2.4.2 Applications

3 — Analyse en première étape : probabilités et temps moyens d'atteinte

L'analyse en première étape est une technique très utile pour étudier les chaînes de Markov. L'idée est simplement de décomposer la trajectoire de la chaîne entre 0 et n en regardant ce qui se passe à la première étape, i.e., on va d'abord de 0 à 1 (première étape) puis de 1 à n. Ce genre de raisonnement aboutit typiquement à des équations de récurrence que l'on peut parfois résoudre.

3.1 La ruine du joueur

On illustre cette technique sur l'exemple classique de la ruine du joueur : il s'agit de la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ où l'on monte de $+1$ avec proba p et l'on descend de -1 avec proba $1-p$. On démarre la chaîne de Markov entre 0 et un paramètre c et l'on s'intéresse au premier instant T où la chaîne est soit en 0, soit en c : la question est de savoir si l'on finit en 0 (le joueur est ruiné) ou alors en c, et combien de temps cela prend en moyenne.

3.1.1 Probabilité d'atteinte

Pour formaliser cela, on introduit $u(i) = \mathbb{P}_i(X_T = c)$ la probabilité que le joueur ne finisse pas ruiner avec une fortune initiale i. L'analyse en première étape nous donne le résultat très intuitif suivant.

Lemme 3.1. *u est solution de l'équation*

$$u(i) = pu(i+1) + (1-p)u(i-1),\ i = 1, \ldots, c-1, \tag{3.1}$$

avec les conditions de bord $u(0) = 0$ et $u(c) = 1$.

A FAIRE: $\mathbb{1}(X_T = c) = \mathbb{1}\left(\varphi(X_0^\infty) = c\right)$, et $\varphi(x_0^\infty) = x_0$ si $x_0 \in \{0, c\}$ et $\varphi(x_0^\infty) = \varphi(x_1^\infty)$ sinon, puis appliquer Markov. Mettre les questions 9.4.6 etc en exo ici?

Démonstration. Pour i arbitraire on a

$$\mathbb{P}_i(X_t = c, T = t) = \sum_{x_0^t} \mathbb{1}\,(x_0, \ldots, x_{t-1} \neq 0, c, x_t = c)\, \mathbb{P}_i(X_0^t = x_0^t).$$

Pour $i \neq 0, c$ on a

$$u(i) = \sum_{t \geq 1} \mathbb{P}_i(X_t = c, T = t).$$

On a $\mathbb{P}_i(X_t = c, T = 1) = p_{ic}$ et les termes $t \geq 2$ donnent

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_i(X_t = c, T = t) &= \sum_{x_1^t} \mathbb{1}\,(x_1, x_2, \ldots, x_{t-1} \neq 0, c, x_t = c)\, \mathbb{P}_i(X_1^t = x_1^t) \\
&= \sum_{x_1} \mathbb{1}\,(x_1 \neq 0, c)\, p_{ix_1} \sum_{x_2^t} \mathbb{1}\,(x_2, \ldots, x_{t-1} \neq 0, c, x_t = c)\, \mathbb{P}_{x_1}(X_1^{t-1} = x_2^t) \\
&= \sum_{x_1} \mathbb{1}\,(x_1 \neq 0, c)\, p_{ix_1} \mathbb{P}_{x_1}(X_T = c, T = t-1) \\
&= \sum_{x_1} \mathbb{1}\,(x_1 \neq c)\, p_{ix_1} \mathbb{P}_{x_1}(X_T = c, T = t-1)
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
u(i) &= p_{ic} + \sum_{t \geq 1} \sum_{x_1} \mathbb{1}\,(x_1 \neq c)\, p_{ix_1} \mathbb{P}_{x_1}(X_T = c, T = t-1) \\
&= p_{ic} \mathbb{P}_c(X_T = c) + \sum_{x_1} \mathbb{1}\,(x_1 \neq c)\, p_{ix_1} \mathbb{P}_{x_1}(X_T = c).
\end{aligned}$$

□

REMARQUE 3.2 Si (3.1) était valable sur tout $\mathbb{Z}$, cela reviendrait à l'équation $u = Pu$: l'analyse en première étape revient donc à **multiplier la matrice de transition à droite**, cf. Théorème 3.4. C'est à ne pas confondre avec l'équation d'évolution (1.4) obtenue en multipliant la matrice de transition à gauche. Cette équation à gauche a été obtenue par un raisonnement en dernière étape. ■

On résout maintenant cette équation, qui est une équation linéaire du second ordre. Le polynôme caractéristique vaut $px^2 - x + (1-p)x$, les racines sont

$$\frac{1 \pm (2p-1)}{2p} = 1 \text{ et } \frac{1-p}{p}.$$

On a donc

$$u(i) = \begin{cases} a + b\left(\frac{1-p}{p}\right)^i & \text{si } p \neq 1/2, \\ a + bi & \text{si } p = 1/2, \end{cases}$$

et les conditions de bord donnent donc

$$u(i) = \begin{cases} \frac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^c} & \text{si } p \neq 1/2, \\ \frac{i}{c} & \text{si } p = 1/2. \end{cases}$$

3.1.2 Temps moyen d'atteinte

Le même genre de raisonnement peut être fait pour calculer des temps moyens, par exemple $m(i) = \mathbb{E}_i(T)$.

A FAIRE: Faire la preuve

Lemme 3.3. *m est solution de l'équation*

$$m(i) = 1 + pm(i+1) + qm(i-1),\ i = 1, \ldots, c-1,$$

avec les conditions de bord $m(0) = m(c) = 0$.

Démonstration. A faire. □

On peut résoudre cette équation explicitement.

3.2 Les probabilités et temps moyens d'atteinte sont les solutions minimales des équations à droite

3.2.1 Probabilités d'atteinte

Théorème 3.4. *Soit $A \subset E$ et*

$$v(x) = \mathbb{P}_x\left(\exists n : X_n \in A\right),\ x \in A.$$

Alors v est l'unique solution de

$$\begin{cases} v(x) = 1 & \text{pour } x \in A, \\ v(x) = \sum_y p_{xy} v(y) & \text{pour } x \notin A, \end{cases} \tag{3.2}$$

satisfaisant les deux propriétés suivantes :

1. *$\vec{0} \leq v \leq \vec{1}$;*
2. *v est minimale : si $u \geq 0$ est une autre solution, alors $v \leq u$.*

Par ailleurs, $\inf_{x \notin A} v(x) \in \{0, 1\}$, i.e., soit $v(x) = 1$ pour tout $x \notin A$, soit $\inf_{x \notin A} v(x) = 0$.

Démonstration. Soit $\tilde{P}$ la matrice (rectangulaire) obtenue en supprimant les lignes de A : alors (3.2) est équivalent à $v\,|_A = \vec{1}\,|_A$ et $v\,|_{A^c} = \tilde{P}v$. Soit $T = \inf\{n \geq 0 : X_n \in A\}$ et $v_n(x) = \mathbb{P}_x(T \leq n)$ pour $x \in A$ et $n \geq 0$. Alors $v_0(x) = \mathbb{1}\,(x \in A)$ et

$$v_n(x) \uparrow \mathbb{P}_x(T < \infty) = \mathbb{P}_x(\exists n : X_n \in A) = v(x).$$

La relation $v(x) = 1$ pour $x \in A$ est évidente. Pour $x \notin A$, on a

$$\begin{aligned} v_{n+1}(x) &= \sum_y \mathbb{P}\left(X_1 = y, \exists k \in \{1, \ldots, n+1\} : X_k \in A \mid X_0 = x\right) \\ &= \sum_y p_{xy} \mathbb{P}\left(\exists k \in \{1, \ldots, n+1\} : X_k \in A \mid X_1 = y, X_0 = x\right) \\ &= \sum_y p_{xy} \mathbb{P}_y\left(\exists k \in \{0, \ldots, n\} : X_k \in A\right) \\ &= \sum_{y \notin A} p_{xy} \mathbb{P}_y\left(T \leq n\right) \end{aligned}$$

en utilisant la propriété de Markov. Cela prouve donc $\tilde{v}_{n+1}(x) = \tilde{P}v_n(x)$, avec $\tilde{v}_n = v_n\,|_{A^c}$. En faisant le même raisonnement que ci-dessus avec $n = \infty$ on obtient aussi $\tilde{v}(x) = \tilde{P}v(x)$ pour $x \notin A$, ce qui donne la deuxième partie de (3.2).

Soit u une autre solution positive de $\tilde{u} = \tilde{P}u$ avec $u(x) = 1$ pour $x \in A$: alors $u \geq v_0$ et donc $\tilde{P}u = \tilde{u} \geq \tilde{P}v_0 = \tilde{v}_1$ et par récurrence, $u \geq v_n$ et donc $u \geq v$ en faisant tendre $n \to \infty$.

Soit $c = \inf_{x \notin A} v(x)$, si bien que $v \geq c\vec{1} + (1-c)v_0$: pour $x \in A$ cette inégalité est vérifiée puisque $v(x) = v_0(x) = 1$, et pour $x \notin A$ aussi puisque $v(x) \geq c$ et $v_0(x) = 0$. Par itération, $v \geq c\vec{1} + (1-c)v$ et donc $cv \geq c\vec{1}$. Soit $c = 0$, soit $v \geq \vec{1}$ auquel cas $c = 1$. □

Corollaire 3.5. *Si A est fini, alors soit on reste dans A pour toujours avec probabilité un, soit on sort de A avec probabilité un. En d'autres termes, si $T = \inf\{n \geq 0 : X_n \notin A\}$ avec A fini, alors $\mathbb{P}(T < \infty) \in \{0,1\}$.*

3.2.2 Temps moyens d'atteinte

On a un résultat similaire pour les temps moyens d'atteinte.

Théorème 3.6. *Soit $A \subset E$, $T = \inf\{n \geq 0 : X_n \in A\}$ et*

$$m(x) = \mathbb{E}_x(T),\ x \in A.$$

Alors m est l'unique solution de

$$\begin{cases} m(x) = 0 & \text{pour } x \in A, \\ m(x) = 1 + \sum_y p_{xy} m(y) & \text{pour } x \notin A, \end{cases}$$

satisfaisant les deux propriétés suivantes :

1. *$m \geq \vec{0}$;*
2. *m est minimale : si $u \geq 0$ est une autre solution, alors $m \leq u$.*

Démonstration. Exercice 3.3. □

3.3 Retour sur la ruine du joueur

Pour illustrer l'importance du fait que v est minimale, on reprend l'exemple de la ruine du joueur mais en ne s'intéressant qu'à la ruine, i.e., on s'intéresse à $T = \inf\{n \geq 0 : X_n = 0\}$. Avec $u(i) = \mathbb{P}_i(T < \infty)$, l'analyse en première étape donne

$$u(i) = pu(i+1) + (1-p)u(i-1),\ i \geq 1,$$

dont la solution générale (pour $p \neq q$) est de la forme $u(i) = a + b\rho^i$ avec $\rho = p/q$. Par contre, contrairement au cas de la Section 3.1, on n'a qu'une seule condition de bord : $u(0) = 1$, ce qui donne $a + b = 1$. On a donc prouvé que u est solution de (3.2) si et seulement si $u(i) = a(1-\rho^i) + \rho^i$. Par ailleurs, la solution que l'on cherche est la solution minimale : pour $\rho < 1$ la solution est donc croissante en a, et la solution est donc obtenue pour $a = 0$, et pour

$\rho > 1$ la bonne solution correspond à $a = 1$. On a donc $u(i) = \rho^i$ pour $\rho < 1$ et $u(i) = 1$ pour $\rho > 1$. Dans le cas $\rho > 1$, on est donc sûrs de revenir en 0. L'Exercice 3.2 offre une preuve alternative, d'une certaine manière plus intuitive, de ce résultat.

3.4 Exercices

3.4.1 Exercices théoriques

EXERCICE 3.1. Prouvez le Théorème 3.6.

EXERCICE 3.2. On revient sur la ruine du joueur. Soit (X_n) la marche aléatoire réfléchie en 0, i.e., de matrice de transition $p_{n,n+1} = p$ pour $n \geq 0$, $p_{0,0} = q$ et $p_{n,n-1} = q$ pour $n \geq 1$, avec $q = 1 - p$, $p, q > 0$, et (Y_n) la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ sans réflection en 0 : $p_{n,n+1} = 1 - p_{n,n-1} = p$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On considère $T_0^X = \inf\{n \geq 0 : X_n = 0\}$ et $T_0^Y = \inf\{n \geq 0 : Y_n = 0\}$.

1. Montrez que pour tout $x, n \geq 0$, on a $\mathbb{P}_x(T_0^Y < \infty) \geq \mathbb{P}_x(Y_n \geq 0)$.

2. On considère $p < q$. Montrez en utilisant juste la loi forte des grands nombres et la question précédente que pour tout $x \geq 0$, on a $\mathbb{P}_x(T_0^Y < \infty) = 1$.

3. On considère $p = q$. Montrez en utilisant juste le théorème central limite et la question précédente que pour tout $x \geq 0$, on a $\mathbb{P}_x(T_0^Y < \infty) \geq \frac{1}{2}$.

4. Construisez explicitement (X_n) et (Y_n) de la forme $X_{n+1} = F_X(X_n, U_{n+1})$ et $Y_{n+1} = F_Y(Y_n, U_{n+1})$ avec (U_n) i.i.d. et uniformément réparties sur $[0,1]$, et indépendantes de X_0 et Y_0, de telle sorte que $X_n \geq Y_n$ pour tout $n \geq 0$.

5. Retrouvez le résultat de la Section 3.3 que pour $p < q$, on a $\mathbb{P}_x(T_0^X < \infty) = 1$ pour tout $x \geq 0$.

3.4.2 Applications

EXERCICE 3.3. Un chat et une souris bougent entre deux pièces adjacentes : lorsqu'ils sont dans la même salle, le chat mange la souris. Leurs mouvements sont indépendants et gouvernés par les matrices de transition suivantes (P_c est la matrice de transition du chat, et P_s celle de la souris) :

$$P_c = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix} \text{ et } P_s = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

1. Montrez que la souris meurt presque sûrement en temps fini.

2. En utilisant le Théorème 3.6, calculez le temps moyen de survie de la souris.

3. On suppose maintenant que le mouvement du chat est déterminé par P_c, mais que la souris peut choisir sa stratégie via une matrice de transition P_s. La souris suppose que le chat commence dans l'une des deux salles uniformément au hasard : quelle est sa stratégie qui maximise son temps moyen de survie ?

4 — Structures de classe et classification des états

4.1 Classes ouvertes et fermées

Topologie = matrice de transition sans les poids, on ne s'intéresse qu'aux transitions possibles.

Définition 4.1 (Accessible)**.** On dit que y est **accessible** depuis x si $x = y$, ou s'il existe M avec $p_{xy}(M) > 0$, i.e., si on peut aller de x à y.

De manière équivalente : il existe $x_0 = x, x_1, \ldots, x_n = y$ avec $\prod_{k=1}^{n} p_{x_{k-1}x_k} > 0$.

Définition 4.2 (Communication)**.** x et y communiquent si y est accessible depuis x et inversement.

C'est une relation d'équivalence.

Définition 4.3 (Classe de communication)**.** Une classe de communication est une classe d'équivalence pour la relation de communication.

Définition 4.4 (Ensemble fermé)**.** Un ensemble $C \subset E$ est fermé si $\sum_{y \in C} p_{xy} = 1$ pour tout $x \in C$.

Un état qui fait partie d'une classe fermée est dit essentiel, mais nous n'utiliserons pas cette terminologie.

Définition 4.5. P est irréductible si elle n'a qu'une seule classe de communication.

Théorème 4.6. *Soit $x \in E$ et C sa classe de communication. Alors :*

- *Si C est fermé, alors (X_n) reste pour toujours dans C avec probabilité 1 ;*
- *Si C est ouvert et fini, alors (X_n) sort de C (et n'en revient jamais) avec probabilité 1 ;*
- *Si C est ouvert et infini, alors $\mathbb{P}_x(\exists n : X_n \notin C) \in]0,1]$ et toutes les valeurs de cet intervalle sont possibles.*

Démonstration. Soit $T = \inf\{n \geq 0 : X_n \notin C\}$. Alors

$$\mathbb{P}_x(T < \infty) = \sum_{t \geq 1} \sum_{x_1,\ldots,x_{t-1} \in C, y \notin C} p_{x_0 x_1} \cdots p_{x_n y}$$

qui est nul dans le cas où C est fermé, ce qui montre le premier cas.

Supposons C ouvert et fini : on veut montrer que $\mathbb{P}_x(\exists n : X_n \notin C) = 1$. On utilise le Théorème 3.4 avec $A = C^c$, qui donne

$$\inf_{y \in C} \mathbb{P}_y(\exists n : X_n \notin C) \in \{0,1\}.$$

Soit $y \in C$: par définition il existe $n \geq 1$, $x_n \notin C$ et $x_0 = y, x_1, \ldots, x_{n-1} \in C$ avec $p_{x_k x_{k+1}} > 0$. Alors

$$\mathbb{P}_y(\exists n : X_n \notin C) \geq p_{x_0 x_1} \cdots p_{x_{n-1} x_n} > 0$$

et donc puisque C est fini, $\inf_{y \in C} \mathbb{P}_y(\exists n : X_n \notin C) > 0$. Le Théorème 3.4 avec $A = C^c$ implique donc que $\mathbb{P}_y(\exists n : X_n \notin C) = 1$ pour tout $y \in C$.

Pour le dernier cas on considère la chaîne de vie et de mort avec les probabilités de transition suivantes : $p_{0,0} = 1$ et $p_{x,x-1} = 1 - p_{x,x+1} = p$ pour $x \geq 1$. Comme la probabilité de toucher 0 est indépendante du comportement de la chaîne démarrée en 0, cette probabilité est la même que pour la ruine du joueur de la Section 3.3, à savoir $\mathbb{P}_x(\exists n : X_n \notin C) = \min((q/p)^x, 1)$. □

Le Théorème 3.4 permet de calculer la probabilité de finir dans une classe de communication donnée. Par ailleurs, l'Exercice 4.4 va plus loin dans cette décomposition de classe.

4.2 Récurrence et transience

Dans le reste du cours on définit

$$T_x = \inf\{n \geq 1 : X_n = x\} \quad \text{avec la convention} \quad \inf \emptyset = \infty,$$

Définition 4.7. Un état $x \in E$ est dit récurrent si, partant de x, on est sûrs d'y revenir, et transitoire sinon. Plus formellement :

- x est récurrent si $\mathbb{P}_x(T_x < \infty) = 1$;
- x est transitoire sinon, i.e., si $\mathbb{P}_x(T_x = \infty) > 0$.

4.2.1 Décomposition en cycles à partir d'un état récurrent

On définit
$$N_x = \sum_{k \geq 1} \mathbb{1}\,(X_k = x) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Théorème 4.8. *Pour $r \in \mathbb{N}$ on a*
$$\mathbb{P}_x(N_y \geq r+1) = \mathbb{P}_x(T_y < \infty)\mathbb{P}_y(T_y < \infty)^r.$$

Démonstration. On a
$$\mathbb{P}_x(N_y \geq r+1) = \mathbb{P}_x(\tau_{r+1} < \infty) = \mathbb{P}_x(\tau_r < \infty)\mathbb{P}_x(\tau_{r+1} - \tau_r < \infty \mid \tau_r < \infty).$$
Pour $r = 0$, on a $\mathbb{P}_x(\tau_{r+1} - \tau_r < \infty \mid \tau_r < \infty) = \mathbb{P}_x(T_y < \infty)$ et pour $r \geq 1$, on a $\mathbb{P}_x(\tau_{r+1} - \tau_r < \infty \mid \tau_r < \infty) = \mathbb{P}_y(T_y < \infty)$ par la propriété de Markov fort. Puisque $\mathbb{P}_x(\tau_r < \infty) = \mathbb{P}_x(N_y \geq r)$ on obtient
$$\mathbb{P}_x(N_y \geq r+1) = \mathbb{P}_x(N_y \geq r)\mathbb{P}_z(T_y < \infty)$$
et le résultat suit donc par récurrence. □

Dans le reste de cette section, on fixe x récurrent et on définit la suite des temps de visite en x :
$$\tau_0 = 0 \;\text{ et }\; \tau_{k+1} = \inf\{n > \tau_k : X_n = x\}.$$
En particulier, pour $x = y$ on obtient $\mathbb{P}_x(N_x \geq r) = \mathbb{P}_x(T_x < \infty)^r$ et donc on a la classification suivante :

- si x est récurrent, alors $\mathbb{P}_x(N_x = \infty) = \mathbb{P}_x(\forall k : \tau_k < \infty) = 1$ et $\mathbb{E}_x(N_x) = \infty$;
- si x est transitoire, alors $\mathbb{P}_x(N_x < \infty) = 1$ et $\mathbb{E}_x(N_x) < \infty$.

En particulier, pour une chaîne de Markov on a l'équivalence suivante, qui n'est pas vraie en général : $N_x < \infty \Leftrightarrow \mathbb{E}_x(N_x) < \infty$. Quand x est récurrent, tous les temps τ_k sont finis et on peut donc parler des cycles hors de x, i.e., les bouts de trajectoires entre deux τ_k consécutifs.

Théorème 4.9. *Si x est récurrent, alors $\mathbb{P}_x(\forall k \geq 0 : \tau_k < \infty) = 1$ et sous $\mathbb{P}_x$, les cycles*
$$(X_{\tau_k + n}, n = 0, \dots, \tau_{k+1} - \tau_k)$$
sont i.i.d. pour $k \geq 0$.

Démonstration. Récurrence, Markov fort. □

Corollaire 4.10. *Sous $\mathbb{P}_x$ avec x récurrent, les suites de variables aléatoires*
$$(\tau_{k+1} - \tau_k, k \geq 1) \;\text{ et }\; \left(\sum_{n=\tau_k}^{\tau_{k+1}-1} f(X_n), k \geq 1 \right)$$
sont i.i.d..

Corollaire 4.11. *Sous $\mathbb{P}_x$ avec x récurrent, $\tau_k/k \xrightarrow{\text{p.s.}} \mathbb{E}_x(T_x)$.*

Démonstration. Loi forte des grands nombres. □

4.2.2 Récurrence et transience sont des propriétés de classe

Corollaire 4.12. *Si y est accessible depuis x récurrent, alors x est accessible depuis y et $\mathbb{P}_x(N_y = \infty) = 1$.*

Démonstration. Soit $I_k = \mathbb{1}$ (y visité pendant le k-ième cycle), alors les (I_k) sont i.i.d. sous $\mathbb{P}_x$ avec $\mathbb{E}_x(I_k) = \mathbb{P}_x(T_y < T_x)$. Puisque y est accessible depuis x, il y a un chemin $x \to x_1 \to \cdots x_n \to y$ de x à y qui reste dans C, qui commence en x et qui ne repasse pas par x, et donc

$$\mathbb{P}_x(T_y < T_x) \geq p_{xx_1} \cdots p_{x_n y} > 0.$$

Le nombre de visites en y partant de x est donc infini, ce qui implique en particulier que partant de y, on peut revenir en x puisque x est lui aussi visité une infinité de fois. □

Théorème 4.13. *Si x est récurrent, alors tout élément de sa classe de communication est récurrent.*

En d'autres termes, la récurrence et la transience sont des propriétés de classe. Dans la suite on parlera donc de classe récurrente et de classe transitoire, ce qui constitue une autre classification des classes de communication.

4.2.3 Transience et récurrence vs. ouvert et fermé

On compare maintenant ces deux classifications.

Théorème 4.14. *Soit C une classe de communication C. Alors :*

- *Si C est ouverte, alors elle est transitoire ;*
- *Si C est fermée et finie, alors elle est récurrente ;*
- *Si C est fermée et infinie, alors elle peut être récurrente ou transitoire.*

On a le corollaire suivant, particulièrement important.

Théorème 4.15. *Si E est fini et P irréductible, alors tous les états sont récurrents.*

Démonstration du Théorème 4.14. Supposons x récurrent. Le Corollaire 4.12 implique que tout état accessible depuis x communique avec x : cela implique donc que la classe de x est fermée. Cela prouve donc récurrent $\Rightarrow$ C fermée, et par contraposée C ouverte $\Rightarrow$ x transitoire.

Supposons C fermée, si bien que l'on y reste pour toujours. Puisque C est finie, on passe donc un temps infini dans un ensemble fini : pour chaque trajectoire au moins un état est visité une infinité de fois, i.e., $\mathbb{P}_x(\exists Y : N_Y = \infty) = 1$, et donc il existe un $y \in C$ qui est visité infiniment souvent avec proba > 0 puisque

$$\mathbb{P}_x(\exists Y : N_Y = \infty) \leq \sum_{y \in C} \mathbb{P}_x(N_y = \infty).$$

Si y était transitoire, le Théorème 4.8 impliquerait que $\mathbb{P}_x(N_y = \infty) = 0$. Donc y est récurrent, et donc x aussi.

Enfin pour conclure la preuve il reste à exhiber un contre-exemple avec x transitoire alors que sa classe de communication est fermée. La marche aléatoire réfléchie en 0 fournit ce contre-exemple. □

`A FAIRE: Donner des exemples concrets`

Même si toute classe de communication ouverte est transitoire, il est très important de garder en tête qu'il peut y avoir deux explications pour cela, deux comportement très différents :

- soit la classe est transitoire parce qu'on en sort (c'est par exemple toujours le cas si elle est finie) ;
- soit on reste dans la classe mais on part à l'infini (ce qui n'est seulement possible si E est infini).

4.2.4 Critère de la matrice potentielle

Même dans le cas irréductible, déterminer si un état est transitoire ou récurrent est en général un problème difficile. L'étude des mesures invariantes dans le chapitre suivant est largement motivé par le fait de répondre à ce problème. Il y a néanmoins un critère simple qui permet de décider, appelé critère de la matrice potentielle.

Théorème 4.16. *x est récurrent si et seulement si*

$$\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}_x(X_n = x) = \sum_{n \geq 0} p_{xx}(n) = \infty.$$

Démonstration. On a

$$\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}_x(X_n = x) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}_x\big(\mathbb{1}\,(X_n = x)\big) = \mathbb{E}_x\left(\sum_{k \geq 0} \mathbb{1}\,(X_n = x)\right) = \mathbb{E}_x(1 + N_x)$$

et on peut donc appliquer le Théorème 4.8. □

EXEMPLE 4.17 Marches aléatoires : en 1D, on a

$$p_{xx}(n) = \mathbb{P}_0\,(X_n = 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \mathbb{P}\,(n/2 \text{ fois } +1, n/2 \text{ fois } -1) & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Et donc

$$p_{xx}(2n) = \frac{(2n)!}{n!^2}(p(1-p))^n \sim \frac{(2n/e)^{2n}\sqrt{4\pi n}}{(n/e)^{2n} 2\pi n}(p(1-p))^n = \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{n\pi}}.$$

La série diverge. En dimension 2, quitte à faire une rotation de 45 degrés on peut écrire

$$S(n) = \left(S^1(n), S^2(n)\right)$$

avec S^1, S^2 deux marches aléatoires indépendantes en dimension 1. Donc

$$\mathbb{P}\left(S_{2n} = (0,0)\right) = p_{00}(2n)^2$$

En 3D $\rightarrow$ transitoire ■

4.3 Exercices

4.3.1 Exercices théoriques

EXERCICE 4.1. Soit $C \subset E$ et $P_C = (p_{xy})_{x,y \in C}$ la restriction de P à C. Montrez que C est fermé si et seulement si P est une matrice stochastique.

EXERCICE 4.2. Soit (X_n, Y_n) une chaîne de Markov telle que Y_n est transitoire, i.e., quel que soit l'état initial (x_0, y_0) et l'état y considéré, Y_n ne visite presque sûrement qu'un nombre fini de fois y. Montrez que (X_n, Y_n) est transitoire.

EXERCICE 4.3. On considère une chaîne de Markov (Z_n) sur un espace produit $E \times F$ que l'on écrit $((X_n, Y_n), n \geq 1)$ avec $X_n \in E$ et $Y_n \in F$.
1. Montrez que si (Z_n) est irréductible, alors (X_n) l'est aussi, i.e., pour tout $x, x' \in E$ il existe $n \geq 0$ et $y \in F$ tels que $\mathbb{P}_{(x,y)}(X_n = x') > 0$.
2. Montrez que la réciproque n'est pas vraie, i.e., exhibez un cas où les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(i) pour tout $x, x' \in E$ il existe $n \geq 0$ et $y \in F$ tels que $\mathbb{P}_{(x,y)}(X_n = x') > 0$;
(ii) pour tout $y, y' \in E$ il existe $n \geq 0$ et $x \in F$ tels que $\mathbb{P}_{(x,y)}(Y_n = y') > 0$;

mais (Z_n) n'est pas irréductible. Vous pourrez pour cela considérer l'espace produit le plus simple possible, i.e., $E = F = \{0, 1\}$.

EXERCICE 4.4. 1. Soit v une mesure invariante possiblement nulle, i.e., $v^T P = v^T$, $v \geq 0$. Montrez que si $v(x) > 0$ et y est accessible depuis x, alors $v(y) > 0$.
2. Soit C une classe de communication. Déduisez de la question précédente que si $vP = v$ avec $v \geq 0$, alors :

- soit $v(x) = 0$ pour tout $x \in C$;
- soit $v(x) > 0$ pour tout $x \in C$.

On considère le graphe orienté obtenu de la manière suivante : les nœuds sont les classes de communication, et on met l'arête $C \rightarrow C'$ avec C et C' deux classes de communication distinctes si il existe $x \in C, y \in C'$ avec $p_{xy} > 0$.
3. Montrez que ce graphe ne contient pas de cycle.
4. Montrez qu'une classe est fermée si et seulement si elle n'a pas d'arête sortante dans ce graphe.
5. Montrez que si E est fini, alors presque sûrement, la chaîne de Markov finit dans une classe fermée.
6. Soit π une distribution stationnaire : montrez à l'aide des questions précédentes que $\pi(x) = 0$ si la classe de communication de x est ouverte.

4.3.2 Applications

5 — Mesures invariantes et distributions stationnaires

On étudie maintenant les mesures invariantes et distributions stationnaires introduites dans la Définition 1.16. On se concentre dans tout le chapitre sur le cas irréductible, le cas général est laissé en exercice (Exercice 5.4). Le Théorème 5.9 est notamment d'une importance capitale : il permet d'établir la récurrence par l'étude des mesures invariantes. En guise d'échauffement on traite d'abord le cas fini puis l'exemple sur un espace infini de la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$.

5.1 Le cas d'un espace d'états fini

Théorème 5.1. *Si (X_n) est irréductible sur E fini, alors (X_n) est récurrente et il existe une unique mesure invariante à une constante multiplicative près. En particulier, il existe une unique distribution stationnaire.*

Démonstration. $\boxed{\text{Existence}}$ On considère n'importe quelle mesure ν et $\nu_n^T = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \nu^T P^k$. Par compacité, on peut supposer $\nu_n(x) \to \pi(x)$. Par ailleurs,

$$\nu_n^T P = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \nu^T P^{k+1} = \nu_n^T + \frac{1}{n}\left(\nu^T P^{n+1} - \nu^T P\right)$$

et donc $\pi^T P = \pi^T$.

$\boxed{\text{Unicité}}$ Soit h vecteur propre à droite associé à 1 (on dit que h est harmonique). Soit x_0 avec $h(x) \geq h(x_0)$ pour tout x. Alors

$$0 = h(x_0) - h(x_0) = \sum_y p_{x_0 y}(h(y) - h(x_0))$$

donc $p_{x_0 y}(h(y) - h(x_0)) = 0$, donc $h(x) = h(x_0)$ pour tout x avec $p_{x_0 x} > 0$, et par récurrence et en utilisant l'irréductibilité, $h(x) = h(x_0)$ pour tout x. Donc la mutliplicité géométrique de 1 vaut 1, i.e., il y a unicité des vecteurs propres à droite à une constante multiplicative près. Puisque la multiplicité géométrique d'une valeur propre pour une matrice et sa transposée est la même, il y a aussi unicité (à une constante multiplicative près) des mesures invariantes. □

5.2 Le cas de la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

On considère donc la chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}$ de matrice de transition $p_{x,x+1} = 1 - p_{x-1,x} = p$ avec $p \in]0,1[$. Ses mesures invariantes ν satisfont

$$\nu(x) = p\nu(x+1) + q\nu(x-1), \; x \in \mathbb{Z}$$

et donc $\delta(x) = \nu(x) - \nu(x-1)$ satisfait

$$p\delta(x) = q\delta(x-1), \; x \in \mathbb{Z}$$

et donc $\delta(x) = \delta(0)\rho^x$, $x \in \mathbb{Z}$, et donc

$$\nu(x) = \nu(0) + \delta(0) \sum_{k=0}^{x} \rho^k.$$

Ainsi, ν est nécessairement de la forme :

$$\nu(x) = \begin{cases} a + b\rho^x, \; x \in \mathbb{Z} & \text{si } p \neq 1/2, \\ a + bx, \; x \in \mathbb{Z} & \text{si } p = 1/2. \end{cases}$$

Par ailleurs, si ν est de cette forme, alors on vérifie que $\nu^T = \nu^T P$. En outre, pour que ν soit une mesure invariante il faut que qu'elle soit positive. Cela impose $a, b \geq 0$ pour $p \neq 1/2$ et $a \geq 0, b = 0$ pour $p = 1/2$. En d'autres termes, ν est une mesure invariante si et seulement si il existe $a, b \geq 0$ tels que

$$\nu(x) = \begin{cases} a + b\rho^x, \; x \in \mathbb{Z} & \text{si } p \neq 1/2, \\ a, \; x \in \mathbb{Z} & \text{si } p = 1/2. \end{cases}$$

On remarque donc que dans le cas $p = 1/2$, il existe une unique mesure invariante à un facteur multiplicatif près. Dans le cas $p \neq 1/2$ ça n'est pas le cas. Comme on va le voir maintenant, cette caractérisation est générale : on va notamment montrer que si la chaîne de Markov est irréductible et récurrente, alors il existe une unique mesure invariante (à un facteur multiplicatif près).

Par ailleurs, on observe que dans les deux cas on a

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}} \nu(x) = \infty$$

ce qui proscrit l'existence de distributions stationnaires : en effet, si π était une distribution stationnaire, alors elle serait de la forme précédente (puisqu'elle serait en particulier une mesure invariante) mais alors on aurait $\sum_x \pi(x) = \infty$ alors que pour une distribution stationnaire, on a $\sum_x \pi(x) < \infty$. On va voir maintenant que l'existence ou non de distributions stationnaires est liée à la moyenne des temps de retour et à une propriété appelée récurrence positive.

5.3 Etude des mesures invariantes

Dans cette section on traite le cas irréductible : le cas général est laissé en exercice (cf. Exercice 5.4). Pour $x \in E$ on considère ν_x la mesure

$$\nu_x(y) = \mathbb{E}_x \left(\sum_{k=0}^{T_x - 1} \mathbb{1}(X_k = y) \right) \in [0, \infty], \; y \in E.$$

Lemme 5.2. *Pour $x, y \in E$ on a $v_x(y) \in]0, \infty[$.*

Démonstration. Pour $y = x$ on a $v_x(x) = 1$. On considère $y \neq x$ et $\tilde{N}$ le nombre de visites en y entre 0 et $T_x - 1$, si bien que $v_x(y) = \mathbb{E}_x(\tilde{N})$. Puisque P est irréductible, on peut visiter y en partant de x. Donc $\mathbb{P}_x\left(\tilde{N} \geq 1\right) > 0$ et donc $v_x(y) > 0$. Pour $v_x(y) < \infty$, on peut montrer comme pour le Théorème 4.8 que pour $r \geq 0$ on a

$$\mathbb{P}_x\left(\tilde{N} \geq r+1\right) = \mathbb{P}_x(T_y < T_x)\mathbb{P}_y(T_y < T_x)^r$$

et donc

$$\mathbb{E}_x(\tilde{N}) = \sum_{r \geq 0} \mathbb{P}_x(\tilde{N} > r) = \frac{\mathbb{P}_x(T_y < T_y)}{\mathbb{P}_y(T_x < T_y)}.$$

. Puisque P est irréductible, on a $\mathbb{P}_y(T_x < T_y) > 0$ et donc $\mathbb{E}_x(\tilde{N}) < \infty$ au vu de la dernière égalité. □

Lemme 5.3. *Pour $x, y \in E$ on a*

$$(v_x^T P)_y = \mathbb{E}_x\left(\sum_{n=1}^{T_x} \mathbb{1}\,(X_n = y)\right).$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
(v_x^T P)_y &= \sum_{y'} v_x(y') p_{y'y} \\
&= \sum_{y'} \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}_x(X_n = y', T_x \geq n+1) p_{y'y} \\
&= \sum_{n \geq 0} \sum_{y'} \mathbb{P}_x(X_n = y', T_x \geq n+1) p_{y'y} \\
&= \sum_{n \geq 0} \sum_{y' \neq x} \mathbb{P}_x(X_n = y', T_x \geq n+1) p_{y'y}.
\end{aligned}$$

Pour $y' \neq x$ on a

$$\mathbb{P}_x(X_n = y', T_x \geq n+1) = \mathbb{P}_x(X_1, \ldots, X_{n-1} \neq x, X_n = y')$$

et donc la propriété de Markov donne

$$\mathbb{P}_x(X_n = y', T_x \geq n+1) p_{y'y} = \mathbb{P}_x(X_1, \ldots, X_{n-1} \neq x, X_n = y', X_{n+1} = y)$$

d'où

$$(v_x^T P)_y = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}_x(T_x \geq n+1, X_{n+1} = y) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}_x(T_x \geq n, X_n = y)$$

ce qui prouve le résultat. □

Lemme 5.4. *Si $\nu P = \nu$, alors pour tout $x, y \in E$ et $n \geq 0$ on a*

$$\nu(y) = \nu(x) \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}_x(X_{k+1} = y, T_x \geq k+1) + \mathbb{P}_\nu(X_{n+1} = y, T_x \geq n+1) \tag{5.1}$$

avec la convention $\sum_0^{-1} = 0$. En particulier, si ν est une mesure invariante alors $\nu \geq \nu(x)\nu_x$.

Démonstration. L'implication est vraie, puisque

$$\nu_x(y) = \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}_x(X_{k+1} = y, T_x \geq k+1).$$

Par récurrence, pour montrer (5.1) il suffit de montrer que

$$\mathbb{P}_\nu\left(X_{n+1} = y, T_x \geq n+1\right) = \nu(x)\mathbb{P}_x\left(X_{n+1} = y, T_x \geq n+1\right) + \mathbb{P}_\nu\left(X_{n+2} = y, T_x \geq n+2\right)$$

et puisque

$$\mathbb{P}_\nu\left(X_{n+1} = y, T_x \geq n+1\right) = \nu(x)\mathbb{P}_x\left(X_{n+1} = y, T_x \geq n+1\right) + \sum_{y'\neq x} \nu(y')\mathbb{P}_{y'}\left(X_{n+1} = y, T_x \geq n+1\right)$$

il suffit de montrer que

$$\sum_{y'\neq x} \nu(y')\mathbb{P}_{y'}\left(X_{n+1} = y, T_x \geq n+1\right) = \mathbb{P}_\nu\left(X_{n+2} = y, T_x \geq n+2\right).$$

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{y'\neq x} \nu(y')\mathbb{P}_{y'}\left(X_1, \ldots, X_n \neq x, X_{n+1} = y\right) &= \sum_{y'\neq x} \left(\sum_{y''} \nu(y'')p_{y''y'}\right) \mathbb{P}_{y'}\left(X_1, \ldots, X_n \neq x, X_{n+1} = y\right) \\
&= \sum_{y''} \nu(y'') \sum_{y'\neq x} p_{y''y'}\mathbb{P}_{y'}\left(X_1, \ldots, X_n \neq x, X_{n+1} = y\right) \\
&= \sum_{y''} \nu(y'')\mathbb{P}_{y''}\left(X_1, \ldots, X_{n+1} \neq x, X_{n+2} = y\right) \\
&= \mathbb{P}_\nu\left(X_{n+2} = y, T_x \geq n+2\right)
\end{aligned}$$

ce qui prouve que le résultat. □

Théorème 5.5. *Si P est irréductible et récurrente, alors ν_x est l'unique mesure invariante avec $\nu_x(x) = 1$. En particulier, toute autre mesure invariante lui est proportionnelle.*

Démonstration. Le fait que ν_x est une mesure invariante vient du Lemme et du fait que P est récurrente, et donc $\sum_{k=0}^{T_x-1} \mathbb{1}\left(X_k = y\right) = \sum_{k=1}^{T_x} \mathbb{1}\left(X_k = y\right)$ (c'est toujours vrai pour $y \neq x$, et pour $y = x$ ça n'est toujours vrai que sous l'hypothèse de récurrence car $\sum_{k=1}^{T_x} \mathbb{1}\left(X_k = y\right) =$

$\mathbb{1}(T_x < \infty)$). Il reste à prouver l'unicité. Soit v invariante avec $v(x) = 1$. D'après le Lemme 5.4, on a donc $v \geq v_x$ et puisque v et v_x sont invariantes, on a

$$0 = v(x) - v_x(x) = (v^T P)_x - (v_x^T P)_x = \sum_y (v(y) - v_x(y)) p_{yx}.$$

Puisque $v \geq v_x$, on a donc une somme de termes ≥ 0 qui est nulle. Donc $v(y) = v_x(y)$ pour y avec $p_{yx} > 0$ puis par récurrence et en utilisant l'irréductibilité, $v(y) = v_x(y)$ pour tout y. □

ATTENTION ! La réciproque n'est pas vraie, i.e., comme le montre l'exemple de la marche aléatoire il peut exister des mesures invariantes sans que P soit récurrente, et que même elles ne sont pas nécessairement uniques à une constante multiplicative près. Par contre, on va voir maintenant qu'on a une caractérisation de la récurrence positive via l'existence de distributions stationnaires.

5.4 Etude des distributions stationnaires

Supposons P irréductible et récurrente. D'après le Théorème 5.5, v_x est l'unique mesure invariante à une constante multiplicative près : ainsi, P admet une unique mesure stationnaire si et seulement si $\sum_y v_x(y) < \infty$. Or, comme

$$\sum_y v_x(y) = \sum_y \mathbb{E}_x \left(\sum_{n=0}^{T_x - 1} \mathbb{1}(X_n = y) \right) = \mathbb{E}_x \left(\sum_{n=0}^{T_x - 1} \sum_y \mathbb{1}(X_n = y) \right) = \mathbb{E}_x(T_x)$$

l'unique distribution stationnaire est donc $v_x / \mathbb{E}_x(T_x)$, i.e.,

$$\pi(y) = \frac{v_x(y)}{\mathbb{E}_x(T_x)}, \; y \in E.$$

On a l'impression que cela dépend du point de référence x choisi mais par unicité ça n'est en fait pas le cas. Pour calculer $\pi(y)$ on peut donc aussi bien prendre y comme point de référence, ce qui donne le résultat suivant.

Corollaire 5.6. *Si P est irréductible et récurrente, alors P admet une distribution stationnaire si et seulement si il existe x tel que $\mathbb{E}_x(T_x) < \infty$. Dans ce cas, $\mathbb{E}_x(T_x) < \infty$ pour tous les $x \in E$ et la distribution stationnaire est unique et donnée par*

$$\pi(x) = \frac{1}{\mathbb{E}_x(T_x)}.$$

Ce résultat motive la définition suivante.

Définition 5.7. Un état récurrent $x \in E$ est dit :

- récurrent positif si $\mathbb{E}_x(T_x) < \infty$;
- récurrent nul sinon.

Théorème 5.8. *Toute chaîne de Markov irréductible sur un espace d'états fini est récurrente positive.*

Démonstration. Théorème 5.1 + Corollaire 5.6. □

Le résultat suivant est essentiel : il permet de réduire l'étude de la récurrence positive à l'étude des mesures invariantes

Théorème 5.9. *Si P est irréductible alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *$\exists x$ récurrent positif ;*
2. *il existe une distribution stationnaire.*

Dans ce cas, tous les états sont récurrents positifs et la distribution stationnaire est unique et donnée par

$$\pi(x) = \frac{1}{\mathbb{E}_x(T_x)}, \ x \in E.$$

Démonstration. $\boxed{1 \Rightarrow 2}$ C'est le Corollaire 5.6.

$\boxed{2 \Rightarrow 1}$ Comme $\sum_x \pi(x) = 1$, il existe x avec $\pi(x) > 0$. On montre que cela implique que x est récurrent. D'un côté, on a

$$\mathbb{E}_{x_0}(N_x) = \sum_{r \geq 0} \mathbb{P}_{x_0}(N_x > r) = \frac{\mathbb{P}_{x_0}(T_x < \infty)}{\mathbb{P}_x(T_x = \infty)}$$

et donc

$$\mathbb{E}_\pi(N_x) = \frac{1}{\mathbb{P}_x(T_x = \infty)} \sum_{x_0} \pi(x_0) \mathbb{P}_{x_0}(T_x < \infty).$$

D'un autre côté,

$$\mathbb{E}_{x_0}(N_x) = \mathbb{E}_{x_0}\left(\sum_{n \geq 1} \mathbb{1}(X_n = x) \right) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}_{x_0}(X_n = x)$$

et donc par Fubini,

$$\mathbb{E}_\pi(N_x) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}_\pi(X_n = x) = \sum_{n \geq 1} \pi(x) = \infty.$$

On a donc prouvé

$$\frac{1}{\mathbb{P}_x(T_x = \infty)} \sum_{x_0} \pi(x_0) \mathbb{P}_{x_0}(T_x < \infty) = \infty$$

et puisque $\sum_{x_0} \pi(x_0) \mathbb{P}_{x_0}(T_x < \infty) \leq 1$ cela implique que $\mathbb{P}_x(T_x = \infty) = 0$. Donc x est récurrent, donc tous les états le sont et on peut appliquer le Corollaire 5.6. □

Le résultat suivant donne une interprétation intuitive de ce résultat, et justifie bien que $1/\mathbb{E}_x(T_x)$ est le temps moyen passé en x.

Théorème 5.10. *Si x^* est récurrent, alors sous $\mathbb{P}_{x^*}$ on a $\frac{N_n}{n} \xrightarrow{\text{p.s.}} \frac{1}{\mathbb{E}_{x^*}(T_{x^*})}$.*

Démonstration. Par définition, $N_n^x = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}(X_k = x)$ est le nombre de cycles issus de x qui ont débuté avant n, et donc

$$\tau_{N_{x^*}^n} \leq n \leq \tau_{N_{x^*}^n+1}$$

puis en divisant $N_{x^*}^n$

$$\frac{\tau_{N_{x^*}^n}}{N_{x^*}^n} \leq \frac{n}{N_{x^*}^n} \leq \frac{\tau_{N_{x^*}^n+1}}{N_{x^*}^n} = \frac{\tau_{N_{x^*}^n+1}}{N_{x^*}^n+1}\frac{N_{x^*}^n+1}{N_{x^*}^n}.$$

Puisque $\tau_n/n \xrightarrow{\text{p.s.}} \mathbb{E}_{x^*}(T_{x^*})$ et $N_{x^*}^n \xrightarrow{\text{p.s.}} \infty$ (puisque x^* est récurrent) on obtient bien le résultat par le théorème des gendarmes. □

REMARQUE 5.11 Dans l'argument ci-dessus, on a invoqué la loi forte des grands nombres pour $\tau_n/n \to \mathbb{E}_x(T_x)$: néanmoins, si la récurrence garantit que T_x est presque sûrement, son espérance en revanche peut être infinie (cf. la distinction récurrence nulle/récurrence positive de la Définition 5.7). En cours, celle-ci ne vous a été présentée que dans le cas de variables intégrables. Néanmoins, elle reste vraie plus généralement si les variables sont positive, i.e., on a le résultat suivant : Si les (Z_k) sont i.i.d. avec $Z_1 \geq 0$, alors $(Z_1 + \cdots + Z_n)/n \to \mathbb{E}(Z_1)$, même si $\mathbb{E}(Z_1) = \infty$. ■

Théorème 5.12 (Formule du cycle)**.** *Soit P irréductible et récurrente positive avec unique distribution stationnaire π. Alors pour tout $x \in E$ et toute fonction $f \geq 0$ on a*

$$\pi(f) := \sum_y f(y)\pi(y) = \frac{1}{\mathbb{E}_x(T_x)}\mathbb{E}_x\left(\sum_{n=1}^{T_x} f(X_n)\right).$$

Démonstration. On a vu dans les preuves précédentes que $v_x = c\pi$ avec $c = \mathbb{E}_x(T_x)$, et donc

$$\pi(f) = \frac{1}{\mathbb{E}_x(T_x)}\sum_y f(y)\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{T_x} \mathbb{1}(X_n = y)\right) = \frac{1}{\mathbb{E}_x(T_x)}\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{T_x}\sum_y f(y)\mathbb{1}(X_n = y)\right).$$

□

5.5 Fonctions de Lyapounov et critère de Foster

Le critère suivant est un des plus utiles pour prouver sur des exemples concrets qu'une chaîne de Markov est récurrente positive.

Théorème 5.13 (Critère de Foster)**.** *On suppose que (X_n) est irréductible. S'il existe $V : E \to \mathbb{R}_+$, un ensemble fini non vide F et $\varepsilon > 0$ tels que :*

1. $\mathbb{E}_x(V(X_1)) < \infty$ *pour* $x \in F$ *;*
2. $\mathbb{E}_x(V(X_1) - V(x)) \leq -\varepsilon$ *pour* $x \notin F$ *;*

alors la chaîne est positive récurrente, et en outre $\mathbb{E}_x(T_F) \leq \frac{V(x)}{\varepsilon}$ pour tout $x \notin F$ avec $T_F = \inf\{n > 0 : X_n \in F\}$.

Lemme 5.14. *Soit $F \subset E$ un ensemble fini non vide et $T_F = \inf\{n > 0 : X_n \in F\}$. Si (X_n) est irréductible et $\mathbb{E}_x(T_F) < \infty$ pour tout x alors X est récurrente positive.*

Démonstration. Exercice 5.2. □

Démonstration du Théorème 5.13. Soit $Y_n = V(X_n)\mathbb{1}(n < T_F)$: alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_{n+1} \mid X_0^n) &= \mathbb{E}(V(X_{n+1})\mathbb{1}(n+1 < T_F) \mid X_0^n)\\ &\leq \mathbb{E}(V(X_{n+1})\mathbb{1}(n < T_F) \mid X_0^n)\\ &= \mathbb{1}(n < T_F)\,\mathbb{E}(V(X_{n+1}) \mid X_0^n)\\ &\leq (-\varepsilon + V(X_n))\mathbb{1}(n < T_F)\\ &\leq Y_n - \varepsilon\mathbb{1}(n < T_F)\end{aligned}$$

et donc

$$\mathbb{E}_x(Y_{n+1}) \leq \mathbb{E}_x(Y_n) - \varepsilon\mathbb{P}_x(n < T_F)$$

et donc

$$\varepsilon\mathbb{P}_x(n < T_F) \leq \mathbb{E}_x(Y_n) - \mathbb{E}_x(Y_{n+1})$$

et donc

$$\mathbb{E}_x(T_F) \leq \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}_x(Y_0) = \frac{1}{\varepsilon}V(x)\mathbb{1}(x \notin F).$$

On obtient donc $\mathbb{E}_x(T_F) < \infty$ pour tout $x \notin F$, puis par analyse en première étape, pour $y \in F$,

$$\mathbb{E}_y(T_F) = 1 + \sum_{x \notin F} p_{yx}\mathbb{E}_x(T_F) \leq 1 + \sum_{x \notin F} p_{yx}\frac{V(x)}{\varepsilon} = 1 + \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}_y(V(X_1))$$

ce qui montre que $\mathbb{E}_x(T_F) < \infty$ pour tout $x \in F$ et on conclut donc à l'aide du lemme précédent. □

5.6 Exercices

5.6.1 Exercices théoriques

EXERCICE 5.1. Montrez que la récurrence positive est une propriété de classe, i.e., que si x est récurrent positif, alors tout élément de sa classe de communication l'est aussi.

EXERCICE 5.2. Soit (X_n) une chaîne de Markov irréductible, $F \subset E$ un ensemble non vide et $T_F = \inf\{n > 0 : X_n \in F\}$. On définit τ_k les temps de retour en F : $\tau_0 = 0$ et

$$\tau_0 = 0 \text{ et } \tau_{k+1} = \inf\{n > \tau_k : X_n \in F\},\ k \geq 0.$$

avec la convention $\inf\emptyset = \infty$ et $\tau_{k+1} = \infty$ si $\tau_k = \infty$.

1. Montrez que $\mathbb{P}_x(\forall k : \tau_k < \infty) = 1$.

Dans la suite on peut ainsi définir $Y_n = X_{\tau_n}$.

2. Montrez que pour tout $k \geq 0$, τ_k est un temps d'arrêt.

3. Montrez que (Y_n) est une chaîne de Markov : décrivez sont espace d'état et sa matrice de transition en fonction de $X(T_F)$.

4. Montrez que (Y_n) est récurrente et déduisez-en que (X_n) aussi.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que F est fini et on montre qu'alors (X_n) est récurrente positive. On fixe $x \in F$ et on définit $\tilde{T} = \inf\{n > 0 : Y_n = x\}$.

5. Montrez que (Y_n) est récurrente positive.

6. Montrez que $T_x = \tau_{\tilde{T}}$.

7. La suite (τ_n) est-elle indépendante de $\tilde{T}$?

`A FAIRE: Correction à vérifier, notamment la fonction` φ

8. Montrez que pour tout $k \geq 0$, on peut écrire $\tau_{k+1} - \tau_k = \phi(X^{\infty}_{\tau_k})$ et $\mathbb{1}\left(k < \tilde{T}\right) = \varphi(X_0^{\tau_k})$ pour des fonctions ϕ et φ que vous expliciterez.

`A FAIRE: Finir de rédiger la preuve`

9. Montrez que

$$\mathbb{E}_x(T_x) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}_x\left(\tau_{n+1} - \tau_n ; n < \tilde{T}\right)$$

et déduisez-en que

$$\mathbb{E}_x(T_x) \leq \mathbb{E}_x(\tilde{T}) \max_{y \in F} \mathbb{E}_y(T_F).$$

10. Déduisez-en que (X_n) est récurrente positive.

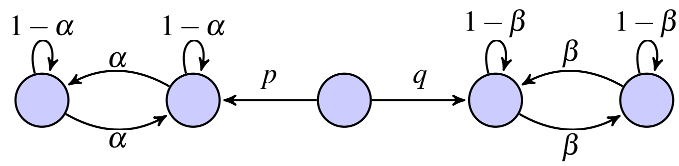
EXERCICE 5.3. Le but de cet exercice est de montrer que la récurrence positive n'est pas affectée si l'on change un nombre fini de probabilités de transition. On considère dans tout l'exercice (X_n) une chaîne de Markov irréductible et récurrente positive de matrice de transition P', et (X'_n) la chaîne de Markov de matrice de transition P'. On suppose qu'il existe n couples (x_i, y_i) avec :

- $p_{x_i,y_i}, p'_{x_i,y_i} \in]0,1[$;
- $p'_{x,y} = p_{x,y}$ si $(x,y) \notin \{(x_i,y_i) : i = 1,\dots,n\}$.

1. Soit $F \subset E$ fini et $T_F = \inf\{n \geq 0 : X'_n \in F\}$. Montrez que si $\mathbb{E}_x(T_F) < \infty$, alors (X'_n) est positive récurrente.

2. Déduisez-en que (X'_n) est récurrente positive.

EXERCICE 5.4. 1. On considère la chaîne de Markov suivante.



Montrez que toute distribution stationnaire π peut s'écrire sous la forme $\pi = a\pi_1 + b\pi_2$ avec $a + b = 1$, $a, b \geq 0$ et π_1 et π_2 deux mesures que vous identifierez.

Dans le reste de l'exercice on considère le cas général. Vous pourrez utiliser le résultat de l'exercice précédent.

2. Montrez que l'on peut décomposer l'espace d'état de la manière suivante :

$$E = \bigcup_i T_i \cup \bigcup_i R_i^{>0} \cup \bigcup_i R_i^{=0}$$

où les ensembles sont disjoints, et :

- chaque T_i est une classe de communication transitoire ;
- chaque $R_i^{>0}$ est une classe de communication récurrente positive ;
- chaque $R_i^{=0}$ est une classe de communication récurrente nulle.

3. Montrez que P admet une distribution stationnaire si et seulement il existe au moins une classe récurrente positive.

4. On suppose que P admet une distribution stationnaire. Montrez que :

(i) pour chaque classe de communication C récurrente positive, il existe une unique distribution stationnaire π_C supportée par C, i.e., telle que $\pi_C(x) > 0 \Leftrightarrow x \in C$: cette distribution est donnée par $\pi_C(x) = \frac{\mathbb{1}(x \in C)}{\mathbb{E}_x(T_x)}$;

(ii) toute distribution stationnaire π est une combinaison linéaire stochastique (i.e., les coefficients sont ≥ 0 et se somment à 1) des $\pi_{R_i^{>0}}$.

5. Soit π une distribution stationnaire : que vaut $\pi(x)$ si x est transitoire ou récurrent nul ?

5.6.2 Applications

EXERCICE 5.5. On considère un graphe non-orienté $G = (E, V)$ et sans boucle : E est l'ensemble des nœuds (un ensemble fini) et $V \subset E \times E$ l'ensemble des arêtes, tel que $(x, y) \in V \Leftrightarrow (y, x) \in V$ et $(x, x) \notin V$. On suppose par ailleurs que le graphe est connecté, i.e., quels que soient $x \neq y \in E$ on peut aller de x à y en empruntant des arêtes de G, i.e., il existe $n \geq 1$ et $x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y$ tels que $(x_i, x_{i+1}) \in V$ pour tout $i = 0, \ldots, n-1$.

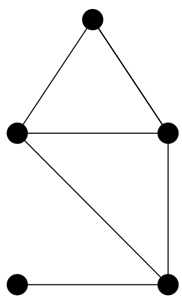


FIGURE 5.1 – Exemple de graphe non-orienté avec 5 nœuds et 6 arêtes : les points représentent les nœuds et les lignes les arêtes. La chaîne de Markov représente un marcheur sur le graphe, qui va de nœud en nœud en allant à chaque fois à un voisin du nœud courant choisi uniformément au hasard.

On considère la chaîne de Markov X sur E qui à chaque instant choisit un voisin uniformément au hasard et y va :

$$p_{xy} = \frac{\mathbb{1}((x, y) \in V)}{d_x} \text{ où } d_x \text{ est le degré de } x : \quad d_x = \sum_{y \in E} \mathbb{1}((x, y) \in V).$$

1. Montrez que la chaîne de Markov est irréductible et que tous les états sont récurrents.
2. Montrez que $\pi(x) \propto d_x$ est l'unique distribution stationnaire.
3. On considère un cavalier seul sur un échiquier et qui à chaque instant bouge en choisissant un de ses mouvements autorisé (un pas dans une direction et deux dans l'autre) uniformément

au hasard. Si le cavalier commence dans un coin de l'échiquier, calculez le nombre moyen de coups qu'il faut pour qu'il revienne à sa position de départ.

4. On ne suppose plus maintenant que G est connecté. Montrez que pour chaque composante connexe C du graphe, il existe une unique distribution invariante π_C dont le support est C, et montrez que toute distribution stationnaire est combinaison linéaire des π_C.

6 — Théorème ergodique et théorème central limite

6.1 Théorème ergodique

Théorème 6.1 (Théorème ergodique)**.** *Soit P une matrice de transition irréductible et récurrente positive, π son unique distribution stationnaire et $f : E \to \mathbb{R}$. Si $\sum_x |f(x)|\pi(x) < \infty$, alors pour toute distribution initiale μ on a*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k) \xrightarrow{\text{p.s.}} \mathbb{E}_\pi(f(X_0)) = \pi(f) = \sum_x f(x)\pi(x).$$

Démonstration. En écrivant

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k) = \sum_x f(x)\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}\,(X_k = x) = \sum_x f(x)\frac{N_x^n}{n}$$

et en utilisant le fait que $\frac{N_x^n}{n} \to \frac{1}{\mathbb{E}_x(T_x)}$ par le Théorème 5.10 et que $1/\mathbb{E}_x(T_x) = \pi(x)$, l'intuition est claire. Pour la preuve formelle, on suppose sans perte de généralité que $f \geq 0$ et on utilise la décomposition en cycles. Soit (τ_k) les instants de visite successifs de x fixé et

$$U_k = \sum_{i=\tau_k}^{\tau_{k+1}-1} f(X_i).$$

Alors les $(U_k, k \geq 2)$ sont i.i.d. par Markov fort (cf. Corollaire 4.10), et

$$\frac{N_x^n}{n}\frac{1}{N_x^n}\sum_{i=1}^{N_x^n} U_i \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k) \leq \frac{N_x^n+1}{n}\frac{1}{N_x^n+1}\sum_{i=1}^{N_x^n+1} U_i$$

avec N_x^n le nombre de visites en x entre 0 et n. On a vu que $N_x^n/n \xrightarrow{\text{p.s.}} 1/\mathbb{E}_x(T_x)$ et donc la loi forte des grands nombres donne

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k) \xrightarrow{\text{p.s.}} \frac{1}{\mathbb{E}_x(T_x)}\mathbb{E}_x(U_1) = \frac{1}{\mathbb{E}_x(T_x)}\mathbb{E}_x\left(\sum_{i=0}^{T_x-1} f(X_i)\right)$$

qui est bien égal à $\pi(f)$ par la formule du cycle. $\square$

6.2 Théorème central limite

Dans toute cette partie N désigne une variable aléatoire qui suit une loi normale standard.

Théorème 6.2 (Théorème central limite pour les chaînes de Markov)**.** *On suppose que P est irréductible et positive récurrente et on note π son unique distribution invariante. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction avec $\pi(f) = 0$. Alors*

$$\pi(f^2) + 2\sum_{n\geq 1} \mathbb{E}_\pi(f(X_n)f(X_0)) \in [0,\infty],$$

si bien que l'on peut définir

$$\sigma^2 = \pi(f^2) + 2\sum_{n\geq 1} \mathbb{E}_\pi(f(X_n)f(X_0)) \in [0,\infty].$$

Si en outre $\sigma^2 < \infty$, alors pour toute distribution initiale μ on a

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} f(X_k) \xrightarrow{\mathrm{L}} \sigma N.$$

REMARQUE 6.3 La condition $\sigma^2 < \infty$ est intimement lié à la vitesse de convergence de $f(X_n)$: il faut que la série $\mathbb{V}\mathrm{ar}_\pi(f(X_n), f(X_0))$ converge, i.e., il faut "rapidement" oublier le passé. ■

REMARQUE 6.4 On retrouve le TCL classique lorsque les (X_n) sont i.i.d., puisque dans ce cas $\sigma^2 = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$ et $\mathbb{E}_\pi(f(X_n)f(X_0)) = 0$ pour $n \geq 1$. ■

La preuve du Théorème 6.2 repose sur le résultat suivant, sur lequel on reviendra lorsque l'on abordera les martingales.

Proposition 6.5 (Généralisation du Théorème Central Limite)**.** *Soit (Z_k) des variables i.i.d. centrées avec $\sigma^2 = \mathbb{E}(Z_k^2) \in]0,\infty[$ et (N_n) une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Si les (N_n) satisfont une loi faible des grands nombres, i.e.,*

$$\frac{N_n}{n} \xrightarrow{\mathrm{L}} a,$$

alors

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{N_n} Z_k \xrightarrow{\mathrm{L}} \sqrt{a}\sigma N.$$

Démonstration du Théorème 6.2. On a

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} f(X_k) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{N_n^x} U_k + \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=\tau_{N_n^x}}^{n} f(X_k).$$

Le second terme est
$$\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=\tau_{N_n^x}}^{n} f(X_k)\right| \le \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=\tau_{N_n^x}}^{\tau_{N_n^x+1}-1} |f(X_k)|$$

qui tend vers 0 en loi. Le théorème ergodique donne $N_x^n/n \xrightarrow{\text{p.s.}} 1/\mathbb{E}_x(T_x) = \pi(x)$ et puisque les U_k sont i.i.d. et centrées la Proposition 6.5 donne

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k) - \pi(f)\right) \xrightarrow{\text{L}} \sigma N \ \text{ avec } \ \sigma^2 = \frac{1}{\mathbb{E}_x(T_x)}\mathbb{V}\mathrm{ar}_x(U_1)$$

et il reste donc à prouver que

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}_x(U_1) = \mathbb{E}_x(T_x)\pi(f^2) + 2\mathbb{E}_x(T_x)\sum_{n\ge 1}\mathbb{E}_\pi(f(X_n)f(X_0)).$$

On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\mathrm{ar}_x(U_1) &= \mathbb{V}\mathrm{ar}_x\left(\sum_{n=1}^{T_x} f(X_n)\right)\\
&= \sum_{m,n\ge 1}\mathbb{E}_x\left(f(X_n)f(X_m); m,n \le T_x\right)\\
&= \sum_{n\ge 1}\mathbb{E}_x\left(f(X_n)^2; n \le T_x\right) + 2\sum_{m,n\ge 1}\mathbb{E}_x\left(f(X_m)f(X_{m+n}); m+n \le T_x\right).
\end{aligned}$$

Le premier terme vaut $\mathbb{E}_x(T_x)\pi(f^2)$ et donc le résultat sera prouvé si et seulement si

$$\mathbb{E}_x(T_x)\sum_{n\ge 1}\mathbb{E}_\pi(f(X_n)f(X_0)) = \sum_{m,n\ge 1}\mathbb{E}_x\left(f(X_m)f(X_{m+n}); m+n \le T_x\right). \tag{6.1}$$

Pour le membre de gauche, on a

$$\mathbb{E}_\pi(f(X_n)f(X_0)) = \sum_y \pi(y)f(y)\mathbb{E}_y(f(X_n)) = \pi(h_n)$$

avec $h_n(y) = f(y)\mathbb{E}_y(f(X_n))$, et donc

$$\mathbb{E}_x(T_x)\mathbb{E}_\pi(f(X_n)f(X_0)) = \mathbb{E}_x\left(\sum_{i=1}^{T_x} h_n(X_i)\right) = \sum_{i\ge 1}\mathbb{E}_x\left(h_n(X_i); i \le T_x\right)$$

On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x[f(X_i)f(X_{i+n}); i \le T_x] &= \mathbb{E}_x[f(X_i)f(X_{i+n}); X_0,\cdots,X_{i-1} \ne x]\\
&= \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_x(f(X_i)f(X_{i+n})\mathbb{1}(X_0,\ldots,X_{i-1} \ne x) \mid X_0^i)]\\
&= \mathbb{E}_x[f(X_i)\mathbb{E}_x(f(X_{i+n}) \mid X_0^i); X_0,\ldots,X_{i-1} \ne x]\\
&= \mathbb{E}_x[h(X_i); X_0,\ldots,X_{i-1} \ne x]
\end{aligned}$$

ce qui montre que
$$\mathbb{E}_x[f(X_i)f(X_{i+n}); i \le T_x] = \mathbb{E}_x[h(X_i); i \le T_x],$$

et donc
$$\mathbb{E}_x(T_x)\mathbb{E}_\pi(f(X_n)f(X_0)) = \sum_{i\geq 1} \mathbb{E}_x\left(f(X_i)f(X_{i+n}); i \leq T_x\right).$$
Donc le membre de gauche de (6.1) est donné par
$$\mathbb{E}_x(T_x)\sum_{n\geq 1}\mathbb{E}_\pi(f(X_n)f(X_0)) = \sum_{i,n\geq 1} \mathbb{E}_x\left(f(X_i)f(X_{i+n}); i \leq T_x\right)$$
et donc en soustrayant les deux membres on voit que pour prouver (6.1) il faut prouver que
$$\sum_{i,n\geq 1} \mathbb{E}_x\left(f(X_i)f(X_{i+n}); i \leq T_x < i+n\right) = \pi(f)$$
puisque par hypothèse on a $\pi(f) = 0$. Pour $i \leq t < i+n$ on a
$$\mathbb{E}_x\left(f(X_i)f(X_{i+n}); T_x = t\right) = \mathbb{E}_x\left(f(X_i); T_x = t\right)\mathbb{E}_x\left(f(X_{i+n-t})\right)$$
et donc
$$\begin{aligned}\sum_{i,n\geq 1} \mathbb{E}_x\left(f(X_i)f(X_{i+n}); i \leq T_x < i+n\right) &= \sum_{i,n,t\geq 1} \mathbb{1}\left(i \leq t < i+n\right)\mathbb{E}_x\left(f(X_i); T_x = t\right)\mathbb{E}_x\left(f(X_{i+n-t})\right)\\ &= \sum_{i,m,t\geq 1} \mathbb{1}\left(i \leq t\right)\mathbb{E}_x\left(f(X_i); T_x = t\right)\mathbb{E}_x\left(f(X_m)\right)\\ &= \sum_{m\geq 1}\mathbb{E}_x\left(\sum_{i=1}^{T_x} f(X_i)\right)\mathbb{E}_x\left(f(X_m)\right) = 0.\end{aligned}$$
Le résultat est prouvé. □

6.3 Exercices

6.3.1 Exercices théoriques

EXERCICE 6.1. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{R}$.
1. On suppose que X_1 est intégrable. Peut-on appliquer la loi des grands nombres à la suite
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k X_{k+1}?$$
Montrez que cette suite converge presque sûrement vers $\mathbb{E}(X_1)^2$. Vous pourrez pour cela d'abord considérer le cas où les (X_k) prennent valeurs dans $E \subset \mathbb{R}$ dénombrable, puis le cas général.
2. On suppose que $\mathbb{E}(X_1) = 0$ et $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty$ est intégrable. Peut-on appliquer le théorème central limite à la suite
$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} X_k X_{k+1}?$$
Montrez que cette suite converge en loi vers une variable aléatoire que vous expliciterez.
3. Sous quelles hypothèses peut-on généraliser les résultats ci-dessous au cas où (X_n) est une chaîne de Markov ?

6.3.2 Applications

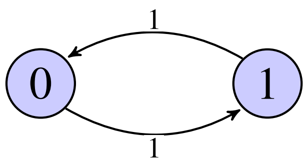
7 — Convergence à l'équilibre

Dans ce chapitre on traite la question de la convergence de la loi d'une chaîne de Markov : y a-t-il convergence, et si oui à quelle vitesse ?

7.1 Préliminaires

7.1.1 Contre-exemple important

On commence tout d'abord par un contre-exemple fondamental qui montre que l'irréductibilité et la récurrence positive, qui garantissent l'existence et l'unicité d'une distribution stationnaire, ne suffisent pas. En d'autres termes, il peut y avoir des points fixes de l'équation d'évolution (1.11) mais pas convergence. Il suffit par exemple pour cela de considérer la matrice de transition suivante :



La convergence de la loi de la chaîne de Markov dépend de la condition initiale : si la chaîne démarre en 0 et 1 uniformément au hasard, alors à tout temps, la loi est la même : uniformément répartie sur $\{0,1\}$. Néanmoins, pour toute autre condition initiale, on vérifie que la loi oscille :

$$\mathbb{P}(X_{2n} = x) = 1 - \mathbb{P}(X_{2n+1} = x) = \mathbb{P}(X_0 = x).$$

Dit autrement, si la chaîne démarre en 0, alors elle sera toujours en 0 aux instants pairs.

Cet exemple déterministe peut paraître simpliste, mais il contient en fait l'essence de ce qui peut empêcher une chaîne de Markov irréductible et récurrente positive de converger : le fait que des questions de "parité" (au sens large) induisent une mémoire infinie. Nous ne traiterons que le cas le plus important dit apériodique, et le cas général est traité en Section **??**.

7.1.2 Modes de convergence

Pour les variables aléatoires il y a plusieurs modes de convergence, par exemple presque sûre, en loi, en probabilités, en moyenne quadratique, etc. On a vu que pour les chaînes de Markov il n'y avait pas convergence trajectorielle, i.e., presque sûre. Par contre, les lois peuvent converger. Pour les lois de probabilités, on considérera deux modes de convergence :

Convergence en loi : $X_n \xrightarrow{\text{L}} X_\infty$ si $\mathbb{P}(X_n = x) \to \mathbb{P}(X_\infty = x)$ pour tout $x \in E$;

Convergence en variation totale : $X_n \xrightarrow{\text{V.T.}} X_\infty$ si

$$\sum_{x \in E} |\mathbb{P}(X_n = x) - \mathbb{P}(X_\infty = x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

La convergence en loi est donc la convergence ponctuelle, état par état, alors que la convergence en variation totale est la convergence dans le sens de la norme L_1. Ainsi, convergence en variation totale implique convergence en loi, et les deux modes de convergence sont équivalents dans le cas d'un espace fini.

La convergence en variation totale dérive de la distance en variation totale, définie pour deux mesures de probabilité π et μ par

$$d_{\mathrm{VT}}(\pi, \mu) = \frac{1}{2} \sum_{x \in E} |\pi(x) - \mu(x)|. \tag{7.1}$$

7.2 La périodicité est une propriété de classe

Définition 7.1 (Période)**.** La période d_x d'un état x est le pgcd de l'ensemble $\{n \geq 1 : p_{xx}(n) > 0\}$. Un état est dit apériodique si $d_x = 1$, i.e., sa période vaut 1.

Théorème 7.2. *Si $x \sim y$ alors $d_x = d_y$*

Démonstration. Soit M, N tels que $p_{xy}(M) > 0$ et $p_{yx}(N) > 0$ (par irréductibilité) : alors

$$p_{xx}(M+N) \geq p_{xy}(M) p_{yx}(N) > 0$$

et donc $d_x \mid (M+N)$ et par symétrie $d_y \mid (M+N)$. Par ailleurs, pour tout k avec $p_{yy}(k) > 0$

$$p_{xx}(M+N+k) \geq p_{xy}(M) p_{yy}(k) p_{yx}(N) > 0$$

et donc $d_x \mid (M+N+k)$ et donc $d_x \mid k$ pour tout k avec $p_{yy}(k) > 0$, i.e., $d_x \mid d_y$. □

7.3 Convergence à l'équilibre d'une chaîne ergodique

Définition 7.3 (Ergodicité)**.** P est dit ergodique si P est irréductible, récurrente positive et apériodique ($d = 1$).

Proposition 7.4. *Si $d = 1$ alors pour tout x on a $p_{xx}(n) > 0$ pour tout $n \geq 1$ sauf peut-être un nombre fini.*

Démonstration. Argument de théorie des nombres : l'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N} : p_{xx}(n) > 0\}$ est stable par addition et de pgcd =1. Comme le pgcd = 1, il existe $k \geq 1$, $n_i \in \mathbb{Z}$ et $a_i \in A$ avec $1 = \sum_{i=1}^k n_i a_i$, et donc $1 = M - P$ en séparant les termes $n_i > 0$ et $n_i < 0$, et donc $M, P \in A$ par stabilité par addition. Soit $n \geq P(P-1)$, que l'on écrit $n = aP + r$ avec $r < P$ et donc nécessairement $a \geq P - 1$. Donc $n = aP + r(M-P) = (a-r)P + rM \in A$. □

Proposition 7.5. *Soit (X_n) et (Y_n) deux chaînes de Markov indépendantes sur les espaces d'états E et F, respectivement. Si chaque chaîne est ergodique, alors $((X_n,Y_n), n \geq 0)$ est une chaîne de Markov ergodique.*

Démonstration. Le fait que $((X_n,Y_n), n \geq 0)$ est une chaîne de Markov est évident. Soit π_X et π_Y la distribution invariante de X et Y, respectivement. On vérifie directement que la mesure produit $\pi_X \times \pi_Y$ est une distribution stationnaire pour (X,Y). Par ailleurs, soit $x, x' \in E$ et $y, y' \in F$. Puisque X et Y sont apériodiques, il existe n_0 avec $\mathbb{P}_x(X_n = x'), \mathbb{P}_y(Y_n = y') > 0$ pour tout $n \geq n_0$ par le résultat précédent. Donc $\mathbb{P}_{x,y}(X_n = x', Y_n = y') > 0)$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui montre à la fois l'irréductibilité et l'apériodicité de (X,Y). □

On présente maintenant le théorème principal de convergence des chaînes de Markov.

Théorème 7.6. *Si P est ergodique et que π est son unique distribution stationnaire, alors pour toute distribution initiale μ on a $d_{\mathrm{VT}}(\mu^T P^n, \pi) \to 0$.*

En particulier, $p_{xy}(n) \to \pi(y)$ pour tout x, y : la chaîne de Markov oublie son état initial ! En fait, c'est même l'idée de la preuve : pour montrer que X oublie son état initial, on la couple avec une copie indépendante Y et on s'intéresse au temps où les deux chaînes se rencontrent.

EXO DE DYNKIN

Démonstration. Preuve par couplage avec la chaîne démarrée à l'équilibre. On remarque que Q admet $\pi \otimes \pi$ comme distribution stationnaire, et donc est récurrente positive : ainsi $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ avec $T = \inf\{n \geq 0 : X_n = Y_n\}$. L'observation cruciale est que X_n et Y_n ont la même loi pour $n \geq T$:

$$\mathbb{P}(X_n = x, T \leq n) = \sum_{t \leq n, a} \mathbb{P}(T = t, X_t = a, X_n = x) = \sum_{t,a} \mathbb{P}(X_T = a, T = t) p_{ax}(n-t)$$

Par symétrie :

$$\mathbb{P}(Y_n = x, T \leq n) = \sum_{a, t \leq n} \mathbb{P}(Y_T = a, t = T) p_{ax}(n-t)$$

et puisque $X_T = Y_T$ on obtient

$$\mathbb{P}(X_n = x, T \leq n) = \mathbb{P}(Y_n = x, T \leq n)$$

et donc

$$\mathbb{P}(X_n = x) = \mathbb{P}(X_n = x, T \leq n) + \mathbb{P}(X_n = x, T > n)$$

et donc

$$\begin{aligned} |\mathbb{P}(X_n = x) - \mathbb{P}(Y_n = x)| &= |\mathbb{P}(X_n = x, T > n) - \mathbb{P}(Y_n = x, T > n)| + \mathbb{P}(Y_n = x, T > n) \\ &\leq \mathbb{P}(X_n = x, T > n) \end{aligned}$$

et donc

$$\sum_n |\mathbb{P}(X_n = x) - \mathbb{P}(Y_n = x)| \leq 2\mathbb{P}(T > n)$$

ce qui prouve le résultat. $\square$

7.4 Le cas périodique

Théorème 7.7 (Classes cycliques)**.** *On suppose P irréductible de période d. On fixe un point $u \in E$ et on définit*

$$A_k = \{x : \exists n : p_{ux}(nd+k) > 0\}\,,\ k = 0,\dots,d-1$$

l'ensemble des points que l'on peut atteindre en k étapes (modulo d). Alors les A_k forment une partition de E .

Démonstration. $\boxed{x \in A_k \Rightarrow \exists n \equiv -k : p_{xu}(n) > 0}$ $p_{ux}(nd+k) > 0$ par hypothèse et $p_{xu}(n') > 0$ par irréductibilité $\Rightarrow p_{uu}(n'+nd+k) > 0 \Rightarrow d \mid n'+k \Rightarrow n' \equiv -k$
$\boxed{x \in A_j, y \in A_k \Rightarrow \exists n \equiv k-j : p_{xy}(n) > 0}$ soit $n_x \equiv -j$ avec $p_{xu}(n_x) > 0$. Par hypothèse, soit $i \equiv 0$ avec $p_{uu}(i) > 0$ et enfin soit $n_y \equiv k$ avec $p_{uy}(n_y) > 0$: alors $n_x + i + n_u \equiv k - j$ et $p_{xy}(n_x + i + n_y) > 0$.
$\boxed{p_{xy}(n) > 0 \Rightarrow \exists j,k : x \in A_j, y \in A_k \text{ et } n \equiv k-j}$ par irréductibilité on a $\cup A_i = S$ et donc il existe j,k avec $x \in A_j$ et $y \in A_k$. soit $n_x \equiv j$ avec $p_{ux}(n_x) > 0$ et $n_y \equiv -j$ avec $p_{yu}(n_y) > 0$: alors $p_{uu}(n_x + n + n_y) > 0$ et donc $n_x + n + n_y \equiv 0$.
$\boxed{A_j \cap A_k = \emptyset}$ soit $x \in A_j \cap A_k$: soit $n_k \equiv k$ et $n_j \equiv -j$ avec $p_{ux}(n_k), p_{xu}(n_j) > 0$. Alors $p_{uu}(n_k + n_j) > 0$ et donc $n_k + n_j \equiv 0$ et donc $j = k$. $\square$

Corollaire 7.8. *Les (A_k) sont les classes de communication de la chaîne de Markov de matrice de transition P^d. Par ailleurs, P^d est apériodique.*

Démonstration. Pour l'apériodicité, on note d' la période de P^d et on a

$$d' = \text{pgcd}\{n \geq 1 : p_{xx}(nd) > 0\} = \frac{1}{d}\text{pgcd}\{n \equiv 0 : p_{xx}(n) > 0\} = 1.$$

$\square$

Pour le cas périodique on a le résultat suivant.

Théorème 7.9. *Si P est irréductible, récurrente positive de mesure stationnaire π et de période d, alors pour toute mesure μ supportée par une classe cyclique A on a $d_{\mathrm{VT}}(\mu^T P^{nd}, d\pi\,|_A) \to 0$.*

Démonstration. La restriction de P^d à A est irréductible et apériodique. Elle est récurrente positive car $\pi\mid_A$ est une mesure invariante. Il reste à montrer que $d\pi\mid_A$ est une mesure de probabilité. Par le théorème ergodique,

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathbb{1}\left(X_{n\in A}\right)\to\pi(A)$$

mais le même de gauche converge vers $1/d$ par la décomposition cyclique. □

7.5 Vitesse de convergence pour un espace d'état fini

On montre dans cette section que **dans le cas d'un espace fini**, la vitesse de convergence dans le Théorème 7.6 est **exponentielle**.

7.5.1 Echauffement : le cas diagonalisable

On considère pour commencer une matrice A de taille r avec r valeurs propres distinctes $\lambda_1,\dots,\lambda_r$, si bien que A est diagonalisable. Soit $v_1,\dots,v_r$, resp. $u_1,\dots,u_r$, les vecteurs propres à droite, resp. à gauche, associées aux valeurs propres $\lambda_1,\dots,\lambda_r$, i.e.,

$$u_k^TA=\lambda_ku_k^T\Leftrightarrow U^TA=\Lambda U^T\ \text{ avec }\ U=[u_1\cdots u_r]$$

et de la même manière $AV=V\Lambda$. Par ailleurs,

$$\lambda_iu_i^Tv_j=u_i^TAv_j=\lambda_ju_i^Tv_j$$

et donc $u_i^Tv_j=0$ pour $j\neq i$. En normalisant, on peut prendre $u_i^Tv_i=1$ et donc $U^TV=I$ et donc $A^n=V\Lambda^nU^T$ et donc

$$A^n=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^nv_iu_i^T\,. \tag{7.2}$$

Cette expression nous donne une description très précise du comportement asymptotique de A^n lorsque $n\to\infty$. Un des buts du théorème de Perron–Frobenius est de généraliser partiellement ce résultat aux cas de matrice à coefficients ≥ 0. Sous cette hypothèse bien plus faible on n'obtiendra évidemment pas d'expression aussi précise que (7.2), néanmoins on montrera que $A^n\sim\lambda_1^nv_1u_1^T$, identique donc à (7.2) lorsque λ_1 est l'unique valeur propre de plus grand module.

7.5.2 Vitesse de convergence pour une chaîne ergodique sur un espace d'états fini

Théorème 7.10. *Soit P ergodique sur un espace d'état E fini. Alors :*

- *1 est valeur propre, ses multiplicités algébrique et géométrique sont égales à un, et si λ est une autre valeur propre, alors $|\lambda| < 1$;*
- *si γ est le plus grand module parmi les valeurs propres $\neq 1$, i.e.,*

$$\gamma = \max\{|\lambda| : \exists x \neq 0 : Px = \lambda x\},$$

alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $P^n = 1\pi^T + O(n^m \gamma^n)$ pour tout $n \geq 0$.

En particulier, il existe $c > 0$ et $\delta < 1$ tels que $d_{\mathrm{VT}}(\ell P^n, \pi) \leq c\delta^n$ pour toute distribution initiale ℓ.

REMARQUE 7.11 Puisque $\gamma < 1$ on a en particulier $P^n \to \vec{1}\pi^T$, i.e., $p_{xy}(n) \to (\vec{1}\pi^T)_{xy} = \pi_y$: on retrouve donc bien le fait que la chaîne de Markov converge à l'équilibre, mais ce résultat nous donne sa vitesse. ■

`A FAIRE: Mettre en avant la preuve (un peu plus simple) du fait que` $\gamma < 1$.

Démonstration du Théorème 7.10. On sait que 1 est valeur propre puisque $P1 = 1$.

On sait aussi que 1 est de multiplicité géométrique 1 : π est l'unique vecteur propre à gauche, donc il y aussi unicité à droite.

On note dans le reste de la preuve $U = \mathrm{Vect}(1)$ et $V = \pi^\perp$. Alors on a les résultats suivants :

1. P laisse U et V invariants. En effet, $P(c1) = c1$ et si $x \in V$, alors $\pi^T Px = \pi^T x = 0$;
2. $U \cap V = \{0\}$: si $c1 \in V$, alors $\pi^T c1 = 0$ et donc $c = 0$ puisque $\pi^T 1 = 1$;
3. $U + V = \mathbb{R}^d$: si $x \in \mathbb{R}^d$ alors $x - (\pi^T x)1 \in \pi^\perp$ puisque $\pi^T(x - (\pi^T x)1) = \pi^T x - \pi^T u = 0$;
4. si $f \in V$ avec $Pf = \lambda f$, alors soit $f = 0$, soit $|\lambda| < 1$. En effet,

$$\lambda^n f(x) = P^n f(x) = \mathbb{E}_x(f(X_n)) \to \pi(f) = 0,$$

   i.e., $\lambda^n f(x) \to 0$: donc soit $|\lambda| < 1$, soit $f = 0$.

On montre maintenant que si λ est une autre valeur propre, alors $|\lambda| < 1$. Soit $x \neq 0$ avec $Px = \lambda x$, que l'on écrit $x = c1 + v$ avec $v \in V$. Alors

$$Px = c1 + Pv = \lambda c1 + \lambda v$$

et puisque $Pv \in V$ et U et V forment une somme directe, on a $\lambda c = c$ et $Pv = \lambda v$. Donc par le quatrième point ci-dessus, soit $|\lambda| < 1$, soit $v = 0$. Mais si $v = 0$, alors $x = c1$ et donc $\lambda = 1$, ce qui est exclu. Donc $|\lambda| < 1$.

On montre maintenant que la multiplicité algébrique de 1 vaut 1. Pour cela, il faut montrer que si $(P-I)^k x = 0$, alors $x \propto 1$. On écrit $x = c1 + v$, ce qui donne $c(P-I)^k 1 + (P-I)^k v = 0$ et donc, par stabilité de U et V et somme directe, $c(P-I)^k 1 = 0$ et $(P-I)^k v = 0$. Or on a vu que 1 n'était pas valeur propre de P restreint à V, donc $v = 0$, et on a bien le résultat.

On montre maintenant la dernière propriété. Soit $(x_1,\dots,x_{n-1})$ une base de V et $X = (1 x_1 \cdots x_{n-1})$: les trois premières propriétés impliquent que

$$X^{-1}PX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$$

On obtient

$$X^{-1}P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} X^{-1}$$

et donc si on écrit $X^{-1} = \begin{pmatrix} L_1 \\ \tilde{L} \end{pmatrix}$ on obtient

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ \tilde{L} \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} L_1 P \\ \tilde{L}P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 \\ \tilde{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ Y\tilde{L} \end{pmatrix}$$

et donc $L_1 \propto \pi^T$, et en fait $L_1 = \pi^T$. On a donc

$$P = X \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} X^{-1} = (1x) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi^T \\ \tilde{L} \end{pmatrix}$$

et par suite,

$$P^n = (1x) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Y^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi^T \\ \tilde{L} \end{pmatrix} = 1\pi^T + O(n^m |\lambda_2|^n)$$

□

Corollaire 7.12. *Si P est ergodique et E fini, alors on peut appliquer le théorème central limite.*

Démonstration. Il faut vérifier que $\sigma^2(f)$ est fini. Soit donc f avec $\pi(f) = 0$: alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\pi(f(X_n)f(X_0)) &= \sum_x \pi(x) f(x) \mathbb{E}_x(f(X_n)) \\ &= \sum_{x,y} \pi(x) f(x) f(y) p_{xy}(n) \\ &= \sum_{x,y} \pi(x) f(x) f(y) (p_{xy}(n) - \pi(y)) \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}_\pi(f(X_n)f(X_0))| &\le \sum_{x,y} \pi(x) |f(x)| |f(y)| \left|p_{xy}(n) - \pi(y)\right| \\ &\le \sum_{x,y} \pi(x) |f(x)| |f(y)| c\rho^n \\ &= c\pi(|f|) \|f\|_1 \rho^n. \end{aligned}$$

□

7.5.3 Théorèmes de Perron et de Frobenius

Théorème 7.13 (Théorème de Perron)**.** *Soit A une matrice $r \times r$ dont toutes les entrées sont > 0. Alors :*

1. *il existe une valeur propre réelle $\lambda_1 > 0$ de multiplicité algébrique et géométrique $= 1$ avec $\lambda_1 > |\lambda|$ pour toute autre valeur propre λ ;*
2. *il existe des vecteurs propres à gauche et à droite associés à λ_1, π et u, qui ont toutes leurs coordonnées > 0 et qui peuvent être choisies avec $\pi^T u = 1$;*
3. *A n'a pas d'autre vecteur propre dont toutes les entrées sont ≥ 0 ;*
4. *il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $A^n = \lambda_1^n u\pi^T + o(n^m|\lambda_2|^n)$ avec λ_2 la deuxième plus grande valeur propre.*

Le dernier point concerne donc la généralisation partielle de (7.2) au cas de matrice à coefficients > 0. Le théorème de Perron ne s'applique pas aux matrices dont les entrées sont simplement ≥ 0, comme on aimerait le faire pour pouvoir l'appliquer à des matrices stochastiques. Néanmoins, il s'applique aux matrices **primitives**, i.e., aux matrices A à coefficients ≥ 0 telles qu'il existe $n \geq 0$ avec $A^n > 0$. Le résultat suivant montre qu'une matrice stochastique est apériodique si et seulement si elle est primitive.

Proposition 7.14. *On considère P irréductible sur E fini : alors P est apériodique si et seulement si $\exists m$ tel que $p_{xy}(m) > 0$ pour tout x, y.*

Démonstration. $\boxed{P^m > 0 \Rightarrow P \text{ apériodique}}$ Si $P^m > 0$, alors

$$p_{xx}(m+1) \geq p_{xy}(m) p_{xy}$$

ce qui montre en choisissant y avec $p_{xy} > 0$ (qui existe par irréductibilité) que $p_{xx}(m+1) > 0$ et donc $d \mid m$ et $d \mid m+1$ ce qui implique $d = 1$.

$\boxed{P \text{ apériodique} \Rightarrow \exists m : P^m > 0}$ On suppose maintenant $d = 1$, et on montre qu'il existe m tel que $p_{xy}(m) > 0$ pour tout x, y. Pour cela, il suffit de montrer que pour tout x, y il existe n_{xy} avec $p_{xy}(n) > 0$ pour tout $n \geq n_{xy}$. On fixe x, y : soit n_x avec $p_{xx}(n) > 0$ pour $n \geq n_x$ (par la proposition précédente) et soit n avec $p_{xy}(n) > 0$ par irréductibilité : alors pour tout $n' \geq n_x + n$

$$p_{xy}(n') \geq p_{xx}(n'-n) p_{xy}(n) > 0.$$

□

Théorème 7.15 (Théorème de Perron–Frobenius)**.** *Soit A une matrice $r \times r$ positive ($a_{ij} \geq 0$) et primitive. Alors les conclusions 1–4 du Théorème de Perron s'appliquent. En outre :*

5. *si A est stochastique alors $\lambda_1 = 1$;*
6. *si A est sous-stochastique alors $\lambda_1 < 1$;*
7. *si A est stochastique mais pas irréductible, les multiplicités algébriques et géométrique sont égales au nombre de classes de communication.*

Dans le cas d'une matrice à coefficients ≥ 0 mais pas forcément primitive, on a le théorème de Frobenius.

Théorème 7.16 (Théorème de Frobenius)**.** *Soit P une matrice $n \times n$ non nulle dont toutes les entrées sont ≥ 0. Alors P a une valeur propre dominante λ telle que :*

1. *$\lambda > 0$ et le vecteur propre associé h a toutes ses entrées > 0 ;*
2. *toute autre valeur propre κ de P satisfait $|\kappa| \leq \lambda$ avec égalité si et seulement si $\kappa = e^{2\pi ik/m}\lambda$.*

On peut prouver le théorème de Perron–Frobenius en se ramenant au cas stochastique.

A FAIRE: A rédiger

7.6 Exercices

A FAIRE: A rédiger

EXERCICE 7.1. Condition de Doeblin.

EXERCICE 7.2. On considère une chaîne de Markov générale sur un espace d'états E fini. Soit ℓ_n la loi de la chaîne de Markov à l'instant n : montrez que si $\ell_n \to \ell$, alors nécessairement ℓ est une distribution stationnaire.

A FAIRE: A rédiger

EXERCICE 7.3. Une chaîne de Markov conditionnée au futur est une chaîne de Markov !

Soit T le temps de sortie d'un ensemble A.

- X_0^T conditionné à $T > n$ est une chaîne de markov inhomogène ?
- si $n \to \infty$, alors X_0^T conditionné à $T > n$ converge vers une chaîne de Markov homogène ?

$Y_k = X_{k\wedge n}$, $\tilde{\mathbb{P}}_x = \mathbb{P}_x(\cdot \mid T > n)$: Il faut montrer que

$$\mathbb{P}\left(X_{k+1} = x_{k+1} \mid T > n, X_0 = x_0, \dots, X_k = x_k\right) = \mathbb{P}\left(X_{k+1} = x_{k+1} \mid T > n, X_k = x_k\right)$$

Soit

$$q = \mathbb{P}\left(T > n, X_0 = x_0, \dots, X_k = x_k\right) = \mathbb{P}_{x_k}(T > n-k)\mathbb{P}\left(X_0 = x_0, \dots, X_k = x_k\right)$$

On a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(X_{k+1} = x_{k+1} \mid T > n, X_0 = x_0, \dots, X_k = x_k\right) \\
&\quad = \frac{1}{q}\mathbb{P}\left(X_0 = x_0, \dots, X_k = x_k, X_{k+1} = x_{k+1}, T > n\right) \\
&\quad = \frac{1}{q}\mathbb{P}_{x_{k+1}}\left(T > n-k-1\right)\mathbb{P}\left(X_0 = x_0, \dots, X_k = x_k, X_{k+1} = x_{k+1}\right) \\
&\quad = \frac{\mathbb{P}_{x_{k+1}}\left(T > n-k-1\right)\mathbb{P}\left(X_0 = x_0, \dots, X_k = x_k, X_{k+1} = x_{k+1}\right)}{\mathbb{P}_{x_k}(T > n-k)\mathbb{P}\left(X_0 = x_0, \dots, X_k = x_k\right)} \\
&\quad = \frac{\mathbb{P}_{x_{k+1}}\left(T > n-k-1\right)}{\mathbb{P}_{x_k}(T > n-k)} p_{x_k, x_{k+1}}
\end{aligned}$$

ce qui montre bien que $X_{\cdot\wedge n}$ est une chaîne de Markov inhomogène en temps.

Pour $n \to \infty$ et quand X_0 démarre dans un état transitoire, et que T est le temps de sortie de la classe transitoire et de rentrée dans l'ensemble récurrent, on obtient une distribution quasi-stationnaire : si on s'intéresse à la chaîne on obtient un Q-processus. Plus formellement, soit $\lambda_1 = \rho(Q)$ et u, v les vecteurs propres de Perron–Frobenius : $u, v > 0$, $u^T v = 1$, $v^T Q = \lambda_1 v^T$, $Qu = \lambda_1 u$ et

$$Q^n \sim \lambda_1^n u v^T, \text{ i.e., } p_{xy}(n) = (Q^n)_{xy} = \lambda_1^n u(x)v(y) + o(\lambda_1^n)$$

pour la distribution quasi-stationnaire on a pour x, y transitoires

$$\mathbb{P}_x(X_n = y \mid T > n) = \frac{\mathbb{P}_x(X_n = y, T > n)}{\mathbb{P}_x(T > n)} = \frac{\mathbb{P}_x(X_n = y)}{\mathbb{P}_x(T > n)} = \frac{p_{xy}(n)}{\sum_{y' \in T} p_{xy'}(n)}$$

et puisque P est sous-stochastique, on a

$$p_{xy}(n) = \lambda_1^n u(x)v(y) + o(\lambda_1^n)$$

et donc

$$\mathbb{P}_x(X_n = y \mid T > n) \to \frac{v(y)}{\sum_{y'} v(y')}.$$

C'est la distribution quasi-stationnaire. Le q-processus est obtenu en notant que les transitions deviennent homogènes : on a vu que les probabilités de transition étaient données par

$$\frac{\mathbb{P}_{x_{k+1}}(T > n-k+1)}{\mathbb{P}_{x_k}(T > n-k)} p_{x_k, x_{k+1}} \sim \frac{\lambda_1^{n-k-1} u(x_{k+1}) \sum_y v(y)}{\lambda_1^{n-k} u(x_k) \sum_y v(y)} p_{x_k, x_{k+1}} = \frac{u(x_{k+1})}{\lambda_1 u(x_k)} p_{x_k, x_{k+1}}$$

8.1 Page Rank

L'algorithme Page Rank est l'algorithme au cœur de l'algorithme de classement des pages web de Google. Faites le lien entre la section 2.1 de l'article originel de Brin et Page [1] et le cours. Quel est l'intérêt du facteur d'amortissement d ? Que peut-il se passer si $d = 0$?

8.2 Recuit simulé

A FAIRE: Mettre au propre

L'algorithme du recuit simulé est un algorithme d'optimisation stochastique qui résout approximativement le problème suivant :

$$\min_{x \in E} U(x). \tag{8.1}$$

On se restreint dans cet exercice au cas où E est un ensemble dénombrable, et on suppose en outre que l'ensemble des points où le minimum est atteint est fini :

$$|\mathscr{M}| < \infty \text{ avec } \mathscr{M} = \{x : U(x) = \min U\}.$$

1. Pour $\beta > 0$ on considère la chaîne de Markov avec les probabilités de transition suivantes :

$$p_\beta(x,y) = p(x,y) \min\left(1, e^{-\beta(U(y)-U(x))}\right), \; x \neq y,$$

où $P = (p(x,y))$ est la matrice de transition d'une chaîne de Markov irréductible avec $p(x,y) = p(y,x)$. Montrez que cette chaîne de Markov admet une unique probabilité invariante π_β que vous expliciterez.

2. Montrez que π_β converge en loi lorsque $\beta \to \infty$ vers une limite que vous identifierez. Vous pourrez pour cela vous intéresser au rapport $\pi_\beta(x)/\pi_\beta(y)$ pour $x, y \in E$.

3. On considère maintenant une chaîne de Markov inhomogène en temps : à l'instant t, la dynamique est gouvernée par la matrice de transition $(p_{\beta(t)}(x,y))$, i.e.,

$$\mathbb{P}(X(t+1) = y \mid X(t) = x) = p_{\beta(t)}(x,y)$$

avec $\beta(t)$ une fonction à choisir. Au vu des questions précédentes, justifiez pourquoi il est raisonnable d'espérer que $X(t)$ converge en loi vers un minimiseur de U. Que peut-il potentiellement se passer si l'on choisit $\beta(n) \to \infty$ très rapidement ? très lentement ?

4. Appliquez la méthode du recuit simulé au problème suivant. Soit G un graphe. On appelle ensemble stable un sous-ensemble de nœuds du graphe tel qu'aucun de ces nœuds ne sont voisins. Trouver un ensemble stable de taille maximale est un problème combinatoire classique qui est NP-difficile. Proposez un algorithme qui renvoie un ensemble stable de taille maximale avec grande probabilité.

Ce comportement asymptotique suggère de considérer un mécanisme de "refroidissement" où l'on fait varier la température $T = 1/\beta$ au cours du temps : cela revient à considérer une chaîne de Markov inhomogène en temps, où la matrice de transition à l'instant k est donné par $p_{T(k)}$. On veut $T(k) \to 0$: si $T(k) \to 0$ trop vite, la chaîne peut ne pas avoir le temps d'être proche de $\pi_{T(k)}$. Si $T(k) \to 0$ trop lentement, on perd du temps.

Théorème 8.1. *Si*

$$T(k) \geq \frac{\Delta}{\log k} \quad \textit{avec} \quad \Delta = \sup\{U(j) - U(i) : p(i,j) > 0\}$$

alors $X_n \xrightarrow{\mathrm{L}} \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$, *la mesure uniforme sur* $\mathcal{M}$.

En d'autres termes, on a construit une chaîne de Markov inhomogène en temps qui se "fixe" sur les minima locaux de U. L'ordre logarithmique est optimal, i.e., on ne peut pas prendre $T_k \ll 1/\log k$. En effet, Hajek [2] a montré qu'il existait une constante γ tel que il y a convergence si et seulement si

$$\sum_{k\geq 1} e^{-\gamma/T_k} = \infty.$$

8.3 Algorithme de Metropolis–Hastings

A FAIRE: Mettre au propre

Ce qui fait marcher le recuit, c'est qu'on "vise" une bonne distribution stationnaire. Ce qu'on a fait est un cas particulier de l'algorithme de Metropolis–Hastings paramétré par un noyau de transition Q :

1. $Y_{n+1} \sim q_{X_n,\cdot}$;
2. Mise à jour :

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n & \text{si } U_{n+1} \leq \min\left(1, \dfrac{\pi(Y_{n+1})q_{Y_{n+1},X_n}}{\pi(X_n)q_{X_n,Y_{n+1}}}\right) \\ Y_{n+1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans l'algorithme précédent les (U_k) sont des variables i.i.d. uniformément réparties sur $[0,1]$.

Théorème 8.2. $X_n \xrightarrow{\mathrm{L}} \pi$.

Démonstration. On vérifie que (X,π) est réversible. □

L'algorithme de Metropolis–Hastings est au cœur des méthodes de Monte–Carlo à base de chaînes de Markov (MCMC) qui sont à la base des techniques de simulation les plus avancées.

L'algorithme de Metropolis–Hastings est un algorithme général qui permet de générer une chaîne de Markov avec une distribution invariante donnée. Soit π une mesure de probabilité sur un ensemble dénombrable E et $P=(p(x,y))$ une matrice de transition sur E. Pour $t\geq 0$ et X_t étant construit, on définit X_{t+1} de la manière suivante :

1. Générer Y_t selon $p(X_t,\cdot)$, i.e., $\mathbb{P}(Y_t=y\mid X_t=x)=p(x,y)$;
2. Choisir
$$X_{t+1}=\begin{cases} Y_t & \text{avec probabilité } \rho(X_t,Y_t),\\ X_t & \text{avec probabilité } 1-\rho(X_t,Y_t)\end{cases}$$
où
$$\rho(x,y)=\min\left(1,\frac{\pi(y)}{\pi(x)}\frac{p(y,x)}{p(x,y)}\right).$$

1. Montrez que (X_t) est une chaîne de Markov et calculez ses probabilités de transition.
2. Montrez que (X_t) est irréductible si et seulement si P l'est.
3. Montrez que $\pi_x p_{xy}=\pi_y p_{yx}$et déduisez-en que X admet π comme probabilité stationnaire.

Un des intérêts majeur de cet algorithme est qu'il permet de générer une variable aléatoire suivant approximativement une loi que l'on connaît à la constante de normalisation près. C'est un cas de figure qui arrive très souvent, et que l'on illustre sur deux exemples.

4. Expliquez comment utilser l'algorithme de Metropolis–Hastings pour obtenir une approximation du rapport des sommes
$$\left(\sum_{n\geq 0} n^{5/6}e^{-n^{3/2}|\cos n|}\right)\Big/\left(\sum_{n\geq 0} e^{-n^{3/2}|\cos n|}\right).$$

Le deuxième exemple apparait naturellement en statistique bayésienne, où les méthodes de Monte-Carlo à base de chaînes de Markov sont essentielles.

Dans ce cadre, on considère un modèle paramétrique $\{p_\theta : \theta\in E\}$ avec p_θ pour chaque $\theta\in E$ une loi de probabilité sur un ensemble dénombrable, disons $\mathbb{N}$. En statistique bayésienne, l'estimation du paramètre θ n'est pas un nombre $\theta>0$ mais une loi de probabilités $\hat{p}_n$. On part d'une loi a priori μ, qui correspond à la loi d'une variable aléatoire Θ $(\mu(\theta)=\mathbb{P}(\Theta=\theta))$ et l'estimation $\hat{p}_n$ à partir d'un échantillon $(X_1,\dots,X_n)$ correspond à la loi de Θ conditionnée par les observations, et est donnée par la formule de Bayes :
$$\hat{p}_n(\theta)=\mathbb{P}(\Theta=\theta\mid X_1,\dots,X_n)=\frac{\prod_{k=1}^n p_\theta(X_i)\mu(\theta)}{\sum_{\theta'\in E}\prod_{k=1}^n p_{\theta'}(X_i)\mu(\theta')}.$$

A partir de $\hat{p}_n$ il y a plusieurs manières d'obtenir un estimateur $\hat{\theta}_n$ de θ au sens classique du terme, par exemple en prenant la moyenne de $\hat{p}_n$:
$$\hat{\theta}_n=\sum_\theta \theta\,\hat{p}_n(\theta).$$

5. Expliquez comment utiliser l'algorithme de Metropolis–Hastings pour tirer une variable aléatoire suivant approximativement la loi $\hat{p}_n$.
6. Expliquez comment utiliser l'algorithme de Metropolis–Hastings pour tirer une approximation de $\hat{\theta}_n$.

8.4 Résolution d'équations aux dérivées partielles

A FAIRE: A mettre avec l'analyse en première étape, et suggérer d'écrire $\sum_0^{T-1} f(X_k) = R(X_0^\infty)$ et $\varphi(X_T) = S(X_0^\infty)$, et prouvez $R(X_0^\infty) = f(X_0) + R(X_1^\infty)$ et $S(X_0^\infty) = S(X_1^\infty)$ pour $X_0 \notin \partial D$, puis faire utiliser Markov.

On considère le problème de Dirichlet discret :

$$\begin{cases} g(x) = Pg(x) + f(x), \ x \in D, \\ g(x) = \varphi(x), \ x \in \partial D. \end{cases} \tag{8.2}$$

1. Montrez qu'une solution est donnée par

$$g(x) = \mathbb{E}_x \left(\sum_{k=0}^{T-1} f(X_k) + \varphi(X_T) \mathbb{1}\,(T < \infty) \right)$$

avec $T = \inf\{n : X_n \in \partial D\}$.
On considère l'équation de la chaleur stationnaire $u'' = -f$ sur un intervalle borné $[a,b] \subset \mathbb{R}$ avec des conditions aux bords $u(a) = \alpha$, $u(b) = \beta$. Pour $n \geq 1$ on considère le problème discrétisé sur $\{x_k^n : k = 0, \ldots, n\}$ avec $x_k^n = a + \frac{(b-a)k}{n}$, où la dérivée discrète est donnée par $u'(x) = n(u(x + \frac{1}{n}) - u(x))$ pour $x \in \{a + \frac{(b-a)k}{n} : k = 0, \ldots, n\}$.
2. Montrez que le problème discret correspondant est de la forme $g = f + Pg$ avec une matrice de transition P que vous identifierez.
3. A partir des résultats précédents, expliquez comment obtenir une approximation de la solution de l'équation de la chaleur à partir d'un code qui permettrait de simuler une marche aléatoire.

8.4.1 Equation de Poisson

A FAIRE: Matrice de déviation, lien avec l'équation de Poisson

9 — Problèmes

9.1 Chaînes de vie et de mort

A FAIRE: Mettre au propre

On considère une chaîne de vie et de mort sur $\mathbb{N}$: pour $x, y \in \mathbb{N}$ on a $p_{x,y} = 0$ si $|x - y| > 1$, on note $p_x = p_{x,x+1}$, $r_x = p_{x,x}$, $q_x = 1 - r_x - p_x$.

1. Montrez qu'une chaîne de vie et de mort est irréductible si et seulement si $p_x > 0$ et $q_{x+1} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{N}$.

Dans le reste du problème on suppose que la chaîne est irréductible.

2. A quelle condition existe-t-il une mesure invariante ? est-elle unique ?

3. A quelle condition existe-t-il une distribution stationnaire ? est-elle unique ?

4. A quelle condition la chaîne est-elle récurrente positive ?

On définit dans les questions suivantes $v(x) = \mathbb{P}_x(\forall n \geq 0 : X_n \geq 1)$.

5. Soit $\delta(x) = v(x) - v(x-1)$: montrez que $\delta(x+1) = \rho_x \delta(x)$ pour tout $x \geq 1$.

6. Déduisez de la question précédente que X est récurrente si et seulement si

$$\sum_{m \geq 0} \prod_{j=1}^{m} \frac{q_j}{p_j} = \infty.$$

7. On considère le cas où les transitions ne dépendent pas de l'état, i.e., pour $x \geq 1$ on a $p_x = p$, $q_x = q$ et $r_x = r$ avec $p, q, r \geq 0$ et $p + q + r = 1$. A quelle condition la chaîne est-elle récurrente ? Que se passe-t-il notamment lorsque $p = q$?

Dans les questions suivantes on regarde ce qui se passe quand $p \approx q$. Pour cela, on considère le cas $p_x = 1 - q_x = \frac{1}{2} + cx^{-\alpha}$ pour $x \geq 1$ avec $c, \alpha > 0$.

8. Montrez que

$$\sum_{m \geq 0} \prod_{j=1}^{m} \frac{q_j}{p_j} = \sum_{m \geq 0} \exp\left(\sum_{i=1}^{m} \ln(1 - u_i) \right) \quad \text{avec} \quad u_i = \frac{2}{i^\alpha/(2c) + 1}.$$

9. On admet qu'il existe $a > 0$ tel que $\ln(1 - x) \geq -ax$ pour tout $0 \leq x \leq 4c/(2c+1)$. Déduisez-en que la chaîne est récurrente pour $\alpha > 1$.

10. On admet qu'il existe $a, b > 0$ tel que $\ln(1-x) \leq -ax$ pour tout $0 \leq x \leq 4c/(2c+1)$ et $\sum_{i=1}^{m} i^{-\alpha} \geq bm^{1-\alpha}$ pour $m \geq 1$. Déduisez-en que

$$\sum_{i=1}^{m} \ln(1-u_i) \leq -\frac{4abcm^{1-\alpha}}{2c+1}$$

puis que la chaîne est transitoire pour $\alpha < 1$.

11. A votre avis, que se passe-t-il pour $\alpha = 1$? Vous pourrez justifier votre réponse par des calculs heuristiques.

9.2 Urne d'Ehrenfest

A FAIRE: Ajouter la vitesse de convergence ?

On s'intéresse au modèle d'Ehrenfest, en partie pour motiver la notion de réversibilité. On dit qu'une chaîne de Markov est réversible s'il existe π telle que si la loi initiale est π, i.e., si (X_n) est la chaîne de Markov(π, P) alors le processus renversé en temps est aussi Markov(π, P), i.e., si pour tout $n \geq 0$ on a

$$\mathbb{P}_\pi(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}_\pi(X_0 = x_n, \dots, X_n = x_0).$$

1. Montrez que la chaîne de Markov(π, P) est réversible si et seulement π satisfait les équations de balance locale : pour tout $x, y \in E$,

$$\pi_x p_{xy} = \pi_y p_{yx}.$$

2. Déduisez-en que si la chaîne de Markov(π, P) est réversible, alors π est une distribution stationnaire.

On considère maintenant un système de N particules dans une boîte. Cette boîte a deux compartiments : à chaque unité de temps, chaque particule reste dans le compartiment où elle est avec probabilité p, et change de compartiment avec probabilité $1-p$. On considère tout d'abord la suite (X_n) à valeurs dans $\{0,1\}^N$ avec $X_n(i) = 0$ si la i-ème particule est dans le compartiment de droite à l'instant n, et $X_n(i) = 1$ sinon.

3. On commence par considérer $N = 1$. Montrez que (X_n) est une chaîne de Markov, identifiez sa matrice de transition puis montrez qu'elle est réversible et identifiez la mesure π correspondante.

4. Généralisez la question précédente au cas $N \geq 1$.

5. Toujours pour le cas $N \geq 1$, montrez que (X_n) est en fait *transition-réversible*, i.e., que $\mathbb{P}(X_n = x, X_{n+1} = y) = \mathbb{P}(X_n = y, X_{n+1} = x)$.

La transition-réversibilité est souvent prise comme définition de réversibilité en physique statistique. Le modèle d'Ehrenfest a été proposé par les époux Ehrenfest en 1907 afin de répondre à un paradoxe de Zermelo formulé en 1896. Ce paradoxe était le fait que, bien que les modèles de mécanique classique sont réversibles en temps, les conclusions de la mécanique statistique, sensée être dérivée de la mécanique classique, aboutissent à l'irréversibilité en temps, par exemple via le fait que l'entropie croit. Le résultat de la question précédente montre qu'en effet, ce modèle de particules est réversible, mais on va maintenant considérer une autre description du système, qui sera elle irréversible.

Dans la suite de l'exercice on considère la suite (Y_n) avec Y_n le nombre de particules dans le compartiment de droite.

6. Quel est l'espace d'états de Y_n ? Exprimez Y_n en fonction de X_n, puis prouvez que (Y_n) est une chaîne de Markov. Vous identifierez sa matrice de transition.

7. Montrez que (Y_n) admet une unique probabilité stationnaire π.

8. (Y_n) est-elle transition-réversible ? Concluez quant au paradoxe de Zermelo.

9. (Y_n) est-elle réversible ?

10. Partant d'une configuration avec autant de particules dans chaque compartiment, calculez le temps moyen avant que toutes les particules se retrouvent dans le même compartiment.

9.3 Chaîne serpent

Partie I: Chaîne serpent générale

Dans cet exercice on étudie la chaîne serpent, que l'on applique à l'étude du temps moyen d'apparition d'un motif dans une série de pile ou face. Soit X une chaîne de Markov sur un espace d'états dénombrable E et de matrice de transition $P = (p_{xy})_{x,y \in E}$. Pour $n \geq 0$ on définit

$$\widetilde{X}_n = (X_n, X_{n+1}) \in E^2.$$

Dans le reste de l'énoncé on définit $\widetilde{E} = \left\{(x,y) \in E^2 : p_{xy} > 0\right\} \subset E^2$.

1. Montrez que quel que soit $X_0 \in E$, on a $\mathbb{P}(\widetilde{X}_n \in \widetilde{E}) = 1$ pour tout $n \geq 0$, et déduisez-en que $\mathbb{P}(\forall n \geq 0 : \widetilde{X}_n \in \widetilde{E}) = 1$.

Ainsi, on considère dans la suite de l'exercice que $\widetilde{X}$ vit sur l'espace d'états $\widetilde{E}$ et non E^2.

2. Montrez que $\widetilde{X}$ est une chaîne de Markov.

3. Soit $\widetilde{P} = (\widetilde{p}_{(x_0,x_1),(y_0,y_1)})$ la matrice de transition de $\widetilde{X}$: montrez que pour tout $(x_0,x_1),(y_0,y_1) \in \widetilde{E}$ on a

$$\widetilde{p}_{(x_0,x_1),(y_0,y_1)} = \mathbb{1}\,(y_0 = x_1)\,p_{x_1,y_1}.$$

4. Montrez que si X est irréductible, alors $\widetilde{X}$ est irréductible.

5. On suppose X irréductible et récurrent positif et on note π sa distribution stationnaire. Montrez que $\widetilde{X}$ est irréductible et récurrent positif et que sa distribution stationnaire $\widetilde{\pi}$ sur $\widetilde{E}$ est donnée par

$$\widetilde{\pi}((x,y)) = \pi(x)p_{xy},\ (x,y) \in \widetilde{E}.$$

Partie II: Application au temps d'apparition d'un motif

On applique maintenant les résultats ci-dessus pour étudier le temps d'apparition d'un motif donné dans une série de pile ou face. On considère donc $X = (X_n, n \geq 0)$ une série de pile ou face indépendants : les X_n sont des variables de Bernoulli i.i.d. avec $\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}$. Etant donné un motif $m \in \{0,1\}^2$, on s'intéresse à l'instant $\widetilde{T}_m$ de première apparition de ce motif dans la suite des X_n :

$$\widetilde{T}_m = \inf\{n \geq 0 : (X_n, X_{n+1}) = m\}.$$

On note $\widetilde{X} = (\widetilde{X}_n, n \geq 0)$ la chaîne serpent, définie par $\widetilde{X}_n = (X_n, X_{n+1}) \in \{0,1\}^2$. Dans ce cas, on a $\widetilde{E} = \{0,1\}^2$.

6. Calculez la distribution stationnaire π de X.

7. Dessinez le graphe de transition de $\widetilde{X}$.

8. Montrez que la distribution stationnaire $\widetilde{\pi}$ de $\widetilde{X}$ est la loi uniforme sur $\{0,1\}^2$.

9. Montrez que $\widetilde{X}$ est instantanément à l'équilibre, i.e., que $\widetilde{X}_0$ est distribué selon $\widetilde{\pi}$.

10. Déduisez-en que $\mathbb{E}(\widetilde{T}_m) = 4$ pour tout motif m.

11. On suppose maintenant que la pièce est biaisée, i.e., les X_n sont toujours des variables de Bernoulli i.i.d. mais $\mathbb{P}(X_n = 1) = p \in]0, \frac{1}{2}[$. Quel est le motif qui minimise le temps moyen d'apparition ?

9.4 Un serveur altruiste

Partie I: Etude du serveur simple

Soit (X_n) la chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$ définie par la dynamique suivante :

$$X_{n+1} = (X_n - 1)^+ + A_{n+1}$$

où les (A_n) sont i.i.d. sur $\mathbb{N}$ et indépendants de $X_0 \in \mathbb{N}$. On suppose en outre que $\mathbb{P}(A_1 = k) > 0$ pour $k = 0,1,2$. On considère aussi X' la marche non réfléchie sur $\mathbb{Z}$:

$$X'_0 = X_0 \text{ et } X'_{n+1} = X'_n - 1 + A_{n+1},\ n \geq 1.$$

On note enfin $T_0 = \inf\{n \geq 1 : X_n = 0\}$.

1. Montrez que sous $\mathbb{P}_x$ avec $x \geq 1$, on a $X'_n = X_n$ pour $n \leq T_0$.

2. En utilisant la loi forte des grands nombres, déduisez-en que X est transitoire si $\mathbb{E}(A_1) > 1$.

3. En considérant la fonction $V(x) = x$, utilisez le critère de Foster pour montrer que X est récurrent positif si $\mathbb{E}(A_1) < 1$.

Dans le reste de l'énoncé on suppose $\mathbb{E}(A_1) < 1$ et on note π la distribution stationnaire de X.

4. Montrez que $\mathbb{E}_\pi(X_0) = \mathbb{E}_\pi((X_0 - 1)^+ + A_1)$.

5. Déduisez-en que si $\mathbb{E}_\pi(X_0) < \infty$, alors $\mathbb{P}_\pi(X_0 = 0) = 1 - \mathbb{E}(A_1)$.

Partie II: Généralisation au cas $\mathbb{E}_\pi(X_0) = +\infty$

Dans cette partie on montre que la relation $\mathbb{P}_\pi(X_0 = 0) = 1 - \mathbb{E}(A_1)$ reste vraie même si $\mathbb{E}_\pi(X_0) = +\infty$.

6. Montrez que $\mathbb{E}_x(T_0) = x\mathbb{E}_1(T_0)$ pour $x \geq 1$.

7. Déduisez-en que $\mathbb{E}_1(T_0) = 1 + \mathbb{E}(A_1)\mathbb{E}_1(T_0)$.

8. Justifiez que $\mathbb{E}_1(T_0) < \infty$ et déduisez-en que $\mathbb{E}_1(T_0) = \frac{1}{1-\mathbb{E}(A_1)}$.

9. Montrez que $\mathbb{E}_0(T_0) = 1 + \mathbb{E}(A_1)\mathbb{E}_1(T_0)$.

10. Déduisez-en que $\mathbb{P}_\pi(X_0 = 0) = 1 - \mathbb{E}(A_1)$.

Partie III: Ajout d'un second serveur

On considère maintenant un second serveur qui est aidé par le premier lorsqu'il est vide. Il obéit donc à la dynamique

$$Y_{n+1} = (Y_n - 1 - \mathbb{1}(X_n = 0))^+ + B_{n+1}$$

où les (B_n) sont i.i.d. et les variables aléatoires X_0, Y_0, (A_k) et (B_k) sont indépendantes. On suppose en outre que $\mathbb{P}(B_1 = k) > 0$ pour $k = 0,1,2,3$.

11. (Y_n) est-elle une chaîne de Markov ? et (X_n,Y_n) ?

12. Si $\mathbb{E}(B_1) < 1$, couplez Y avec une chaîne de Markov récurrente positive $\tilde{Y}$ indépendante de X et telle que $Y \leq \tilde{Y}$.

13. Déduisez de la question précédente que si $\mathbb{E}(A_1), \mathbb{E}(B_1) < 1$ alors (X_n,Y_n) est récurrente positive.

On considère donc maintenant le cas $\mathbb{E}(A_1) < 1 < \mathbb{E}(B_1)$.

14. En procédant de manière analogue aux deux premières questions, montrez que pour tout état initial (X_0,Y_0) :

- $Y_n \to +\infty$ presque sûrement si $\mathbb{E}(B_1) > 2 - \mathbb{E}(A_1)$;
- Y_n revient presque sûrement en 0 si $\mathbb{E}(B_1) < 2 - \mathbb{E}(A_1)$, et le temps de retour est intégrable.

15. Concluez quant au gain de performance dû à l'altruisme du premier serveur.

Partie IV: Récurrence positive dans le cas $\mathbb{E}(A_1) < 1$ et $\mathbb{E}(B_1) < 1 + (1 - 2\mathbb{E}(A_1))^+$

Le but des questions suivantes est de prouver la récurrence positive de (X_n,Y_n) sous la condition $\mathbb{E}(B_1) < 2 - 2\mathbb{E}(A_1)$: on laissera la récurrence positive pour $\mathbb{E}(B_1) < 2 - \mathbb{E}(A_1)$ en problème ouvert. Pour cela on considère la fonction $V(x,y) = x + ay$ et on note $\Delta(x,y) = \mathbb{E}_{(x,y)}(V(X_1,Y_1) - V(x,y))$.

16. Montrez que si $x_0 \geq 1$ et $y_0 \geq 1$, alors

$$\Delta(x_0,y_0) = -(1 - \mathbb{E}(A_1)) + a(\mathbb{E}(B_1) - 1).$$

17. Montrez que si $y_0 \geq 2$, alors

$$\Delta(0,y_0) = \mathbb{E}(A_1) - a(2 - \mathbb{E}(B_1)).$$

18. Montrez que si $x_0 \geq 1$ et $y_0 = 0$, alors

$$\Delta(x_0,y_0) = -(1 - \mathbb{E}(A_1)) + a\mathbb{E}(B_1).$$

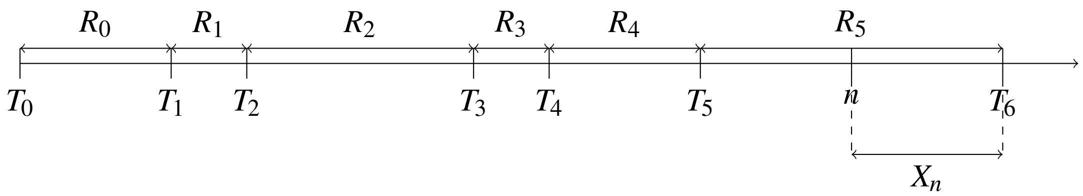
19. Déduisez-en à l'aide du critère de Foster que si

$$\mathbb{E}(B_1) < 2 - 2\mathbb{E}(A_1)$$

alors (X_n,Y_n) est récurrente positive.

9.5 Temps d'attente à un feu rouge

On considère un feu rouge qui ne reste vert qu'une unité de temps. Les temps auxquels ce feu passe au vert sont dénotés par $T_0 = 0 < T_1 < T_2 < \cdots$ et on définit $R_i = T_{i+1} - T_i$ pour $i \geq 0$. On suppose que les variables aléatoires $(R_i, i \geq 0)$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ sont i.i.d. et intégrables avec en outre $\mathbb{P}(R_1 \geq r) > 0$ pour tout $r \in \mathbb{N}$. On définit X_n le temps d'attente d'un piéton qui arrive à l'instant n. Plus précisément, pour $n \geq 1$ on définit $Q(n) \geq 1$ l'unique entier $k \geq 1$ tel que $T_{k-1} < n \leq T_k$, et alors $X_n = T_{Q(n)} - n$.



Partie I: Questions préliminaires

1. Montrez que pour tout $n \geq 1$ on a $X_n = 0 \Leftrightarrow n = T_{Q(n)} \Leftrightarrow n \in \{T_k, k \geq 1\}$.

2. Montrez que

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 1 & \text{si } X_n > 0, \\ R_{Q(n)} - 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Tracez la suite $(R_{Q(n)}, n \geq 1)$. Les variables $(R_{Q(n)}, n \geq 1)$ sont-elles i.i.d. ? Peut-on donc a priori déduire de la relation de récurrence précédente que (X_n) est une chaîne de Markov ?

En fait, on va montrer de deux manières différentes qu'il suffit d'étudier le cas i.i.d..

Partie II: Etude d'une chaîne auxiliaire

On commence par étudier une chaîne de Markov auxiliaire (X'_n) définie de la manière suivante :

$$X'_{n+1} = \begin{cases} X'_n - 1 & \text{si } X'_n > 0, \\ R'_n - 1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où les (R'_n) sont i.i.d., indépendants de X'_0 et de même loi que R_1.

4. Montrez que X' est irréductible et écrivez sa matrice de transition.

5. Montrez que X' est récurrente positive et que sa distribution stationnaire est donnée par

$$\pi_n = \frac{\mathbb{P}(R_1 > n)}{\mathbb{E}(R_1)}, \; n \geq 0.$$

6. On considère un client qui arrive dans le système à l'instant n supposé très grand. A quelle condition est-il vrai que la probabilité qu'il attende k unités de temps vaut environ $\mathbb{P}(R_1 > n)/\mathbb{E}(R_1)$?

7. Expliquez pourquoi, afin de montrer que X est récurrente positive et que sa distribution stationnaire est π, il suffit de montrer que X est une chaîne de Markov de même matrice de transition que X'.

Dans le reste de l'exercice, on montre donc de deux manières différentes que X est une chaîne de Markov de même matrice de transition que X'.

Partie III: Première approche

On montre maintenant le résultat d'une première manière directe.

`A FAIRE: En fait,` $R_{Q(n)} = X_{n+1} + 1$ `si` $X_n = 0$`, donc il suffit de prendre` $\varphi(x_0^\infty) = x_1 + 1$`!`

8. Montrez que pour tout $n \geq 1$, si $X_n = 0$ alors $R_{Q(n)} = \varphi(X_n^\infty)$ avec $\varphi : E^\infty \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ définie par $\varphi(x_0^\infty) = \inf\{n \geq 1 : x_n = 0\}$.

`A FAIRE: Ecrire la correction précise de cette question`

9. Déduisez de la question précédente que pour tout $r \geq 1$, $n \geq 1$ et $x_0^{n-1} \in \mathbb{N}^n$ on a

$$\mathbb{P}(R_{Q(n)} = r \mid X_n = 0, X_0^{n-1} = x_0^{n-1}) = \mathbb{P}(R_1 = r).$$

10. Déduisez de la question précédente que (X_n) est une chaîne de Markov de même matrice de transition que X'.

Partie IV: Deuxième approche

On montre maintenant le même résultat, de manière moins directe mais d'une certaine manière plus intuitive.

11. Montrez que pour tout $n \geq 1$ on a $Q(T_n) = n$.

12. Montrez que si l'on modifie la suite des $(R_{Q(n)}, n \geq 1)$ en dehors des $n \in \{T_k, k \geq 1\}$, alors la dynamique de X ne change pas. Plus précisément, montrez que pour toute suite $(\widehat{R}_n)$ avec $\widehat{R}_{T_k} = R_{Q(T_k)} = R_k$ pour tout $k \geq 0$ on a

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 1 & \text{si } X_n > 0, \\ \widehat{R}_n - 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

13. On considère $(\widetilde{R}_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires i.i.d., de même loi que R_1, et indépendante de $(R_n, n \geq 1)$ et de $(X_n, n \geq 0)$. On définit alors $(\widehat{R}_n)$ de la manière suivante :

$$\widehat{R}_{n+1} = \begin{cases} R_{Q(n)+1} & \text{si } n = T_{Q(n)}, \\ \widetilde{R}_{n+1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrez que la suite $(\widetilde{R}_n, n \geq 1)$ est i.i.d. et indépendante de X_0.

14. Déduisez des questions précédentes que (X_n) est une chaîne de Markov de même matrice de transition que X'.

9.6 Protocole ALOHA

Partie I: Transience d'ALOHA simple

Le protocole ALOHA fonctionne de la manière suivante : lorsque l'on a $x \in \mathbb{N}$ utilisateurs qui ont un message à transmettre, chaque utilisateur essaie de transmettre avec probabilité $p \in]0,1[$ indépendamment de tout le reste. Si exactement un utilisateur a essayé de transmettre, alors la transmission a lieu avec succès et un message est transmis. Sinon, aucun message n'est transmis. Par ailleurs, à chaque unité de temps, de nouveaux utilisateurs arrivent dans le réseau avec un message à transmettre, mais n'essaient de transmettre ce message qu'à partir de l'unité de temps suivant leur arrivée. Le nombre d'utilisateurs qui arrivent à chaque unité de temps forme une suite i.i.d. de loi commune A.

1. Comment faut-il choisir les $(I_{k,n}, k, n \geq 0)$ et les $(A_n, n \geq 0)$ pour que la suite définie par récurrence de la manière suivante :

$$X_{n+1} = X_n + A_{n+1} - \mathbb{1}\left(\sum_{k=1}^{X_n} I_{k,n} = 1\right).$$

décrive bien le nombre de clients dans un système utilisant le protocole ALOHA ?

2. Montrez qu'alors cette suite est une chaîne de Markov et explicitez sa matrice de transition.

On souhaite montrer que (X_n) est transitoire. Pour cela, on considère $K \geq 1$ et (X'_n) la chaîne de Markov suivante, à valeurs dans $\mathbb{Z}$:

$$X'_{n+1} = X'_n + A_{n+1} - \mathbb{1}\left(\sum_{k=1}^{K} I_{k,n} \leq 1\right).$$

3. Montrez en utilisant la loi forte des grands nombres que l'on peut choisir K suffisamment grand pour que $X'_n \xrightarrow{\text{p.s.}} +\infty$. Qu'en concluez-vous quant à la récurrence/transience de (X'_n) ?

4. Déduisez de la question précédente que pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a $\mathbb{P}_x(\forall n \geq 0 : X'_n \geq x) > 0$.

5. Soit $T_K = \inf\{n \geq 0 : X_n = K\}$. Montrez que si $X_0 = X'_0$, alors $X_n \geq X'_n$ pour $n \leq T_K$.

6. Concluez que $X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} +\infty$ et donc que (X_n) est transitoire.

Partie II: Etude plus fine d'ALOHA simple

On montre maintenant un résultat plus fin que la simple transience de (X_n), à savoir qu'en fait, à partir d'un certain instant, il y a tout le temps au moins deux essais de transmission, ce qui implique en particulier que le nombre total de messages transmis est presque sûrement fini. On définit dans la suite (R_n) la suite des temps de record :

$$R_0 = 0 \;\text{ et }\; R_{n+1} = \inf\{k \geq R_n : X_n > X_{R_n}\},\; n \geq 0.$$

On définit aussi $Z_n = \mathbb{1}\left(\sum_{k=1}^{X_n} I_{k,n} > 1\right)$, E_n l'évènement

$$E_n = \{Z_k = 1, k = R_n, \ldots, R_{n+1} - 1\}$$

qu'il y ait toujours au moins deux utilisateurs qui essaient de transmettre entre deux temps de record successifs, et

$$I_n = \mathbb{1}\left(Z_k = 1, k = R_n, \ldots, R_{n+1} - 1\right)$$

l'indicatrice de l'évènement E_n. Dans un premier temps, on cherche à calculer $\mathbb{P}(E_n)$.

7. Montrez que

$$\mathbb{P}_m\left(R_1 = r, Z_0 = \cdots = Z_{r-1} = 1\right) = a_0^{r-1}(1-a_0)q(m)^r$$

avec $a = \mathbb{P}(A_1 = 0)$ et $q(m) = \mathbb{P}_m(Z_0 = 1)$.

8. Déduisez-en que

$$\mathbb{P}_m\left(Z_0 = \cdots = Z_{R_1-1} = 1\right) = \frac{(1-a_0)q(m)}{1-a_0 q(m)}.$$

9. Déduisez-en que

$$\mathbb{P}_m(E_n) = \mathbb{E}_m\left(\frac{(1-a_0)q(X_{R_n})}{1-a_0 q(X_{R_n})}\right).$$

10. Montrez que $X_{R_n} \geq n$ et déduisez-en que

$$1 - \mathbb{P}_m(E_n) \leq \frac{1-q(n)}{1-a_0 q(n)}.$$

11. Déduisez-en que $\mathbb{E}_m\left(\sum_{n\geq 0}(1-I_n)\right) < \infty$ et donc finalement que presque sûrement, il existe $N \geq 0$ tel que $Z_n = 1$ pour tout $n \geq N$.

Partie III: ALOHA amélioré

On peut aussi considérer une variante d'ALOHA, où chaque utilisateur adapte sa probabilité de transmission en fonction du nombre x d'utilisateurs présents : on notera ainsi $p(x)$ la probabilité de transmission quand il y a $x \in \mathbb{N}^*$ utilisateurs présents.

12. Comment faut-il choisir les $(I_{k,n,x}, k, n \geq 0, x \geq 1)$ et les $(A_n, n \geq 0)$ pour que la suite définie par récurrence de la manière suivante :

$$X_{n+1} = X_n + A_{n+1} - \mathbb{1}\left(\sum_{k=1}^{X_n} I_{k,n,X_n} = 1\right).$$

décrive bien le nombre de clients dans un système utilisant le protocole ALOHA amélioré ?

13. Montrez que $p(x) = \frac{1}{x}$ est la probabilité qui maximise la probabilité qu'un seul utilisateur transmette.

Dans les deux questions suivantes on considère donc $p(x) = \frac{1}{x}$.

14. Utilisez le critère de Foster pour montrer que (X_n) est récurrente positive pour $\mathbb{E}(A_1) < e^{-1}$.

15. Utilisez un raisonnement similaire à celui développé dans les questions 1 à 6 pour montrer que (X_n) est transitoire pour $\mathbb{E}(A_1) > e^{-1}$.

9.7 Efficacité d'un plan d'inspection

On considère une ligne de production où chaque bien produit peut avoir un défaut. Afin de détecter les objets qui ont un défaut, on propose le plan suivant qui permet d'éviter d'inspecter chaque objet.

Il y a deux phases : pendant la phase A, la probabilité d'inspecter un objet est $r \in]0,1[$. Dans la phase B, tous les articles sont inspectés. On passe de la phase A à la phase B dès qu'un objet défectueux est détecté. On revient en phase A après avoir observé N objets consécutifs sans défaut. Dans les parties I et II, on suppose que chaque objet est défectueux avec probabilité p, indépendamment les uns des autres.

Partie I: Etude de l'efficacité dans le cas i.i.d.

Soit X_n le processus à valeurs dans $\{E_0, \dots, E_N\}$ où si $j \in \{0, \dots, N-1\}$, E_j signifie que le plan est en phase B avec j objets successifs sans défaut observés, et E_N signifie qu'on est en phase A.

1. Montrez que X est une chaîne de Markov irréductible et dessinez son graphe de transition.

2. Montrez que X est récurrente positive et trouvez sa distribution stationnaire.

On définit l'efficacité E du plan d'inspection comme le rapport sur le long terme entre le nombre d'objets défectueux détectés et le nombre d'objets défectueux :

$$R = \frac{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}\,(\text{objet } k \text{ inspecté et défectueux})}{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}\,(\text{objet } k \text{ défectueux})}.$$

3. Quelle est l'efficacité asymptotique du plan proposé ?

Partie II: Etude de l'utilité dans le cas i.i.d.

On suppose que chaque inspection a un coût $c > 0$, et on définit l'utilité U du plan de la manière suivante :

$$U = R + C \text{ avec } C = \frac{c}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}\,(\text{objet } k \text{ inspecté})\,.$$

4. Peut-on utiliser le théorème ergodique pour calculer le coût asymptotique ?

Dans la suite de cette partie on définit $Y_n = \mathbb{1}\,(\text{objet } n \text{ inspecté})$.

5. Montrez que (X_n, Y_n) est une chaîne de Markov et explicitez ses probabilités de transition.

6. Calculez la distribution invariante de (X_n, Y_n).

7. Déduisez-en le coût asymptotique C, puis formulez le problème d'optimisation qu'il faudrait résoudre pour trouver le paramètre r qui maximise l'utilité du plan.

Partie III: Cas où les occurrences de défauts corrélées

On suppose maintenant que les occurrences de panne ne sont pas indépendantes et suivent une chaîne de Markov telle que l'état d'une pièce est le même que la pièce précédente avec probabilité $z \in]0, 1[$: ainsi, si $p > 1/2$, si une pièce est défectueuse il y a plus de chances que la suivante le soit aussi.

8. (X_n) est-elle encore une chaîne de Markov ? De quelle information supplémentaire a-t-on besoin pour décrire le système à l'aide d'une chaîne de Markov ?

Soit $Y_n = \mathbb{1}\,(\text{pièce } n \text{ défectueuse})$.

9. Montrez que (X, Y) est une chaîne de Markov et décrivez ses probabilités de transition.

9.8 Mélange de carte

`A FAIRE: Ajouter le sujet d'exam. Faire le lien avec le problème du feu rouge ? En effet, la position d'une carte ressemble à la chaîne de ce problème.`

Bibliography

[1] Sergey Brin and Lawrence Page. The anatomy of a large-scale hypertextual web search engine. *Computer Networks and ISDN Systems*, 30(1):107 – 117, 1998. Proceedings of the Seventh International World Wide Web Conference.

[2] Bruce Hajek. Cooling schedules for optimal annealing. *Math. Oper. Res.*, 13(2):311–329, 1988.