Introduction à la Mécanique Céleste et Éléments de Mécanique Spatiale

Édition révisée et augmentée, V2.1

David Mimoun
ISAE-SUPAERO, Toulouse

Septembre 2026

Résumé

Ce cours a pour objectif une introduction à la mécanique céleste et à la mécanique spatiale. Il a deux objectifs principaux : donner d'abord les outils nécessaires à la compréhension et à la résolution des problèmes simples de mécanique spatiale, puis donner quelques éléments d'introduction permettant d'appréhender les outils et les concepts modernes utilisés en mécanique céleste, qui ont beaucoup évolué ces trente dernières années.

Ce cours intègre des contributions du cours de mécanique spatiale de la première année de Supaéro, dont une partie a été rédigée par Benoît Meyssignac, et qui a entre autres objectifs de donner aux élèves les moyens de montrer la chaoticité du mouvement d'Hypérion sur la base de l'article de Wisdom, Peale et Mignard de 1984 (*Icarus*).

Nous voudrions enfin ajouter ici que la partie dynamique de ce cours s'inspire largement de l'enseignement de J. Laskar, de l'IMCCE à l'Observatoire de Paris. Il est largement à la source de l'intérêt que nous portons à ce sujet. Qu'il en soit ici remercié.

DM, août 2010 ; révision septembre 2026.

Avant-propos de l'édition 2026

Ce polycopié reprend, corrige et complète la version du cours IS101 donné à l'ISAE-SUPAERO jusqu'en 2025. Le plan et l'esprit du texte d'origine sont conservés. Les principales évolutions sont les suivantes.

- Un certain nombre d'erreurs ont été corrigées : l'origine de la nutation à 18,6 ans, la définition de UTC et de l'heure GPS, l'itération de Newton pour l'équation de Kepler, le signe de la force dérivant du potentiel, les équations des points L_2 et L_3, le critère de Tisserand, le hamiltonien du pendule.
- Les données numériques ont été mises à jour (planètes naines, distance de Voyager 1, échelles de temps, secondes intercalaires, résonances de Laplace exoplanétaires, missions aux points de Lagrange).
- Des compléments ont été ajoutés, pour la plupart dans des encadrés verts : repères ICRS et échelles de temps relativistes, formules de Napier, sphère d'influence et assistance gravitationnelle, orbites héliosynchrones et inclinaison critique, applications modernes des points de Lagrange, chaînes de résonances exoplanétaires. L'annexe D (formulaire des coniques) a été ajoutée, une annexe de constantes utiles et une annexe d'exercices corrigés ont été ajoutées également.

Les conventions de notation ont été homogénéisées : les vecteurs sont en gras ($\boldsymbol{r}$), $\mu = GM$ désigne le paramètre gravitationnel du corps central (la masse réduite du problème à deux corps est notée m^*), et l'anomalie vraie est notée θ au chapitre 3, ν aux chapitres 4 et 5 et dans l'annexe D, v au chapitre 7 et dans les annexes B et C, selon le contexte historique de chaque chapitre. Quelques figures anciennes, reprises telles quelles, gardent des étiquettes en anglais ou sans accents.

Table des matières

Avant-propos de l'édition 2026 **1**

1 Introduction à la mécanique céleste **7**
1.1 Objet de la mécanique céleste . . . 7
1.2 Quelques rappels historiques . . . 7
1.3 Le Système solaire . . . 10
1.4 Quelques ordres de grandeur utiles . . . 12
1.4.1 Répartition des masses dans le Système solaire . . . 12
1.4.2 Distances typiques dans le Système solaire . . . 12

2 Repères de l'espace et du temps **13**
2.1 Repères de l'espace . . . 13
2.1.1 Coordonnées terrestres . . . 13
2.1.2 Coordonnées horizontales locales . . . 14
2.1.3 Géoïde de référence . . . 15
2.1.4 Coordonnées équatoriales célestes . . . 15
2.1.5 Coordonnées écliptiques . . . 16
2.2 Point vernal . . . 17
2.3 Mouvement de la Terre . . . 19
2.3.1 Mouvement de la Terre autour du Soleil . . . 19
2.3.2 La rotation de la Terre . . . 19
2.3.3 Mouvement de l'axe de la Terre . . . 20
2.4 Repères du temps . . . 21
2.5 Époque et repère de référence . . . 22
2.6 Quelques formules de trigonométrie sphérique . . . 23

3 Rappels de mécanique **25**
3.1 Principe de déterminisme . . . 25
3.2 Équation de Newton . . . 25
3.3 Mouvement dans un champ de gravité central . . . 26
3.3.1 Trajectoire dans un champ de gravité central . . . 27
3.3.2 Géométrie de l'ellipse . . . 29
3.3.3 Énergie totale : l'équation des forces vives . . . 30
3.3.4 Énergie et trajectoire . . . 31
3.3.5 Systèmes dérivant d'un potentiel . . . 31
3.3.6 Troisième loi de Kepler . . . 32
3.3.7 Généralisation au cas d'un corps central à symétrie sphérique . . . 33
3.3.8 Anomalie vraie, anomalie moyenne, anomalie excentrique, équation de Kepler . . . 34
3.4 Équations de Lagrange . . . 36
3.5 Fonction de Lagrange, coordonnées généralisées . . . 37
3.6 Équations de Hamilton . . . 37

3.7 Fonction de Hamilton et énergie . . . 38
3.8 Quelques exemples simples . . . 39
3.8.1 Le pendule simple . . . 39
3.8.2 Le problème de Kepler en formalisme de Lagrange . . . 40

4 Problème à deux corps **40**
4.1 Approche képlérienne . . . 41
4.2 L'orbite dans l'espace : les éléments orbitaux . . . 42
4.3 Rappels sur les coniques . . . 43
4.4 Paramètres cartésiens et paramètres képlériens . . . 43
4.5 Passage du repère périfocal au repère galiléen . . . 43
4.6 Le repère orbital local . . . 45

5 Mouvement à deux corps perturbé **46**
5.1 Première approche . . . 46
5.2 Éléments orbitaux osculateurs . . . 46
5.3 Équations de Gauss . . . 47
5.4 Équations de Lagrange . . . 49
5.5 Équations de Delaunay . . . 50
5.6 Variables de Poincaré . . . 51
5.7 Application : les perturbations d'orbite pour les satellites artificiels . . . 51
5.8 Perturbations gravitationnelles . . . 51
5.8.1 Harmoniques du potentiel terrestre . . . 51
5.8.2 Marées terrestres . . . 53
5.8.3 Attraction luni-solaire . . . 54
5.9 Forces non gravitationnelles . . . 54
5.9.1 Traînée atmosphérique . . . 54
5.9.2 Pression de radiation solaire . . . 55
5.10 Ordres de grandeur . . . 56
5.11 Quels effets prendre en compte ? L'effet du J_2 . . . 56
5.12 Application : les manœuvres . . . 59
5.12.1 Généralités . . . 59
5.12.2 Manœuvres usuelles . . . 59
5.12.3 Transfert de Hohmann . . . 60
5.12.4 Modification du plan de l'orbite . . . 62
5.12.5 Modification de l'orientation de l'orbite dans son plan . . . 62
5.12.6 Modification de la date de passage : le phasage . . . 63
5.13 Sphère d'influence et assistance gravitationnelle . . . 63

6 Le problème à trois corps restreint **64**
6.1 Introduction et hypothèses . . . 65
6.2 Intégrale de Jacobi . . . 67
6.3 Position des points de Lagrange L_4 et L_5 : approche géométrique . . . 70

6.4 Position des points de Lagrange : cas général 73
6.5 Critère de Tisserand 76
6.6 Mouvement autour des points de Lagrange L_4 et L_5 78

7 Couplages et résonances **80**
7.1 Résonances 80
7.2 Le paradigme pendulaire en mécanique céleste 83
7.3 Le couplage spin-orbite : un problème de Kepler perturbé 84
7.4 Mise en équation du problème 84
7.5 Calcul du moment quadrupolaire 85
7.6 Calcul du hamiltonien 86
7.7 Simplification du problème : le cas plan 87
7.8 Un problème de Kepler perturbé 87
7.9 Étude de la rotation du satellite dans le couplage spin-orbite (modèle simplifié) 88
7.10 Intégration du mouvement de rotation 89

8 Perspectives : le chaos dans le Système solaire **95**

Annexes

A Changements de coordonnées canoniques **98**
A.1 Coordonnées canoniques et transformations canoniques 98
A.2 Fonctions génératrices 101
A.3 Résolution par la méthode de Hamilton-Jacobi 102

B Le pendule harmonique et le problème de Kepler : approche hamiltonienne **104**
B.1 Cas du pendule harmonique 104
B.1.1 Écriture du hamiltonien 104
B.1.2 Recherche d'une fonction génératrice 104
B.1.3 Intégration du système 105
B.2 Cas du problème de Kepler 106
B.2.1 Écriture du hamiltonien 106
B.2.2 Recherche d'une fonction génératrice 107
B.2.3 Intégration du système 108
B.2.4 Écriture en variables de Delaunay 109

C Développements en série **111**
C.1 Éviter les séries 111
C.2 Rappel : les fonctions de Bessel 111
C.3 Équation de Kepler et développements en série 112
C.4 Développements en anomalie moyenne M 112

D Principales formules pour les coniques et le mouvement képlérien **115**

E Constantes et données utiles **118**

F Exercices corrigés **120**

Références **123**

1 Introduction à la mécanique céleste

1.1 Objet de la mécanique céleste

Il est évidemment très ambitieux de s'attaquer à un sujet qui est probablement aussi vieux que l'humanité, et d'en donner un aperçu en quelques heures. L'objectif de ce cours n'est donc que de donner une première approche des problématiques et des outils de la mécanique céleste, au travers de l'étude des modèles communément utilisés de nos jours.

1.2 Quelques rappels historiques

Pendant très longtemps, les astronomes ont cherché à retrouver dans les mouvements des corps du Système solaire les périodicités qui leur permettaient de faire des prédictions (pour les dates des éclipses par exemple). Jusqu'à très récemment (fin du XX^{e} siècle !) le mouvement des planètes dans le Système solaire était considéré comme le modèle même de régularité. On restait dans le modèle du « Cosmos » des Grecs qui, par opposition au « Chaos », suppose régularité et prédictibilité.

Par ailleurs, jusqu'à la physique de Newton, les modèles célestes (y compris les modèles héliocentriques) étaient uniquement descriptifs et cinématiques. La rupture principale de la physique vient du fait que l'on peut désormais prédire les trajectoires des planètes, et que, par voie de conséquence, on comprend que les trajectoires idéales sont perturbées par l'ensemble des autres corps du Système solaire. Toutefois, après les calculs de Laplace et de Lagrange, puis de Le Verrier, montrant la stabilité à long terme des mouvements séculaires des planètes externes telles que Jupiter (cf. [6]), on était revenu à la conception d'un Système solaire stable à long terme, malgré les évolutions séculaires des orbites planétaires.

Il n'en est rien. Les résultats obtenus depuis la fin des années 1980 (Laskar 1989, Sussman et Wisdom 1992) montrent au contraire que le mouvement des planètes lui-même est imprédictible (non pas du fait de l'accumulation des erreurs numériques, mais intrinsèquement) et qu'il est impossible de prévoir son évolution au-delà de 100 millions d'années environ, ce qui est très court comparé aux 4,6 milliards d'années d'existence du Système solaire.

Quelques repères historiques

Le modèle pythagoricien (vers 500 av. J.-C.). Les sept objets mobiles (Soleil, cinq planètes et Lune) sont attachés à sept sphères concentriques transparentes (figure 1.1). Le philosophe grec Aristote pensait que les cieux étaient composés de 55 sphères cristallines concentriques. À chacune de ces sphères étaient attachés des objets célestes tournant à des vitesses différentes. La Terre était au centre (modèle géocentrique).

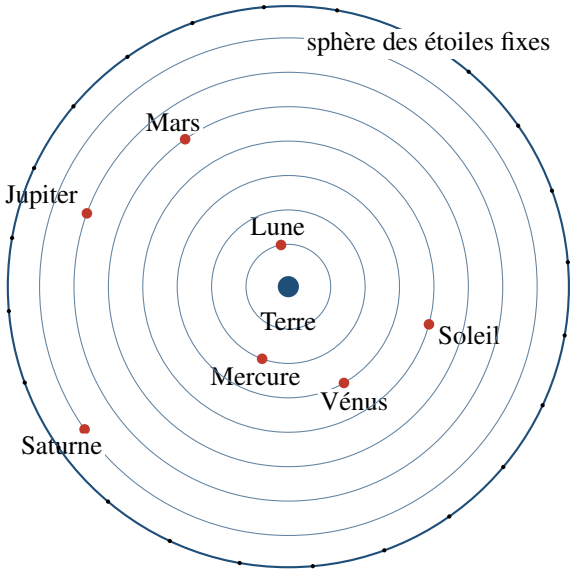
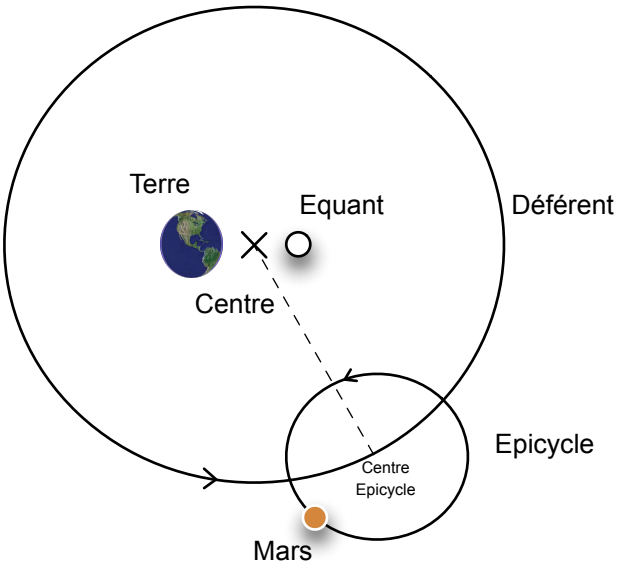


FIGURE 1.1 – Le modèle des sphères concentriques : la Terre est immobile au centre, les astres errants sont portés par des sphères emboîtées, les étoiles « fixes » par la sphère extérieure.

Le système ptoléméen (vers 150 apr. J.-C.). La théorie qui prévalut en Europe pendant de longs siècles a été proposée par Ptolémée dans son *Almageste*, vers 150 apr. J.-C. La Terre est immobile au centre de l'Univers ; les étoiles sont piquées sur une large sphère externe qui tourne rapidement. Chaque planète est portée par un petit cercle, l'*épicycle*, dont le centre parcourt un grand cercle, le *déférent*, légèrement excentré par rapport à la Terre ; le mouvement est uniforme non pas vu du centre du déférent, mais vu du point symétrique de la Terre par rapport au centre du déférent, l'*équant* (figure 1.2). Ce modèle purement cinématique est remarquablement efficace : la combinaison déférent-épicycle reproduit très correctement le mouvement apparent rétrograde des planètes (figure 1.3). Elle le doit au choix des fréquences, que Ptolémée tire de l'observation : pour une planète supérieure, l'épicycle est parcouru en un an et son rayon reste parallèle à la direction du Soleil ; pour Mercure et Vénus, c'est le centre de l'épicycle qui suit le Soleil. Le modèle reproduit ainsi, en orbites circulaires, le mouvement héliocentrique de la planète vu depuis la Terre (figure 1.5). L'équant rend compte, à l'ordre un en excentricité, de la loi des aires que Kepler ne formulera que quinze siècles plus tard. Sa précision, suffisante pour les tables astronomiques jusqu'à la Renaissance, et son accord avec la physique d'Aristote, reprise par la théologie médiévale, expliquent sa longévité de près de 1500 ans.



(a) Déférent excentrique, épicycle et équant.



(b) Les sphères du monde selon la *Cosmographia* de Petrus Apianus (1524).

FIGURE 1.2 – Le modèle ptoléméen. Le mouvement rétrograde apparaît quand la planète parcourt la partie intérieure de son épicycle ; le mouvement est uniforme vu de l'équant, symétrique de la Terre par rapport au centre du déférent.

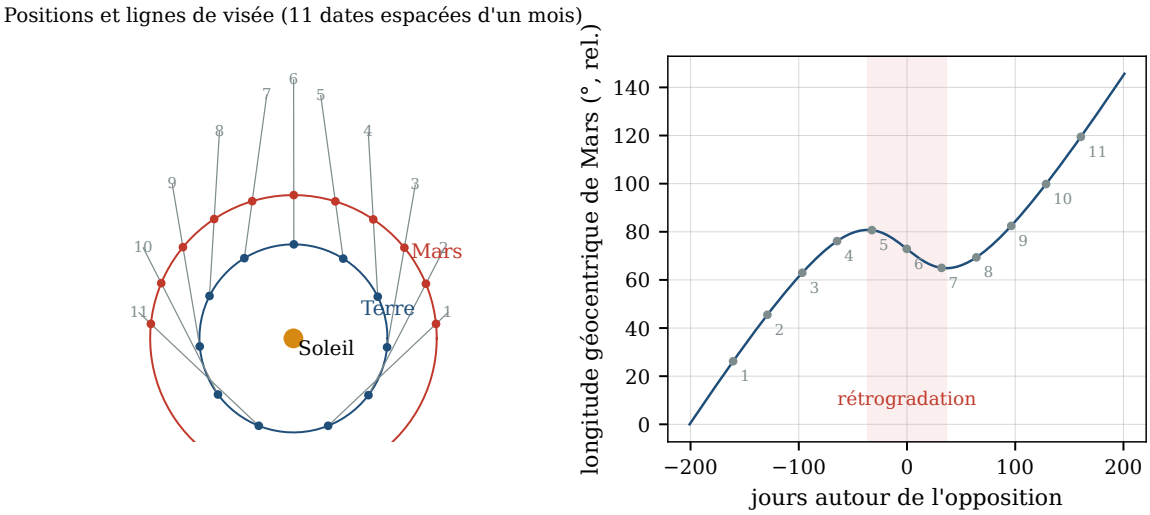


FIGURE 1.3 – Vu de la Terre, le mouvement apparent de Mars est rétrograde autour de l'opposition (calcul sur orbites circulaires : $a_{\text{Mars}} = 1{,}52$ UA, $T_{\text{Mars}} = 1{,}88$ an). À gauche, positions de la Terre et de Mars et lignes de visée ; à droite, longitude géocentrique de Mars : elle décroît pendant environ 70 jours.

Le calendrier métonique. Le cycle dit de Méton, ou cycle métonique, est un commun multiple approximatif de l'année solaire et du mois lunaire. Au bout de dix-neuf ans, les mêmes dates de l'année correspondent aux mêmes phases de la Lune : dix-neuf années tropiques (6939,60 j) et 235 mois synodiques (6939,69 j) ne diffèrent que de deux heures environ. L'astronome grec Méton avait déjà remarqué cette coïncidence vers −432, comme le fit l'astronome chaldéen Kidinnu vers −380. Le cycle de Méton est employé dans les calendriers luni-solaires : la plupart des années sont des années lunaires de douze mois, mais sept des dix-neuf années possèdent un mois supplémentaire, dit intercalaire ou *embolismique* (figure 1.4). Ce calendrier, connu dans l'Antiquité, a été repris par les Juifs lors de l'Exil de Babylone (il est toujours en vigueur), et servait de base à la détermination de la Pâque chrétienne avant le concile de Nicée.

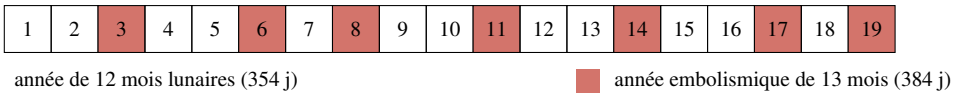
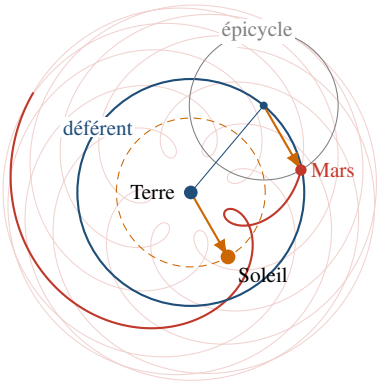


FIGURE 1.4 – La répartition des sept années embolismiques dans le cycle métonique de 19 ans (calendrier hébraïque : années 3, 6, 8, 11, 14, 17 et 19).

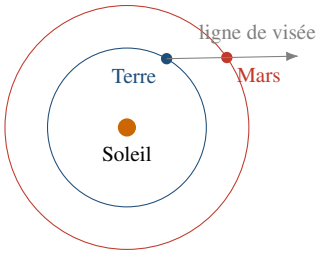
Aujourd'hui le cycle de 19 ans sert toujours de base au *comput* (calcul) de la lune théorique sur laquelle est fondée la détermination de la date de Pâques (Pâques est célébrée le dimanche qui suit le quatorzième jour de la Lune qui atteint cet âge au 21 mars ou immédiatement après).

Le calendrier musulman a supprimé les années embolismiques, ce qui a pour effet de désynchroniser le calendrier par rapport à l'année solaire (l'année de douze mois lunaires est plus courte de onze jours environ). De plus, l'observation directe du premier croissant reste largement utilisée pour l'ajustement du calendrier, même si un débat est encore en cours sur l'utilisation du calcul dans sa détermination.

La révolution copernicienne. En 1543, Copernic formula un autre modèle d'Univers, dans lequel la Terre tourne autour du Soleil : le modèle héliocentrique. Les orbites des planètes sont toujours circulaires (et Copernic conserve d'ailleurs de petits épicycles pour rendre compte des irrégularités), mais dans ce modèle le mouvement rétrograde n'est plus qu'un effet de perspective, lié au dépassement de la planète externe par la Terre (figure 1.5). Il faudra attendre Kepler (1609) pour les orbites elliptiques, et Newton (1687) pour l'explication dynamique.



Système de Ptolémée (Mars) : un déférent et un seul épicycle, parcouru en un an



Système de Copernic : la rétrogradation vient du dépassement

FIGURE 1.5 – Mars dans le système de Ptolémée (à gauche) et dans celui de Copernic (à droite). À gauche, le centre de l'unique épicycle parcourt le déférent en 1,88 an et la planète parcourt l'épicycle en un an, le rayon de l'épicycle restant parallèle à la direction Terre-Soleil (flèches orange). La trajectoire géocentrique (en clair sur quinze ans, en foncé sur les dix-sept derniers mois) fait une boucle à chaque opposition, tous les 2,14 ans. Les rayons et les périodes sont ceux des orbites de la Terre et de Mars, supposées circulaires.

1.3 Le Système solaire

Le Système solaire est composé du Soleil, de quatre planètes telluriques internes (Mercure, Vénus, la Terre, Mars), d'une ceinture d'astéroïdes composée de petits corps rocheux (parmi lesquels des corps de masse respectable, tels Cérès), de deux planètes géantes gazeuses (Jupiter et Saturne), de deux géantes de glaces (Uranus et Neptune) et d'une seconde ceinture d'objets glacés, appelée ceinture de Kuiper, qui s'étend d'environ 30 à 55 UA (figures 1.6 et 1.7).

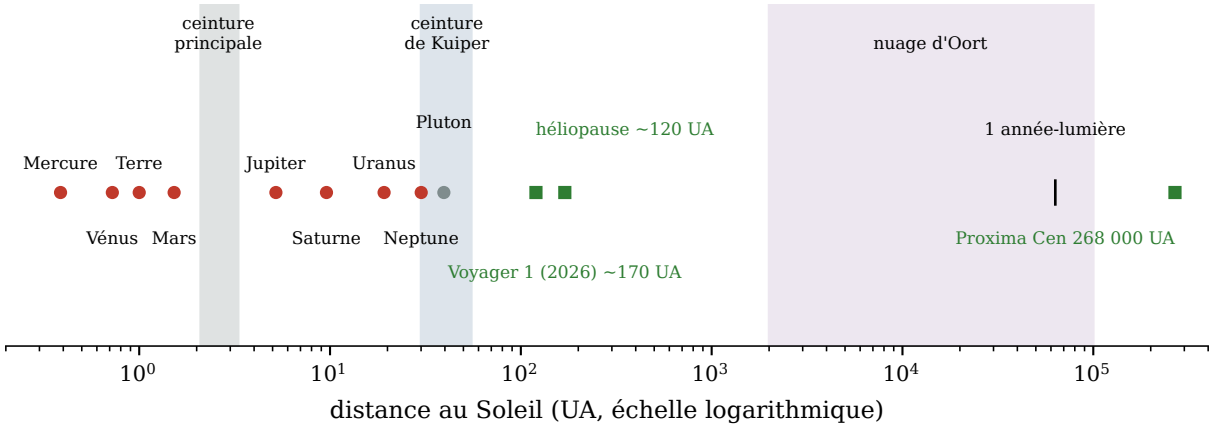


FIGURE 1.6 – Les différentes échelles du Système solaire, en échelle logarithmique.

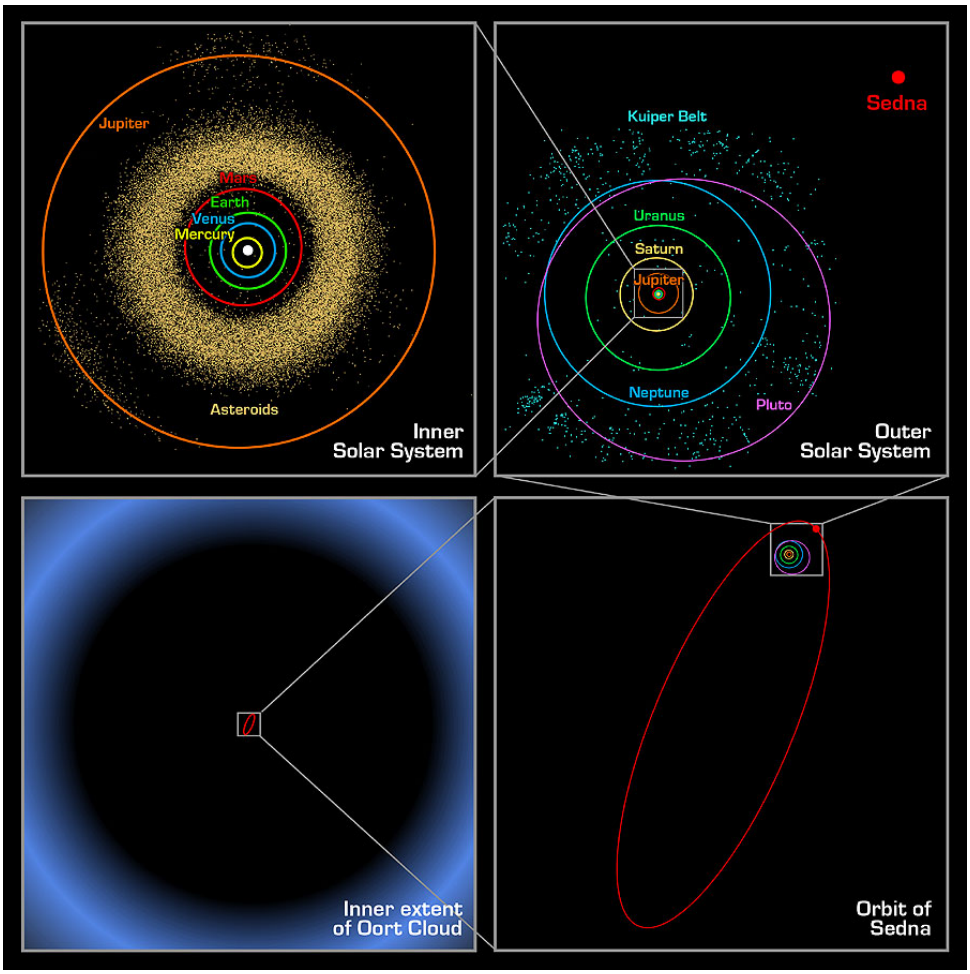


FIGURE 1.7 – Les mêmes échelles, vues du dessus : Système solaire interne et ceinture principale, planètes externes et ceinture de Kuiper, nuage d'Oort, et l'orbite de Sedna (crédit : NASA/JPL-Caltech).

Au-delà de cette ceinture, aux confins du Système solaire, on trouve le disque des objets épars, puis un vaste réservoir sphérique, le nuage d'Oort (du nom de Jan Oort, qui en a proposé l'existence en 1950), dont l'extension est estimée entre quelques milliers et environ cent mille unités astronomiques. C'est de ce nuage que proviennent la plupart des comètes à longue période qui, déstabilisées par des perturbations gravitationnelles d'origines diverses (marées galactiques, passages d'étoiles), « tombent » vers le Système solaire interne.

Le Système solaire comprend également :

- **des planètes naines**. L'Union astronomique internationale en reconnaît officiellement cinq depuis 2008 : Cérès, le plus grand objet de la ceinture d'astéroïdes ; Pluton, premier objet découvert de la ceinture de Kuiper (1930), déchu en 2006 de son statut de planète parce qu'il n'a pas « nettoyé » le voisinage de son orbite ; Hauméa et Makémaké, objets de la ceinture de Kuiper ; et Éris, objet du disque épars, un peu plus massif que Pluton mais légèrement plus petit. Une dizaine d'autres candidats sont sérieux (Gonggong, Quaoar, Sedna, Orcus). Les planètes naines orbitant au-delà de Neptune, ce qui est le cas de quatre d'entre elles, sont également classées comme *plutoïdes* ;
- **un nombre très élevé de petits corps** de masses, compositions, formes et orbites très diverses : astéroïdes (plus de 1,4 million numérotés ou en attente de numérotation en 2026), comètes, poussières, gaz interplanétaire, etc.

Toutes les planètes, excepté la Terre, portent les noms de dieux et déesses de la mythologie gréco-romaine. Par extension, le terme « système solaire » (sans majuscules) est parfois employé pour désigner d'autres systèmes planétaires, mais on préfère parler de « système stellaire » ou de « système planétaire ». On connaît en 2026 plus de 6000 planètes extrasolaires confirmées.

1.4 Quelques ordres de grandeur utiles

1.4.1 Répartition des masses dans le Système solaire

Le tableau 1.1 présente la répartition des masses dans le Système solaire.

Corps	Masse	Commentaires
Soleil	99,86 %	la quasi-totalité de la masse
Planètes	0,135 %	Jupiter pour l'essentiel (0,095 %)
Le reste	0,005 %	satellites, petits corps, gaz, poussières, comètes

TABLE 1.1 – Répartition des masses dans le Système solaire.

On en déduit aisément qu'au premier ordre, la dynamique des objets du Système solaire est régie par le Soleil, et que Jupiter est le perturbateur principal.

1.4.2 Distances typiques dans le Système solaire

Quelques ordres de grandeur utiles pour comprendre les distances en jeu en mécanique céleste figurent au tableau 1.2. On y a fait figurer les distances-lumière, utiles pour comprendre les contraintes de communication avec les sondes spatiales : une commande envoyée à un rover martien met entre 3 et 22 minutes à arriver, et le pilotage « en temps réel » est impossible.

Durée (lumière)	Distance	Exemple
1,3 seconde	384 000 km	Terre-Lune (2,6 s aller-retour)
3,2 minutes	$58 \cdot 10^6$ km	Mercure-Soleil (distance moyenne)
8,3 minutes	$149{,}6 \cdot 10^6$ km	Terre-Soleil (1 UA)
43 minutes	$778 \cdot 10^6$ km	Jupiter-Soleil (5,2 UA)
4,2 heures	$4{,}5 \cdot 10^9$ km	Neptune-Soleil (30 UA)
$\simeq$ 23,5 heures	$\simeq$ 170 UA	Voyager 1 en 2026
1 an	63 241 UA	1 année-lumière
4,24 ans	268 000 UA	Proxima du Centaure

TABLE 1.2 – Distances typiques dans le Système solaire et durées de propagation de la lumière.

Complément : vitesses typiques

Les vitesses orbitales se déduisent des distances par la troisième loi de Kepler (chapitre 3) : la Terre parcourt son orbite à 29,8 km/s, Mercure à 47,4 km/s, Jupiter à 13,1 km/s et Neptune à 5,4 km/s. Un satellite en orbite basse terrestre se déplace à environ 7,7 km/s (une période de 90 minutes), un satellite géostationnaire à 3,07 km/s. Les vitesses de libération valent 11,2 km/s à la surface de la Terre, 2,4 km/s à la surface de la Lune, 5,0 km/s pour Mars et 618 km/s à la surface du Soleil. Enfin, pour quitter le Système solaire depuis l'orbite terrestre, il faut atteindre 42,1 km/s par rapport au Soleil, soit un supplément de 12,3 km/s par rapport à la vitesse orbitale de la Terre : c'est ce que les assistances gravitationnelles permettent d'obtenir à moindre coût (section 5.13).

2 Repères de l'espace et du temps

2.1 Repères de l'espace

2.1.1 Coordonnées terrestres

Imaginons un cercle tracé à la surface d'une sphère et dont le plan contient l'axe des pôles. Un tel cercle, qui passe par le pôle Nord et le pôle Sud, est appelé *méridien*. Pour n'importe quel point de la surface de la Terre, on peut définir un méridien. Le méridien origine est historiquement celui de la lunette méridienne d'Airy, au Royal Observatory de Greenwich, en Angleterre ; le méridien de référence des systèmes géodésiques modernes (IERS, WGS 84) passe une centaine de mètres (102 m) plus à l'est. La *longitude* λ est exprimée en degrés, minutes et secondes d'arc, de 0 à 180° Est ou Ouest à partir du méridien origine. Par exemple, la longitude de Toulouse est 1°26′ E, celle de l'ISAE-SUPAERO 1°28′ E.

De la même façon, on peut définir un grand cercle dont tous les points sont équidistants des pôles, appelé *équateur*. Les cercles tracés sur la sphère dans des plans parallèles à l'équateur définissent les *parallèles*. La *latitude* φ est l'angle entre le plan de l'équateur et la verticale du lieu, c'est-à-dire la normale à l'ellipsoïde de référence ; pour une Terre sphérique, c'est l'angle, vu du centre de la Terre, entre l'équateur et le point considéré. Elle s'exprime de $-90°$ (S) à $+90°$ (N). La latitude de Toulouse est 43°36′ N (figure 2.1).

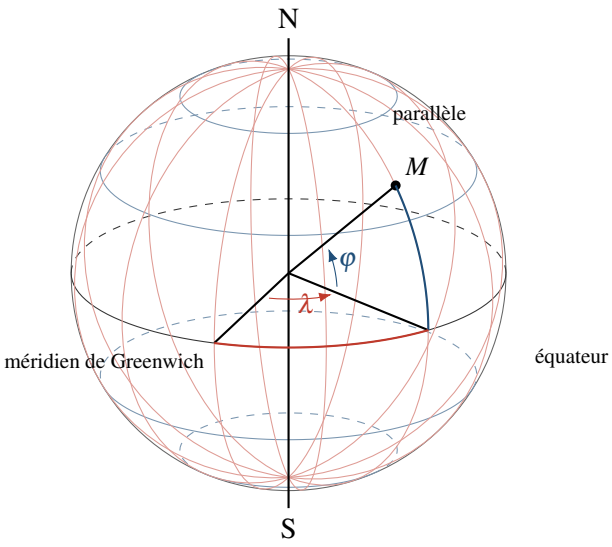


FIGURE 2.1 – Latitude φ et longitude λ d'un point M ; parallèles et méridiens.

Un degré de latitude vaut environ 111 km (110,6 km à l'équateur, 111,7 km aux pôles, la Terre étant aplatie), et une minute d'arc de méridien définit historiquement le mille nautique (fixé par convention à 1 852 m depuis 1929). Un degré de longitude vaut $111 \cos\varphi$ km, soit 80 km à la latitude de Toulouse.

2.1.2 Coordonnées horizontales locales

Les coordonnées horizontales locales sont relatives à un lieu de latitude et de longitude données (figure 2.2). Le plan de référence est le plan horizontal local (perpendiculaire à la verticale du lieu, matérialisée par le fil à plomb). La direction d'un astre est repérée par sa *hauteur* h au-dessus de l'horizon (ou, de manière équivalente, sa *distance zénithale* $z = 90° - h$) et par son *azimut* a, angle compté dans le plan horizontal à partir d'une direction origine.

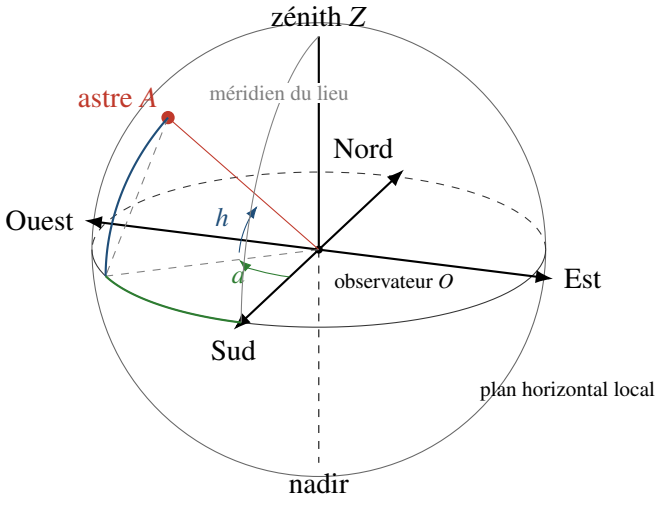


FIGURE 2.2 – Coordonnées horizontales locales : azimut a et hauteur h. Le zénith est la direction opposée à la verticale descendante.

Deux conventions coexistent pour l'azimut et il faut toujours préciser laquelle on utilise. Les astronomes français comptent traditionnellement l'azimut à partir du Sud, positivement vers l'Ouest (sens rétrograde) ; les géodésiens, les navigateurs et la plupart des logiciels le comptent à partir du Nord, positivement vers l'Est (tableau 2.1).

	Nord	Est	Sud	Ouest
Azimut, origine Sud vers l'Ouest (astronomie)	180°	270°	0°	90°
Azimut, origine Nord vers l'Est (géodésie, navigation)	0°	90°	180°	270°
Hauteur	0	0	0	0

TABLE 2.1 – Les points cardinaux en coordonnées horizontales locales, selon les deux conventions d'azimut.

2.1.3 Géoïde de référence

Une fois ces axes définis « en principe », il faut se poser la question de l'origine des axes ainsi que de leur orientation précise. La Terre est un objet dynamique : mouvements des océans et de l'atmosphère, dérive des continents, marées terrestres, rebond post-glaciaire. Les répartitions de masse à l'intérieur de la Terre solide, ainsi que les effets de marée qui les modifient dans le temps, font que l'objet « Terre » est loin d'être non seulement une sphère parfaite, mais aussi un ellipsoïde parfait. Cela se traduit en pratique par des mouvements de la croûte terrestre et de la répartition de masse sous-jacente, qui entraînent des variations de l'orientation du champ de gravité à la surface de la Terre, et donc du plan horizontal local (figure 2.3).

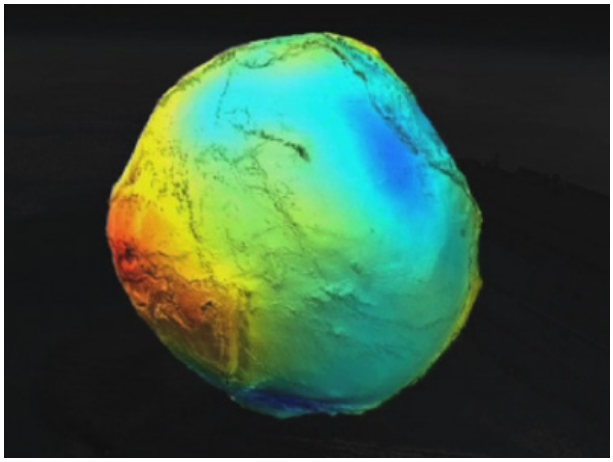


FIGURE 2.3 – Le géoïde terrestre mesuré par le satellite GOCE (crédit ESA/HPF/DLR). Les écarts à l'ellipsoïde, de l'ordre de ± 100 m, sont ici très fortement exagérés.

On appelle *géoïde* la surface équipotentielle du champ de pesanteur qui coïncide avec le niveau moyen des mers. Le géoïde étant une surface irrégulière, on utilise comme référence un *système géodésique*, en pratique une représentation ellipsoïdale de la surface terrestre qui minimise l'écart au géoïde, et on exprime les latitudes, longitudes et hauteurs par rapport à cet ellipsoïde conventionnel. La plupart des systèmes reposent sur un ellipsoïde de révolution choisi par convention et défini par son centre O, son demi-grand axe a et son coefficient d'aplatissement $f = (a-b)/a$.

L'ITRS (*International Terrestrial Reference System*), dont les réalisations successives sont les ITRF (la dernière est l'ITRF2020), constitue le système géodésique le plus précis à l'échelle mondiale (précision millimétrique, avec un modèle de vitesse des stations pour suivre la tectonique des plaques). Le WGS 84 (*World Geodetic System 1984*) est le système de référence du GPS ; il est aujourd'hui aligné sur l'ITRF au centimètre près. Son ellipsoïde a pour paramètres $a = 6\,378\,137$ m et $1/f = 298{,}257\,223\,563$.

2.1.4 Coordonnées équatoriales célestes

Si l'on veut se débarrasser des problèmes liés à l'utilisation d'un repère local, pour repérer un objet dans le ciel en s'affranchissant de l'heure ou de la position sur la Terre, on utilisera plutôt un système

de *coordonnées équatoriales* (figure 2.4). Dans ce cas, le plan de référence est le plan de l'équateur (en projection sur la sphère céleste), et l'axe Nord-Sud est l'axe des pôles célestes. Le point origine s'appelle le *point vernal* γ (voir section 2.2). L'*ascension droite* α est l'angle mesuré, le long de l'équateur céleste et vers l'Est, entre le point vernal et la projection de l'objet sur l'équateur ; elle se mesure traditionnellement en heures, minutes et secondes (24 h = 360°, soit 1 h = 15°). L'angle entre l'équateur céleste et l'objet s'appelle la *déclinaison* δ ; elle se mesure en degrés, positive pour les objets situés dans l'hémisphère nord et négative pour les autres.

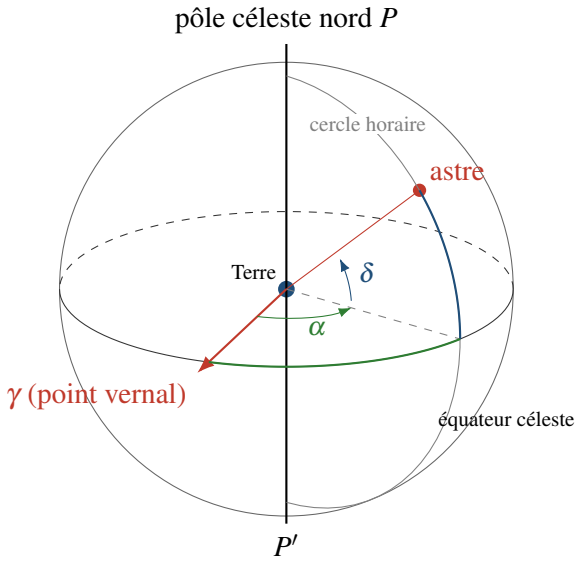


FIGURE 2.4 – Coordonnées équatoriales célestes : ascension droite α et déclinaison δ.

2.1.5 Coordonnées écliptiques

L'*écliptique* est le plan de l'orbite de la Terre autour du Soleil, c'est-à-dire le grand cercle décrit par le Soleil sur la sphère céleste au cours de l'année. Il est incliné sur l'équateur céleste de l'*obliquité* $\varepsilon = 23°26'$ (23,44°), et les deux plans se coupent le long de la ligne des équinoxes $\gamma\gamma'$. Les coordonnées écliptiques géocentriques utilisent l'écliptique comme plan de référence et le point vernal comme origine : la *longitude écliptique* λ est comptée le long de l'écliptique vers l'Est, la *latitude écliptique* β de part et d'autre de l'écliptique (figure 2.5). Ces coordonnées sont bien adaptées aux corps du Système solaire, dont les orbites sont toutes proches de l'écliptique.

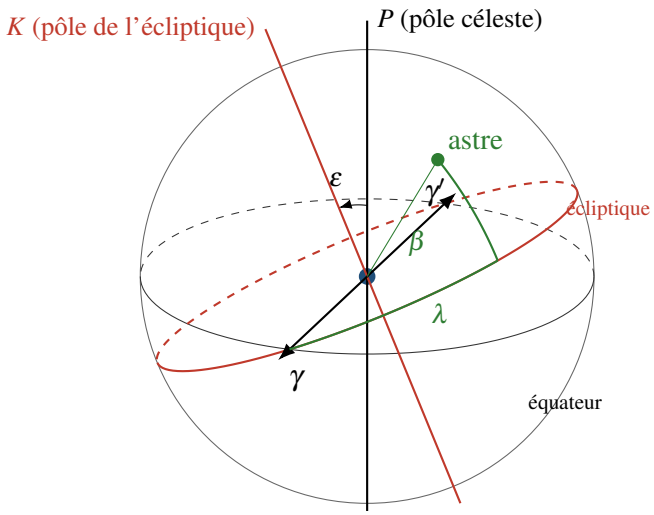


FIGURE 2.5 – Coordonnées écliptiques géocentriques : équateur, écliptique, obliquité ε, longitude λ et latitude β écliptiques.

De la même façon, si l'on s'intéresse aux mouvements dans le Système solaire, on pourra utiliser des coordonnées écliptiques *héliocentriques*, c'est-à-dire centrées sur le Soleil (figure 2.6). Cela est utile par exemple pour les trajectoires des planètes, ou bien pour celles des sondes spatiales dans la partie héliocentrique de leur trajet. Dans ce cas, l'axe principal est l'axe passant par le centre du Soleil et perpendiculaire au plan de l'écliptique, et les coordonnées sont appelées longitude et latitude écliptiques héliocentriques.

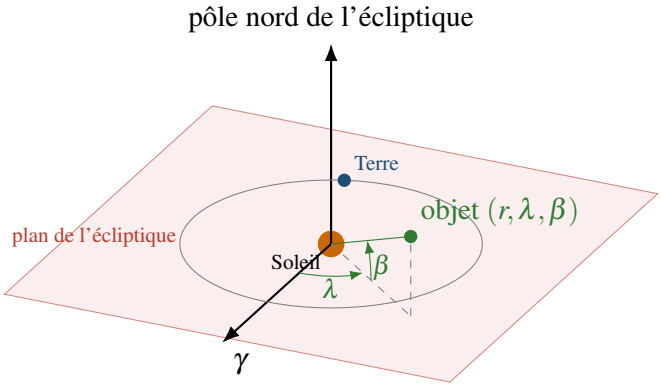


FIGURE 2.6 – Coordonnées écliptiques héliocentriques.

2.2 Point vernal

Par définition, si l'on se place dans un repère géocentrique, le Soleil se trouve toujours sur le cercle écliptique. Les plans de référence équatorial et écliptique étant définis de manière naturelle, il convient de déterminer le point de référence pour fixer les repères (et concrètement, donner une droite de référence pour la mesure des angles). Ce point origine s'appelle le *point vernal* γ : c'est le nœud ascendant de l'écliptique sur l'équateur, c'est-à-dire la direction du Soleil au moment de l'équinoxe de mars (vers le 20 mars), lorsque celui-ci passe de l'hémisphère sud à l'hémisphère nord (figures 2.7 et 2.8). Le symbole γ rappelle la constellation du Bélier, où se trouvait ce point à l'époque d'Hipparque ; du fait de la précession (section 2.3.3), il est aujourd'hui dans les Poissons.

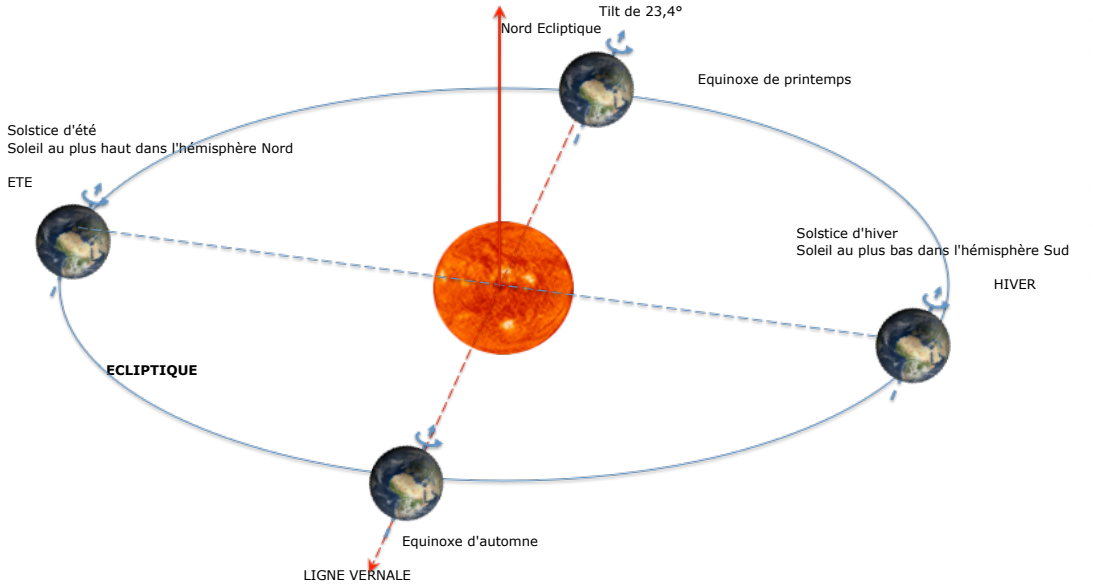


FIGURE 2.7 – Mouvement de la Terre autour du Soleil, saisons et point vernal. L'axe de rotation garde une direction fixe dans l'espace (inclinaison $\varepsilon = 23{,}44°$ sur la normale à l'écliptique) ; le périhélie a lieu début janvier ($r = 0{,}983$ UA) et l'aphélie début juillet ($r = 1{,}017$ UA), positions que la figure ne représente pas. Au solstice de décembre, le Soleil atteint sa déclinaison minimale ($-23°26'$) : il est au plus bas dans le ciel de l'hémisphère Nord et au plus haut dans celui de l'hémisphère Sud.

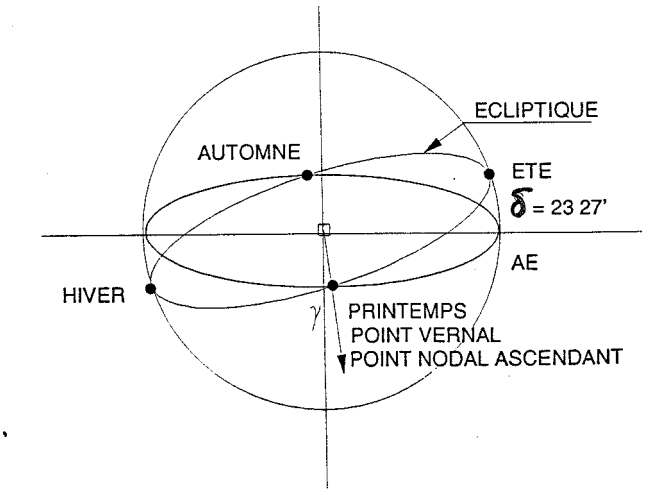


FIGURE 2.8 – Sur la sphère céleste, l'écliptique coupe l'équateur en deux points ; le point vernal γ est le nœud ascendant, direction du Soleil à l'équinoxe de mars. Les positions du Soleil aux solstices sont à $\pm 23°26'$ de déclinaison (la figure, plus ancienne, indique $23°27'$, valeur du début du XX^{e} siècle ; AE désigne l'équateur céleste).

Avec cette définition, on peut exprimer les coordonnées du Soleil aux instants remarquables de l'année dans les repères équatorial et écliptique (tableau 2.2).

Direction du Soleil	Équinoxe (mars)	Solstice (juin)	Équinoxe (sept.)	Solstice (déc.)
α	0 h	6 h	12 h	18 h
δ	0°	$+23°26'$	0°	$-23°26'$
λ	0°	90°	180°	270°
β	0°	0°	0°	0°

TABLE 2.2 – Coordonnées équatoriales (α, δ) et écliptiques (λ, β) de la direction du Soleil aux équinoxes et aux solstices. Le point vernal correspond à la première colonne.

2.3 Mouvement de la Terre

Tout d'abord, il n'est pas inutile d'introduire quelques définitions. Le terme « rotation » se réfère au mouvement d'un objet autour de son axe propre, tandis que le terme « révolution » se réfère au mouvement de son centre de masse autour d'un autre objet. La *rotation* de la Terre autour de son axe par rapport aux étoiles a une période de 86 164,1 s, soit 236 s de moins que le jour solaire moyen. L'inclinaison de l'axe par rapport à la normale au plan de l'écliptique (obliquité) est de 23,44°. La *révolution* de la Terre autour du Soleil dure environ 365,25 jours solaires moyens (la valeur précise est donnée ci-dessous ; la valeur ronde de 365,25 j définit l'année julienne, unité conventionnelle).

2.3.1 Mouvement de la Terre autour du Soleil

La Terre parcourt son orbite en 365 jours, 6 heures, 9 minutes et 10 secondes par rapport aux étoiles (*année sidérale*, 365,2564 j). Du fait de l'excentricité de son orbite ($e = 0{,}0167$), sa vitesse varie entre 29,29 et 30,29 km/s au cours de l'année. La durée qui sépare deux passages consécutifs du Soleil au point vernal, l'*année tropique*, est légèrement plus courte (365 jours, 5 heures, 48 minutes et 45 secondes, soit 365,2422 j), car le point vernal recule d'environ $50''$ par an du fait de la précession (voir ci-dessous). C'est l'année tropique qui règle le rythme des saisons et donc le calendrier : les 5 heures et 48 minutes excédentaires justifient un jour supplémentaire tous les quatre ans, et la correction grégorienne (suppression de trois années bissextiles tous les 400 ans) rattrape les onze minutes de différence avec 365,25 j.

2.3.2 La rotation de la Terre

Par rapport aux étoiles, la Terre fait un tour sur elle-même en 86 164,1 s (*jour sidéral*, 23 h 56 min 4 s). Après un jour, le mouvement de la Terre sur son orbite autour du Soleil (un peu moins de 1° par jour) décale le moment où il est midi en un méridien donné : il faut à la Terre environ 4 minutes de rotation supplémentaire pour ramener le Soleil au méridien (figure 2.9). Le *jour solaire moyen* de 24 h, c'est-à-dire 86 400 s, est le temps moyen, au cours de l'année, qui sépare deux passages consécutifs du Soleil au méridien d'un lieu donné. Le jour solaire vrai s'écarte de cette moyenne de -21 s (mi-septembre) à $+30$ s (fin décembre) au cours de l'année (excentricité de l'orbite et obliquité), ce qui est décrit par l'*équation du temps*.

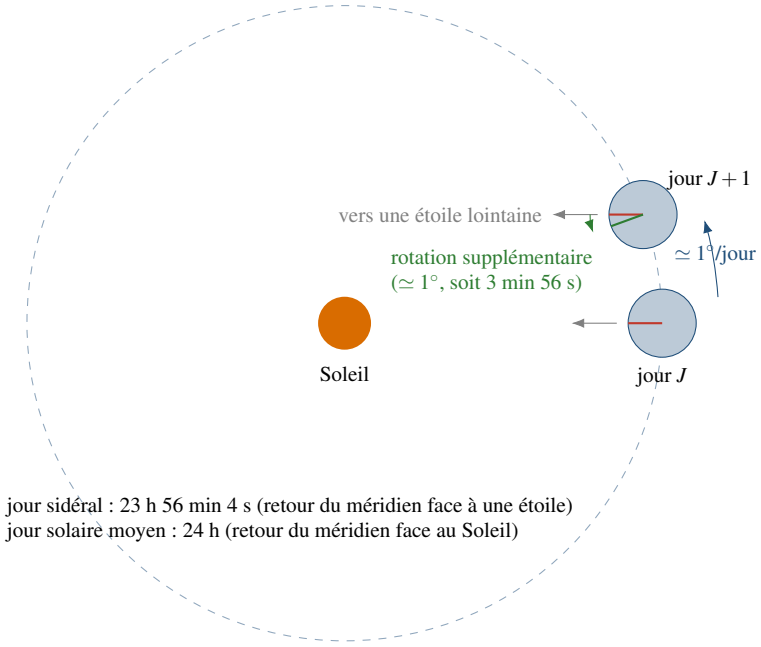


FIGURE 2.9 – Jour sidéral et jour solaire : l'angle parcouru sur l'orbite est exagéré.

2.3.3 Mouvement de l'axe de la Terre

Les forces associées à la rotation de la Terre impliquent une déformation de la Terre à l'équateur (bourrelet équatorial, aplatissement $f \simeq 1/298$). L'action des forces de marée de la Lune et du Soleil sur ce bourrelet équatorial produit un couple qui, s'appliquant à un gyroscope, entraîne la *précession* de l'axe de la Terre autour de la normale à l'écliptique (figure 2.10). Cette précession, dite des équinoxes, a une période d'environ 25 772 ans (50,3″ par an). Si aujourd'hui le pôle Nord céleste indique l'étoile polaire, il passera près d'Alderamin (α Cep) vers l'an 7500, de Deneb vers l'an 10000 et de Véga vers l'an 14000 ; il indiquait Thuban (α Dra) vers 2800 av. J.-C., à l'époque des pyramides (figure 2.11).

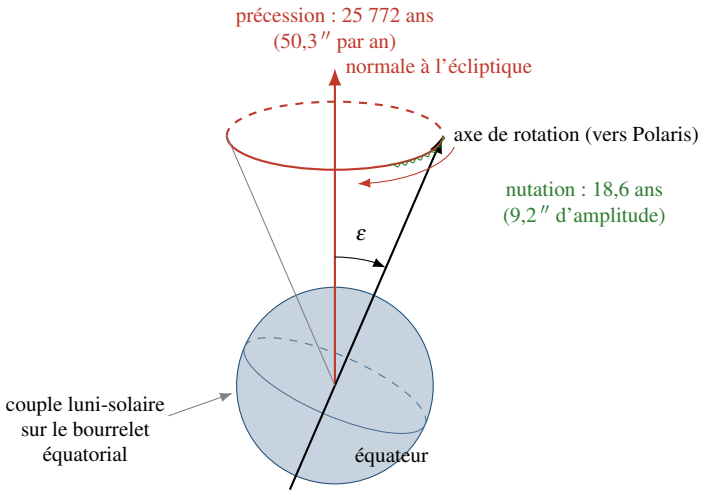


FIGURE 2.10 – Précession et nutation de l'axe de rotation de la Terre.

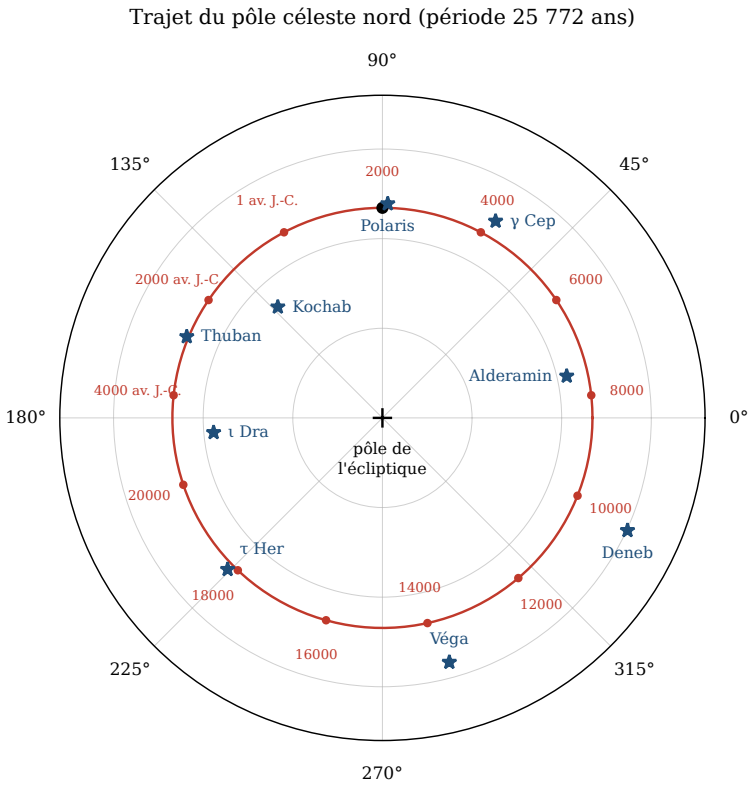


FIGURE 2.11 – Trajet du pôle céleste nord parmi les étoiles, dans un repère centré sur le pôle de l'écliptique (calcul à partir des coordonnées J2000 des étoiles ; la nutation et le mouvement propre des étoiles sont négligés).

En superposition du mouvement moyen de précession se rajoute une petite oscillation, la *nutation*, dont le terme principal a une période de 18,6 ans et une amplitude de 9,2″ en obliquité (17,2″ en longitude). Elle est due à la rétrogradation des nœuds de l'orbite lunaire sur l'écliptique (période 18,6 ans) : l'inclinaison de l'orbite de la Lune sur l'équateur, et donc le couple de marée lunaire, oscillent avec cette période. Les autres termes sont nettement plus petits : le terme semi-annuel atteint 1,3″ en longitude (0,6″ en obliquité) et le terme semi-mensuel 0,2″ (0,1″).

Complément : mouvement du pôle et variations de la rotation

Indépendamment de la précession et de la nutation, qui décrivent le mouvement de l'axe dans l'espace, l'axe de rotation se déplace aussi légèrement par rapport à la croûte terrestre : c'est le *mouvement du pôle*, de quelques mètres d'amplitude, combinaison d'un terme annuel (forçage saisonnier) et de l'oscillation libre de Chandler (période 433 jours). La vitesse de rotation elle-même n'est pas constante : ralentissement séculaire par freinage de marée (la durée du jour s'allonge d'environ 1,7 ms par siècle, ce qui est à l'origine des secondes intercalaires), variations décennales d'origine interne (couplage noyau-manteau), fluctuations saisonnières et irrégulières (vents, courants, séismes). C'est l'IERS (*International Earth Rotation and Reference Systems Service*) qui mesure et publie ces paramètres d'orientation de la Terre, indispensables pour relier le repère terrestre au repère céleste.

2.4 Repères du temps

La mécanique céleste classique utilise une notion intuitive, qui a depuis été remise en cause par la relativité générale : un temps newtonien découplé du mouvement. Toutefois, à quelques corrections près, c'est ce temps newtonien qui est utilisé pour la mécanique céleste. Les principales échelles de temps utilisées sont les suivantes.

- **Le Temps atomique international (TAI)** est un temps atomique, établi depuis 1958 (le nom date

de 1971) et calculé depuis 1988 par le Bureau international des poids et mesures (BIPM). Il résulte d'une moyenne pondérée de plus de 450 horloges atomiques réparties dans environ 80 laboratoires, recalée sur des étalons primaires à fontaine atomique, et il est donc extrêmement stable (quelques 10^{-16} en relatif). Ce temps est bien évidemment découplé des phénomènes célestes.

- **Le Temps universel (UT1)** est un temps astronomique : c'est l'angle de rotation de la Terre, exprimé en unités de temps et rapporté au méridien de Greenwich. Il est aujourd'hui mesuré par interférométrie à très longue base (VLBI) sur des quasars, et varie irrégulièrement avec la rotation de la Terre.
- **Le Temps universel coordonné (UTC)** est l'échelle de temps civile. Il s'écoule au rythme du TAI (la seconde UTC est la seconde atomique), mais on lui ajoute de temps en temps une *seconde intercalaire* de manière à ce que l'écart $|\mathrm{UT1} - \mathrm{UTC}|$ reste inférieur à 0,9 s. La différence $\mathrm{TAI} - \mathrm{UTC}$ est donc un nombre entier de secondes : 10 s en 1972, 37 s depuis le 1er janvier 2017 (27 secondes intercalaires ont été insérées, la dernière fin 2016 ; figure 2.12). La Conférence générale des poids et mesures a décidé en 2022 d'abandonner ce mécanisme au plus tard en 2035 : UTC s'écartera alors lentement de UT1.
- **Le temps GPS** est une échelle atomique continue, sans seconde intercalaire, calée sur UTC le 6 janvier 1980 : $\mathrm{GPS} = \mathrm{TAI} - 19$ s, soit, en 2026, $\mathrm{GPS} = \mathrm{UTC} + 18$ s. Galileo utilise la même convention (GST) ; GLONASS suit UTC avec ses secondes intercalaires.
- **Le Temps terrestre (TT)** est l'argument des éphémérides géocentriques ; c'est une échelle idéale que réalise en pratique le TAI : $\mathrm{TT} = \mathrm{TAI} + 32{,}184$ s (l'offset assure la continuité avec l'ancien temps des éphémérides). Le **Temps dynamique barycentrique (TDB)** joue le même rôle pour les éphémérides rapportées au barycentre du Système solaire ; il diffère de TT par des termes périodiques relativistes de moins de 2 ms.

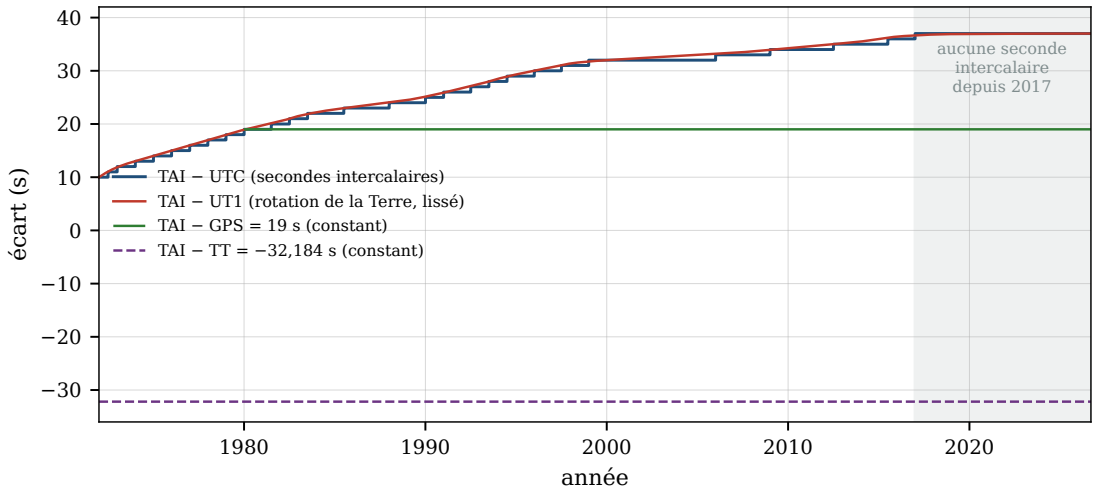


FIGURE 2.12 – Écarts entre les principales échelles de temps depuis 1972. Les marches de $\mathrm{TAI} - \mathrm{UTC}$ sont les secondes intercalaires ; la courbe $\mathrm{TAI} - \mathrm{UT1}$, ici lissée, traduit le ralentissement irrégulier de la rotation terrestre. Aucune seconde intercalaire n'a été nécessaire depuis 2017, la rotation s'étant même légèrement accélérée depuis 2020 (détail que ne montre pas cette courbe lissée).

2.5 Époque et repère de référence

On l'a vu, les angles sont repérés à partir d'une direction particulière dans l'espace, le point vernal γ, qui indique la direction du Soleil à l'équinoxe de mars. Toutefois, la détermination du repère de référence ne va pas de soi. En effet, le mouvement de la Terre est complexe : il associe la révolution de la Terre autour du Soleil, sa rotation propre (non constante) autour de son axe, le tout étant compliqué par les

mouvements de précession et de nutation dus à l'interaction de la Terre non parfaitement sphérique avec la Lune, le Soleil et les planètes. Le point vernal et l'équateur se déplacent donc lentement par rapport aux étoiles.

Nous devons toutefois nous donner un repère inertiel dans cet environnement mouvant. Par convention, on fige un « instantané » de la position de l'équateur et de l'équinoxe qui sert de référence pour calculer tous les mouvements des objets considérés (planètes, satellites, etc.). Cet instantané est appelé *époque* du repère. Le repère conventionnel classique est le repère **J2000.0**, auquel l'ICRS, qui en est très proche, a succédé en 1998 (voir l'encadré ci-dessous) : équateur moyen et équinoxe moyen (c'est-à-dire corrigés de la nutation) du 1er janvier 2000 à 12 h TT, instant qui correspond au jour julien 2451545,0. Le « J » signifie que l'on compte les époques en années juliennes de 365,25 jours à partir de cet instant (J2026,5 est ainsi le 2 juillet 2026). Les coordonnées d'un objet « à la date » (repère vrai de la date) s'obtiennent à partir des coordonnées J2000 en appliquant la précession et la nutation accumulées depuis l'époque.

Complément : jour julien et repère ICRS

Le *jour julien* (JD) compte les jours de manière continue depuis le 1er janvier 4713 av. J.-C. à 12 h ; il évite toute discussion de calendrier dans les calculs d'éphémérides. On utilise souvent le jour julien modifié $\mathrm{MJD} = \mathrm{JD} - 2\,400\,000{,}5$, qui commence à minuit. Le 1er janvier 2000 à 0 h UTC correspond à $\mathrm{JD} = 2451544{,}5$ et $\mathrm{MJD} = 51544$.
Depuis 1998, l'Union astronomique internationale a remplacé la définition dynamique du repère de référence (équateur et équinoxe, qui dépendent des modèles de précession et de nutation) par une définition cinématique : le *système de référence céleste international* (ICRS) est matérialisé par les positions d'un catalogue de quasars observés en VLBI (repère ICRF3, 2018), objets si lointains que leur mouvement propre est indétectable, et, dans le domaine optique, par le repère Gaia-CRF3, formé d'environ 1,6 million de quasars observés par Gaia, auquel sont rattachées les positions des quelque 1,8 milliard de sources du catalogue Gaia. Les axes de l'ICRS coïncident avec ceux du repère J2000 à mieux que $0{,}1''$, si bien que, pour les besoins de ce cours, on pourra confondre les deux ; les logiciels d'éphémérides et les modèles de l'IERS [24] font la différence.

2.6 Quelques formules de trigonométrie sphérique

Il est très souvent utile de considérer des éléments de trigonométrie sphérique. On notera A, B et C trois points sur la sphère, comme sur la figure 2.13, reliés par des arcs de grands cercles. On note respectivement a, b et c les longueurs des côtés opposés aux sommets A, B et C, et α, β, γ les angles en ces sommets. On remarquera que les longueurs a, b et c des côtés d'un triangle tracé sur une sphère de rayon unité sont des angles vus du centre de la sphère (et on les traitera toujours ainsi).

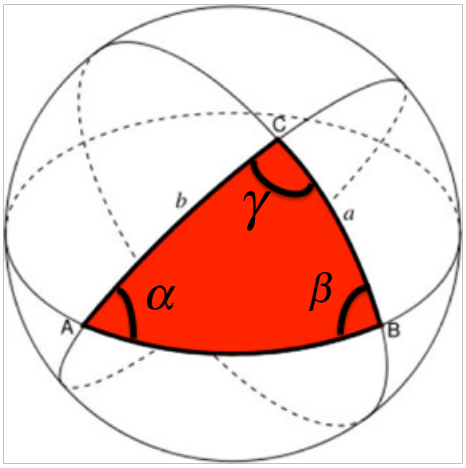


FIGURE 2.13 – Conventions de notation des triangles sphériques (le côté c, non étiqueté, est l'arc AB) : les côtés a, b, c sont des arcs de grands cercles, mesurés par l'angle au centre de la sphère ; les angles α, β, γ sont les angles dièdres aux sommets.

La *formule des cosinus* relie la longueur d'un côté du triangle à celles des deux autres côtés ainsi qu'à l'angle entre eux :

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma. \tag{2.1}$$

Dans le cas particulier où le triangle est rectangle en C, elle se réduit à

$$\cos c = \cos a \cos b, \tag{2.2}$$

qui est l'analogue sphérique du théorème de Pythagore. La *formule des sinus* est également très utile :

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}. \tag{2.3}$$

On utilise aussi la formule des cosinus « duale », obtenue en appliquant la formule (2.1) au triangle polaire, dont les côtés valent $180° - \alpha$, $180° - \beta$, $180° - \gamma$ et les angles $180° - a$, $180° - b$, $180° - c$: $\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c$.

Application : distance orthodromique. La formule des cosinus permet de calculer la distance entre deux points de la Terre (ou de toute sphère de rayon connu) dont on connaît les latitudes φ_1, φ_2 et la différence de longitudes $\Delta\lambda$, en prenant pour troisième sommet le pôle : les côtés sont $90° - \varphi_1$ et $90° - \varphi_2$ et l'angle au pôle est $\Delta\lambda$, d'où

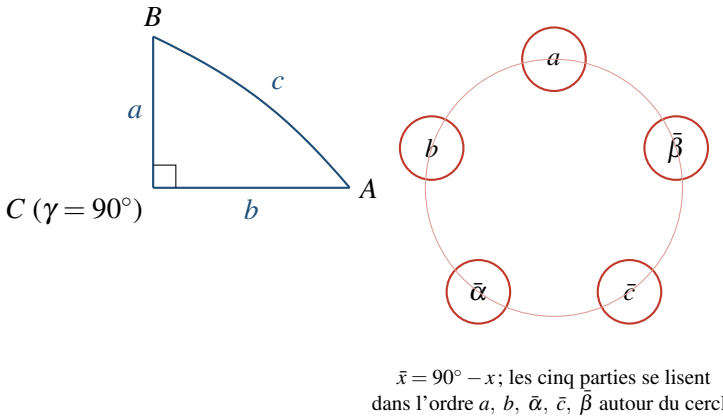
$$\cos d = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \Delta\lambda. \tag{2.4}$$

Entre Toulouse (43,6° N, 1,44° E) et Montréal (45,5° N, 73,6° O), on trouve $\cos d = 0{,}623$, soit $d = 51{,}5°$ et, avec 111,2 km par degré, une distance de 5 720 km. La même formule donne la hauteur d'un astre au-dessus de l'horizon à partir de sa déclinaison, de la latitude du lieu et de son angle horaire.

Règles de Napier. Pour un triangle rectangle (disons en C, avec $\gamma = 90°$), John Napier a proposé en 1614 un moyen mnémotechnique qui condense les dix relations utiles. On dispose autour d'un cercle, dans l'ordre, les cinq parties a, b, $\bar{\alpha}$, $\bar{c}$, $\bar{\beta}$, où la barre désigne le complément à 90° ($\bar{x} = 90° - x$) et où l'angle droit est omis (figure 2.14). Alors, pour toute partie prise comme « partie centrale »:

> le sinus de la partie centrale est égal au produit des tangentes des deux parties adjacentes, et au produit des cosinus des deux parties opposées.

Par exemple, avec $\bar{c}$ comme partie centrale, les parties opposées sont a et b : $\sin\bar{c} = \cos a \cos b$, c'est-à-dire $\cos c = \cos a \cos b$ (formule (2.2)) ; les parties adjacentes sont $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$: $\cos c = \cot\alpha \cot\beta$. Avec a comme partie centrale : $\sin a = \tan b \cot\beta$ (adjacentes b et $\bar{\beta}$) et $\sin a = \sin c \sin\alpha$ (opposées $\bar{c}$ et $\bar{\alpha}$). Ces relations résolvent aisément la plupart des problèmes de latitude et de longitude, par exemple le calcul de l'azimut du lever du Soleil ou de la latitude maximale atteinte par une orbite d'inclinaison donnée.



$\bar{x} = 90° - x$; les cinq parties se lisent dans l'ordre a, b, $\bar{\alpha}$, $\bar{c}$, $\bar{\beta}$ autour du cercle

FIGURE 2.14 – Triangle sphérique rectangle en C et pentagone de Napier associé.

3 Rappels de mécanique

> *Déploie ton jeune courage, enfant ; c'est ainsi qu'on s'élève jusqu'aux astres.*
> Virgile, *Énéide*, IX, 641 (*Macte nova virtute, puer, sic itur ad astra*).

La mécanique classique repose sur un ensemble de postulats qui sont approximativement vrais, en ceci qu'ils décrivent la réalité, c'est-à-dire l'expérience sensible, avec une précision suffisante pour être utiles. En effet, si de nouvelles théories comme la relativité d'Einstein ont pu remettre en cause la mécanique classique en apportant une précision accrue ou l'explication précise de phénomènes non modélisés (avance du périhélie de Mercure, effet Shapiro, dérive des horloges des satellites GPS), son cadre conceptuel relativement simple à mettre en œuvre en fait un outil de choix, non seulement de l'ingénieur mais aussi du scientifique, dans nombre de problèmes de mécanique céleste ou orbitale.

3.1 Principe de déterminisme

Parmi ces principes se trouve le principe de déterminisme de Newton, qui postule que l'état initial d'un système (c'est-à-dire l'ensemble des positions et des vitesses de ses points à une date quelconque) définit de façon unique le futur de son mouvement.

Toutefois, ce principe, formulé par Laplace d'après l'analyse critique de Newton, s'entend dans un monde parfait où l'on connaîtrait parfaitement les conditions initiales du système, conditions initiales pouvant être réelles (au sens mathématique du terme). En particulier, si l'on considère un système dynamique dont la résolution fait apparaître des solutions fonctions d'exponentielles croissantes, il reste clair qu'au-delà d'un certain temps, deux solutions issues de conditions initiales distinctes mais arbitrairement proches finiront tout de même par diverger (voir la conclusion de ce cours, section 8).

3.2 Équation de Newton

Dans ces conditions, en partant du principe de Newton, on peut exprimer que l'ensemble du mouvement d'un système est déterminé par sa position $\boldsymbol{x}(t_0) \in \mathbb{R}^N$ et par sa vitesse initiale $\boldsymbol{v}(t_0) \in \mathbb{R}^N$. Cela veut

donc dire que l'accélération du système est définie par sa position, sa vitesse et la date. On peut donc supposer l'existence d'une fonction $\boldsymbol{F}$ telle que

$$\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N, \qquad \ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t). \tag{3.1}$$

Si on connaît la position initiale $\boldsymbol{x}_0$ et la vitesse initiale $\boldsymbol{v}_0$, alors le principe fondamental de la dynamique (PFD) dit qu'il suffit de résoudre le problème de Cauchy

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t) \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{r}(t_0) = \boldsymbol{x}_0,\ \dot{\boldsymbol{r}}(t_0) = \boldsymbol{v}_0. \tag{3.2}$$

Réciproquement, d'après le théorème d'existence et d'unicité de la théorie des équations différentielles ordinaires (théorème de Cauchy-Lipschitz), la fonction $\boldsymbol{F}$ et les conditions initiales définissent de manière univoque le mouvement [1] à travers l'équation (3.2). Ainsi l'équation (3.2) est nécessaire et suffisante pour décrire l'ensemble du mouvement. C'est ce qui explique son importance : cette équation a été posée à la base de la mécanique par Newton, dans sa version relue par Laplace. On l'appelle « l'équation de Newton ». On en déduit le théorème suivant.

Théorème

Soient $\boldsymbol{r}(t_0) \in \mathbb{R}^N$ le vecteur position et $\dot{\boldsymbol{r}}(t_0) \in \mathbb{R}^N$ le vecteur vitesse d'un système à une date quelconque t_0. Alors le mouvement du système à toute date t est décrit de manière univoque par l'équation de Newton

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t). \tag{3.3}$$

Dans la pratique, la fonction $\boldsymbol{F}$ dans l'équation (3.3) est déterminée empiriquement pour chaque système mécanique concret [2]. D'un point de vue mathématique, la forme de $\boldsymbol{F}$ définit en soi le système.

3.3 Mouvement dans un champ de gravité central

On appelle *chute libre d'un corps sur la Terre* le mouvement libre d'un corps de masse m (négligeable devant la masse de la Terre) dans le champ de gravité terrestre. En vertu de la loi de la gravitation universelle établie par Newton, l'accélération d'un objet en chute libre sur la Terre est dirigée vers le centre de la Terre et inversement proportionnelle au carré de la distance à ce centre (figure 3.1).

1. Sous réserve de conditions de régularité sur $\boldsymbol{F}$ (localement lipschitzienne) et de questions d'intervalle de temps sur lequel est définie l'équation (3.2). Pour les questions d'intervalle de temps, nous supposerons pour simplifier que le mouvement est défini sur l'axe temporel tout entier, ce qui est souvent le cas en mécanique (mais pas toujours : une collision est une singularité en temps fini). Voir [2] par exemple.

2. Par exemple par la loi de la gravitation universelle, avec l'identification, elle aussi empirique, entre la masse gravitationnelle qui apparaît dans $\boldsymbol{F}$ et la masse inertielle qui multiplie l'accélération : c'est le principe d'équivalence, vérifié aujourd'hui à 10^{-15} près par la mission MICROSCOPE (2016–2018, résultats définitifs publiés en 2022).

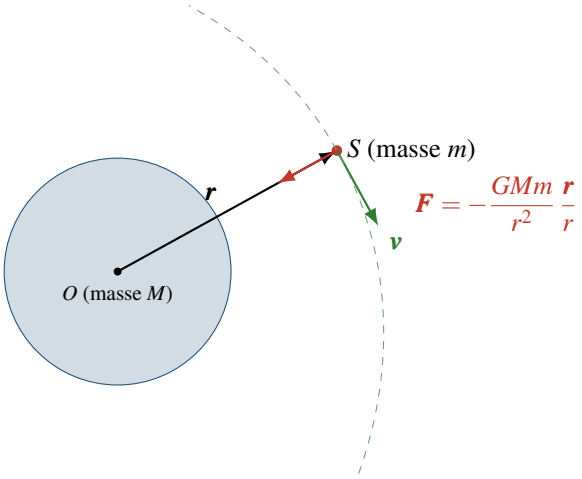


FIGURE 3.1 – Chute libre sur un corps central : la force est centrale et attractive, la trajectoire est une conique de foyer O.

Ainsi, si l'on appelle E^3 l'espace euclidien des configurations (c'est-à-dire l'espace des positions) d'un corps ponctuel, et $\boldsymbol{r}(t) : \mathbb{R} \to E^3$ la fonction qui décrit son mouvement, le système mécanique de la chute libre est donné par l'équation suivante :

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\mu \frac{\boldsymbol{r}}{\|\boldsymbol{r}\|^3}, \qquad \mu = GM, \tag{3.4}$$

où M est la masse du corps central et G la constante de la gravitation. On appelle μ le *paramètre gravitationnel* du corps central ; c'est lui, et non G et M séparément, que l'on connaît avec précision (annexe E).

3.3.1 Trajectoire dans un champ de gravité central

Dans ce paragraphe, on rappelle que la trajectoire d'un point matériel dans un champ de force central en $1/r^2$ est une conique. On se place dans un repère R galiléen et on ne considère que la force de gravitation sur le point S de masse m. Le moment cinétique en O de S s'écrit

$$\boldsymbol{H} = m\overrightarrow{OS} \wedge \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OS}}{\mathrm{d}t}\right|_R = m\,\boldsymbol{r} \wedge \dot{\boldsymbol{r}}. \tag{3.5}$$

Sa dérivée est

$$\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t}\right|_R = m\,\dot{\boldsymbol{r}} \wedge \dot{\boldsymbol{r}} + m\,\boldsymbol{r} \wedge \ddot{\boldsymbol{r}} = m\,\boldsymbol{r} \wedge \ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{0} \tag{3.6}$$

car le mouvement est à force centrale : l'accélération $\ddot{\boldsymbol{r}}$ est colinéaire à $\boldsymbol{r}$. Le moment cinétique est donc constant,

$$\boldsymbol{H} = m\,\boldsymbol{r} \wedge \dot{\boldsymbol{r}} = \overrightarrow{\text{cste}}, \tag{3.7}$$

et le mouvement est donc plan, dans le plan perpendiculaire à $\boldsymbol{H}$ passant par O. Le choix des coordonnées polaires (r, θ) dans ce plan s'impose, et donc

$$\boldsymbol{v}(S)|_R = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{pmatrix} \qquad \text{ainsi que} \qquad \boldsymbol{a}(S)|_R = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

dans la base polaire $(\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta)$. L'équation de Newton nous donne alors

$$m \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{pmatrix} = -G\frac{mM}{r^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

La seconde composante donne

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\dot{\theta}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2\dot{\theta} = C = \text{cste}. \tag{3.10}$$

Pendant un temps $\mathrm{d}t$, l'aire balayée par le rayon vecteur est $\frac{1}{2}r(r\,\mathrm{d}\theta)$ et, entre deux dates t_1 et t_2, on retrouve ainsi la fameuse *loi des aires* (deuxième loi de Kepler) :

$$A_{t_1\to t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2}r(r\dot{\theta})\,\mathrm{d}t = \frac{C}{2}(t_2 - t_1). \tag{3.11}$$

La constante des aires C n'est autre que le moment cinétique par unité de masse, $C = \|\boldsymbol{r}\wedge\dot{\boldsymbol{r}}\| = H/m$; on la note aussi h dans les chapitres suivants.

Enfin, si l'on pose le changement de variable habituel $u = 1/r$ (variable de Binet), on peut écrire, en utilisant $\dot{\theta} = Cu^2$:

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta} = -C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} \tag{3.12}$$

et

$$\ddot{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(-C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)\dot{\theta} = -C^2u^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}. \tag{3.13}$$

L'équation de Newton (première composante) et la loi des aires donnent alors

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\mu u^2 \quad \text{soit} \quad -C^2u^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} - C^2u^3 = -\mu u^2 \quad \text{et donc} \quad \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = \frac{\mu}{C^2}, \tag{3.14}$$

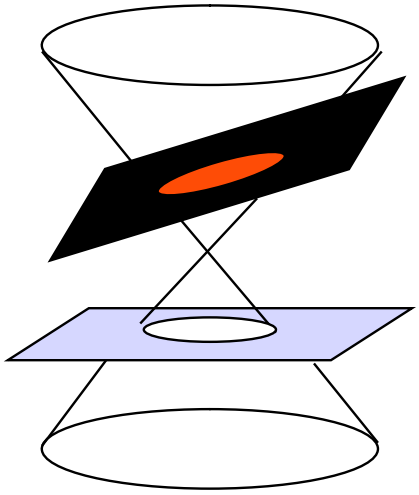
où l'on reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique forcé par une constante. La solution s'écrit

$$u = \frac{\mu}{C^2}\left(1 + e\cos(\theta - \theta_0)\right) \quad \text{soit} \quad \boxed{r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}} \quad \text{avec} \quad p = \frac{C^2}{\mu}, \tag{3.15}$$

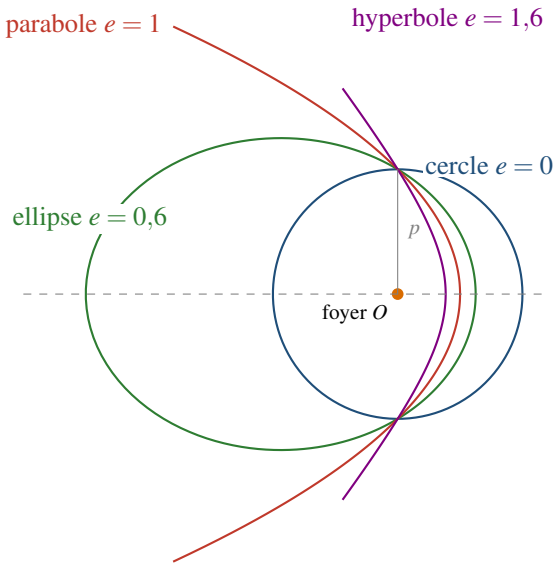
θ_0 et $e \geq 0$ étant des constantes d'intégration. On reconnaît là l'équation polaire d'une conique de foyer O, de paramètre p et d'excentricité e (figure 3.2) :

- si $e = 0$, il s'agit d'un cercle ;
- si $0 < e < 1$, il s'agit d'une ellipse ;
- si $e = 1$, il s'agit d'une parabole ;
- si $e > 1$, il s'agit d'une hyperbole (seule la branche $1 + e\cos(\theta - \theta_0) > 0$ est parcourue).

C'est la première loi de Kepler, généralisée aux trajectoires non fermées. L'angle $\theta - \theta_0$, compté à partir de la direction du point le plus proche du foyer (périapse), s'appelle l'*anomalie vraie*.



(a) Sections d'un cône par un plan : cercle et ellipse (un plan parallèle à une génératrice donnerait une parabole, un plan coupant les deux nappes une hyperbole).



(b) Même foyer O, même paramètre p : seule l'excentricité change.

FIGURE 3.2 – Les coniques : sections planes d'un cône (à gauche) et trajectoires képlériennes de même foyer et de même paramètre, donc de même constante des aires (à droite).

3.3.2 Géométrie de l'ellipse

On rappelle un certain nombre de relations importantes pour la géométrie des ellipses, avec les notations de la figure 3.3 : a est le demi-grand axe, b le demi-petit axe, $c = IF$ la demi-distance focale, $e = c/a$ l'excentricité et p le paramètre (demi-latus rectum, longueur du rayon vecteur perpendiculaire au grand axe).

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 \\ e = c/a \end{cases} \qquad \begin{cases} p = a(1-e^2) \\ b = a\sqrt{1-e^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} r_p = a(1-e) = \dfrac{p}{1+e} \\ r_a = a(1+e) = \dfrac{p}{1-e} \end{cases} \tag{3.16}$$

Avec ces notations, on peut écrire l'équation de l'orbite elliptique sous la forme

$$\boxed{r = \frac{p}{1+e\cos(\theta-\theta_0)} = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\theta-\theta_0)}} \tag{3.17}$$

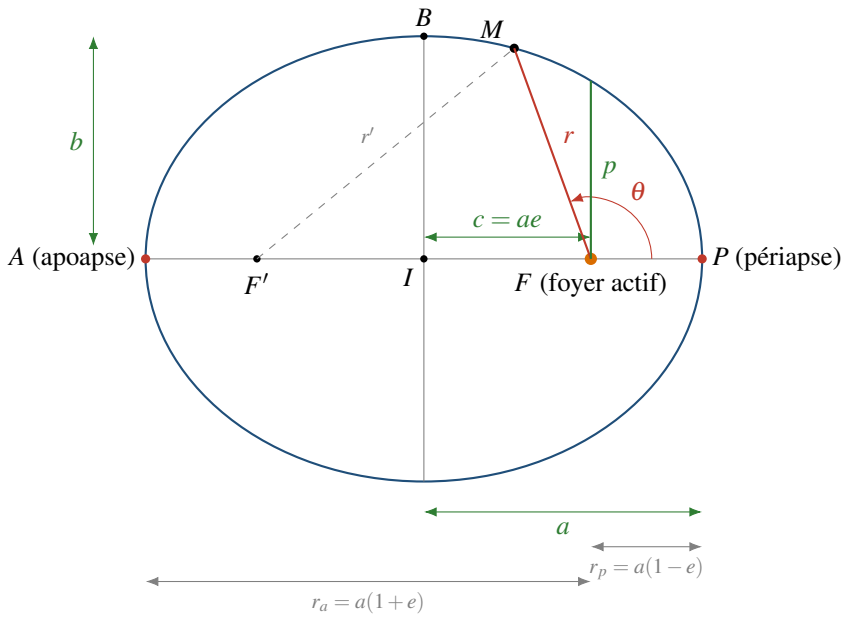


FIGURE 3.3 – Géométrie de l'ellipse : le corps central occupe le foyer F ; $r + r' = 2a$.

3.3.3 Énergie totale : l'équation des forces vives

Si l'on reprend l'expression de la vitesse en coordonnées polaires, on peut écrire

$$V^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = C^2\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + C^2u^2. \tag{3.18}$$

En partant de l'expression de u et de sa dérivée,

$$u = \frac{\mu}{C^2}\left(1 + e\cos(\theta - \theta_0)\right), \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{\mu}{C^2}e\sin(\theta - \theta_0), \tag{3.19}$$

il vient

$$\frac{V^2}{C^2} = \frac{\mu^2}{C^4}\left[e^2\sin^2(\theta-\theta_0) + 1 + 2e\cos(\theta-\theta_0) + e^2\cos^2(\theta-\theta_0)\right] = \frac{\mu^2}{C^4}\left[e^2 - 1 + 2\left(1 + e\cos(\theta-\theta_0)\right)\right], \tag{3.20}$$

soit, en reconnaissant $1 + e\cos(\theta - \theta_0) = C^2u/\mu$,

$$V^2 = \frac{\mu^2}{C^2}\left(e^2 - 1\right) + \frac{2\mu}{r}. \tag{3.21}$$

On retiendra l'expression

$$\boxed{\frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{\mu^2}{2C^2}\left(e^2 - 1\right) = \text{cste}} \tag{3.22}$$

Cette équation n'est rien d'autre que l'expression de la **conservation de l'énergie mécanique**, rapportée à l'unité de masse. En effet, la force de gravitation

$$\boldsymbol{F} = -G\frac{mM}{r^2}\boldsymbol{e}_r = -m\boldsymbol{\nabla}U \qquad \text{avec} \qquad U(r) = -\frac{GM}{r} = -\frac{\mu}{r} \tag{3.23}$$

dérive du potentiel gravitationnel U (attention au signe : la force est dirigée dans le sens où U décroît, c'est-à-dire vers le corps central). L'énergie potentielle par unité de masse est $E_p = U = -\mu/r$, l'énergie cinétique par unité de masse $E_c = V^2/2$, et, en l'absence de frottements,

$$E_c + E_p = \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \text{cste}. \tag{3.24}$$

3.3.4 Énergie et trajectoire

Si l'on reprend les expressions précédentes de l'énergie mécanique par unité de masse $E_M = \frac{\mu^2}{2C^2}(e^2 - 1)$ et de la trajectoire, et si l'on croise les caractéristiques des coniques précédemment décrites, on en déduit le signe de l'énergie associée à chaque type de trajectoire :

- si $e > 1$, $E_M > 0$: la trajectoire est une hyperbole et $V > \sqrt{2\mu/r}$;
- si $e = 1$, $E_M = 0$: la trajectoire est une parabole et $V = \sqrt{2\mu/r}$;
- si $e < 1$, $E_M < 0$: la trajectoire est une ellipse (un cercle pour $e = 0$) et $V < \sqrt{2\mu/r}$.

Remarque 1. Pour une ellipse, $C^2 = \mu p = \mu a(1 - e^2)$ et l'énergie s'écrit $E_M = -\mu/(2a)$: elle ne dépend que du demi-grand axe. On peut donc écrire l'*équation des forces vives* (*vis-viva*),

$$\boxed{V^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} \tag{3.25}$$

relation valable en tout point de l'orbite, et qui reste vraie pour les hyperboles à condition de prendre $a < 0$ (avec $E_M = -\mu/(2a) > 0$).

Remarque 2. Pour un cercle, $r = a$ et l'on obtient la vitesse circulaire

$$\boxed{V_c^2 = \frac{\mu}{a}} \tag{3.26}$$

soit 7,67 km/s à 400 km d'altitude au-dessus de la Terre, et 3,07 km/s sur l'orbite géostationnaire.

Remarque 3 : vitesse de libération. La vitesse de libération est la vitesse minimale nécessaire pour échapper à l'attraction du corps central. À une distance r, la trajectoire doit être une parabole (vitesse nulle à l'infini) ou une hyperbole :

$$e \geq 1 \;\Leftrightarrow\; E_M \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \boxed{V \geq V_L = \sqrt{\frac{2\mu}{r}} = \sqrt{2}V_c} \tag{3.27}$$

Pour la Terre, $V_L = 11{,}2\,\mathrm{km/s}$ au niveau du sol et 10,8 km/s à 400 km d'altitude. Pour une hyperbole, la vitesse résiduelle à l'infini, $V_\infty = \sqrt{V^2 - V_L^2} = \sqrt{-\mu/a}$, est le paramètre essentiel des trajectoires interplanétaires (section 5.13).

3.3.5 Systèmes dérivant d'un potentiel

Notons au passage que si l'on introduit la fonction énergie potentielle $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que $U(\boldsymbol{r}) = -m\mu/\|\boldsymbol{r}\|$ (c'est-à-dire m fois le potentiel gravitationnel par unité de masse, noté lui aussi U au paragraphe 3.3.3 et à la section 3.3.7), alors l'équation (3.4) peut être mise sous la forme habituelle des systèmes potentiels :

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}} = -\boldsymbol{\nabla} U. \tag{3.28}$$

En généralisant : soit $E^{3n} = E^3 \times \ldots \times E^3$ l'espace de configuration d'un système de n points dans un espace euclidien E^3. Soit $U : E^{3n} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable et $m_1, \ldots, m_n$ des nombres positifs. Le mouvement de n points de masses respectives $m_1, \ldots, m_n$ dans un champ d'énergie potentielle U est régi par le système d'équations différentielles

$$m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_i}, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{3.29}$$

C'est ce qu'on appelle un *système potentiel*. Dans les exemples précédents, les équations du mouvement sont précisément de cette forme. Ont également cette forme la plupart des autres systèmes mécaniques étudiés en mécanique céleste. Par exemple on appelle problème à deux corps de la mécanique céleste le problème (3.29) dans lequel

$$U = -G\frac{m_1 m_2}{\|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2\|}, \tag{3.30}$$

et problème à trois corps celui dans lequel

$$U = -G\frac{m_1 m_2}{\|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2\|} - G\frac{m_2 m_3}{\|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_3\|} - G\frac{m_3 m_1}{\|\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1\|}. \tag{3.31}$$

Nota bene. On peut aussi ramener à la forme (3.29) un grand nombre de problèmes de toute autre nature que mécanique : les forces électrostatiques, ainsi que les champs de vitesse de certains écoulements de fluides, dérivent d'un potentiel.

3.3.6 Troisième loi de Kepler

Appelons T la période mise pour parcourir une orbite elliptique d'aire S. D'après la loi des aires, $r^2\dot\theta = C$, et donc sur une période

$$\int_0^T r^2\dot\theta \,\mathrm{d}t = CT. \tag{3.32}$$

On a déjà montré que le mouvement était plan. Si l'on calcule la surface S de l'ellipse parcourue pendant la période T, il vient

$$\int_0^T r^2\dot\theta \,\mathrm{d}t = 2S = CT = 2\pi ab \tag{3.33}$$

car bien entendu πab est l'aire de l'ellipse de demi-grand axe a et de demi-petit axe b. Il vient alors $C^2T^2 = 4\pi^2a^2b^2$ et, en reprenant les expressions $C^2 = \mu a(1-e^2)$ et $b = a\sqrt{1-e^2}$, on déduit finalement la *troisième loi de Kepler* :

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu}} \qquad \text{ou encore} \qquad n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}, \tag{3.34}$$

où n est le *moyen mouvement*.

Application 1. Une loi simple donnant la période en années d'une planète du Système solaire d'orbite de demi-grand axe a : si on exprime T en années et a en unités astronomiques, $T = a^{3/2}$. Ainsi Jupiter ($a = 5{,}2$ UA) a une période de 11,9 ans, et un objet de la ceinture de Kuiper à 40 UA une période de 253 ans.

Application 2 : masse d'un astéroïde binaire. On cherche à donner une méthode pour contraindre la masse d'un astéroïde uniquement en utilisant l'observation. Si l'on considère un astéroïde de masse m possédant un satellite de masse m' (demi-grand axe a', période T'), l'ensemble orbitant autour du Soleil de masse m_S (demi-grand axe a, période T), alors la troisième loi de Kepler appliquée aux deux systèmes donne

$$\frac{m+m'}{m_S+m+m'} = \left(\frac{a'}{a}\right)^3\left(\frac{T}{T'}\right)^2 \qquad \text{soit, pour } m,m' \ll m_S : \qquad \frac{m+m'}{m_S} \simeq \left(\frac{a'}{a}\right)^3\left(\frac{T}{T'}\right)^2. \tag{3.35}$$

L'observation des distances et des périodes du couple contraint donc la masse totale du système binaire ; c'est ainsi qu'a été mesurée la masse du système (65803) Didymos, cible de la mission DART (2022) qui a modifié de 33 minutes la période de son satellite Dimorphos, et que la mission Hera (arrivée prévue en novembre 2026) affinera.

3.3.7 Généralisation au cas d'un corps central à symétrie sphérique

Par ailleurs, on rappelle que si le corps central n'est pas un point matériel mais un corps à symétrie sphérique (éventuellement composé de plusieurs « couches », comme une planète), le champ qu'il crée à l'extérieur est équivalent à celui de la masse totale du corps concentrée en son centre (théorème des coquilles, dû à Newton). On le montre aisément en considérant le potentiel du champ de gravité créé en un point P, situé à la distance s du centre O, par une masse $\mathrm{d}m$ du corps central située à la distance q de P (figure 3.4) :

$$\mathrm{d}U(P) = -G\frac{\mathrm{d}m}{q}. \tag{3.36}$$

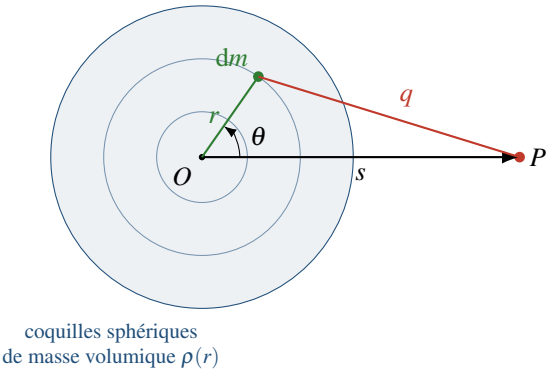


FIGURE 3.4 – Potentiel créé en P par un corps à symétrie sphérique, décomposé en coquilles.

Le corps central est de symétrie sphérique, aussi peut-on sommer le potentiel sur des « coquilles » de masse volumique $\rho(r)$ centrées sur O. En coordonnées sphériques (r,θ,ϕ) d'axe OP, on a $\mathrm{d}m = \rho(r)\,r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$ et $q^2 = r^2+s^2-2rs\cos\theta$, d'où

$$\begin{aligned} U(P) &= -G\int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \frac{\rho(r)\,r^2\sin\theta}{\sqrt{r^2+s^2-2rs\cos\theta}}\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r \\ &= -2\pi G\int_0^R \rho(r)\,r^2\left[\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{r^2+s^2-2rsu}}\right]\mathrm{d}r, \end{aligned} \tag{3.37}$$

en intégrant sur ϕ (rien n'en dépend) et en posant $u=\cos\theta$. L'intégrale entre crochets se calcule directement :

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{r^2+s^2-2rsu}} = \left[-\frac{\sqrt{r^2+s^2-2rsu}}{rs}\right]_{-1}^{1} = \frac{(s+r)-|s-r|}{rs} = \frac{2}{s} \quad \text{pour } s>r. \tag{3.38}$$

Le potentiel s'écrit donc, pour un point extérieur ($s>R$),

$$U(P) = -\frac{2\pi G}{s}\cdot 2\int_0^R \rho(r)\,r^2\,\mathrm{d}r = -\frac{G}{s}\int_0^R 4\pi\rho(r)\,r^2\,\mathrm{d}r \quad \text{soit} \quad \boxed{U(P) = -\frac{GM}{s}} \tag{3.39}$$

où $M = \int_0^R 4\pi\rho r^2\,\mathrm{d}r$ est la masse totale : c'est bien l'expression du potentiel créé par une masse ponctuelle M placée au centre de la sphère. On notera que pour un point intérieur ($s<r$), le crochet vaut $2/r$ et ne dépend plus de s : une coquille sphérique n'exerce aucune force sur un point situé à l'intérieur d'elle-même, et seule la masse située sous le point compte. Dès que le corps central n'est plus à symétrie sphérique (Terre aplatie), ce résultat est en défaut et le potentiel se développe en harmoniques sphériques (section 5.8.1).

3.3.8 Anomalie vraie, anomalie moyenne, anomalie excentrique, équation de Kepler

Les équations de la trajectoire établies précédemment,

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \tag{3.40}$$

(on prend désormais $\theta_0 = 0$, c'est-à-dire que θ est l'anomalie vraie comptée depuis le périapse), utilisent le temps comme variable implicite, ce qui n'est évidemment pas toujours pratique. On peut toutefois avoir une relation explicite de la position en fonction du temps à l'aide d'une variable auxiliaire appelée *anomalie excentrique* (ou hyperbolique dans le cas d'une hyperbole). Pour cela, on considère le cercle principal de rayon a, dans lequel s'inscrit l'ellipse. L'anomalie excentrique E est l'angle au centre I de la projection Q du point M sur ce cercle, parallèlement au petit axe (figure 3.5).

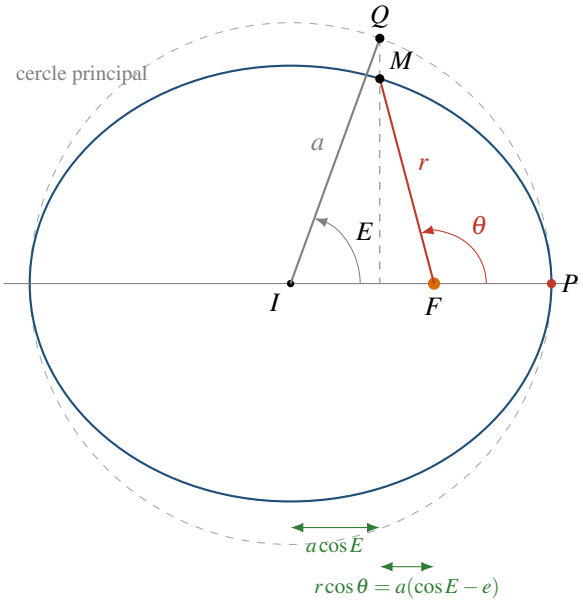


FIGURE 3.5 – L'anomalie vraie est θ (angle au foyer), l'anomalie excentrique E (angle au centre du cercle principal).

Quelle relation a-t-on entre E et θ ? Si l'on exprime dans un repère cartésien centré sur le foyer F les coordonnées de $M(x,y)$, il vient, l'ellipse étant l'image du cercle par l'affinité de rapport b/a :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta = a(\cos E - e) \\ y = r\sin\theta = a\sqrt{1-e^2}\,\sin E \end{cases} \tag{3.41}$$

d'où, en calculant $r^2 = x^2 + y^2 = a^2\left[\cos^2 E - 2e\cos E + e^2 + (1-e^2)\sin^2 E\right] = a^2(1-e\cos E)^2$,

$$\boxed{r = a\,(1-e\cos E)} \tag{3.42}$$

Par ailleurs, on peut écrire

$$\cos\theta = \frac{a\cos E - ae}{r} = \frac{\cos E - e}{1-e\cos E}, \tag{3.43}$$

et de cette expression il vient, en formant $1-\cos\theta$ et $1+\cos\theta$ puis leur quotient,

$$\boxed{\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\tan\frac{E}{2}} \tag{3.44}$$

Avant de continuer, on rappelle quelques égalités utiles : le moyen mouvement $n = 2\pi/T$; la constante des aires $r^2\dot\theta = C = \sqrt{\mu a(1-e^2)}$; la conservation de l'énergie $V^2 = \mu(2/r - 1/a)$; la troisième loi de Kepler $\mu = n^2a^3$; la vitesse en coordonnées polaires $V^2 = \dot r^2 + (r\dot\theta)^2$.

En dérivant par rapport au temps la relation $ae\cos E = a - r$, il vient $-ae\sin E\,\dot E = -\dot r$, soit

$$\dot E = \frac{\dot r}{ae\sin E}. \tag{3.45}$$

Or la vitesse radiale s'obtient à partir de la trajectoire et de la loi des aires : $\dot r = \frac{pe\sin\theta\,\dot\theta}{(1+e\cos\theta)^2} = \frac{e\sin\theta}{p}\,r^2\dot\theta = \frac{C}{p}\,e\sin\theta = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\,e\sin\theta$, et $r\sin\theta = b\sin E = a\sqrt{1-e^2}\sin E$ donne $\sin\theta = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{r}\sin E$. Donc

$$\dot E = \sqrt{\frac{\mu}{a(1-e^2)}}\,\frac{e\sin\theta}{ae\sin E} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\,\frac{a}{r} = \frac{n}{1-e\cos E}, \tag{3.46}$$

c'est-à-dire $(1-e\cos E)\,\mathrm{d}E = n\,\mathrm{d}t$, qui s'intègre immédiatement :

$$\boxed{E - e\sin E = n(t-t_p) = M} \qquad \text{avec} \quad n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}, \tag{3.47}$$

où t_p est l'instant de passage au périapse. L'équation (3.47) est appelée *équation de Kepler*, et la quantité $M = n(t-t_p)$, qui croît linéairement avec le temps, l'*anomalie moyenne*. L'équation de Kepler permet de trouver la position du mobile en fonction du temps. Cette équation est transcendante en E : elle n'admet pas de solution explicite en termes de fonctions élémentaires (mais admet des développements en série, voir l'annexe C). Sa résolution numérique est en revanche très aisée.

Remarque 1 : méthode de Newton. Si l'on note $f(E) = E - e\sin E - M$, la suite définie par

$$E_{k+1} = E_k - \frac{f(E_k)}{f'(E_k)} = E_k - \frac{E_k - e\sin E_k - M}{1 - e\cos E_k}, \qquad E_0 = M \text{ (ou } E_0 = \pi \text{ si } e > 0{,}8), \tag{3.48}$$

converge quadratiquement : le nombre de chiffres exacts double à chaque itération, et quatre ou cinq itérations suffisent en double précision jusqu'à $e \simeq 0{,}7$, une dizaine lorsque e approche de 1 (figure 3.6).

Remarque 2 : itération de point fixe. Classiquement on utilise aussi l'itération $E_{k+1} = M + e\sin E_k$, qui converge pour tout $e < 1$ (l'application est contractante de rapport e) mais seulement linéairement. Ses premiers termes, développés en puissances de e, sont

$$\begin{aligned} E_1 &= M + e\sin M, \\ E_2 &= M + e\sin(M + e\sin M) \simeq M + e\sin M + \frac{e^2}{2}\sin 2M, \\ E_3 &\simeq M + \left(e - \frac{e^3}{8}\right)\sin M + \frac{e^2}{2}\sin 2M + \frac{3e^3}{8}\sin 3M, \end{aligned} \tag{3.49}$$

et ainsi de suite. **Attention :** la série en puissances de e ainsi obtenue (série de Lagrange) ne converge que pour $e < 0{,}6627$ (limite de Laplace), alors que l'itération elle-même et le développement en série de Fourier de l'anomalie moyenne convergent pour tout $e < 1$. Voir l'annexe C pour plus de détails sur les développements en série et les développements elliptiques.

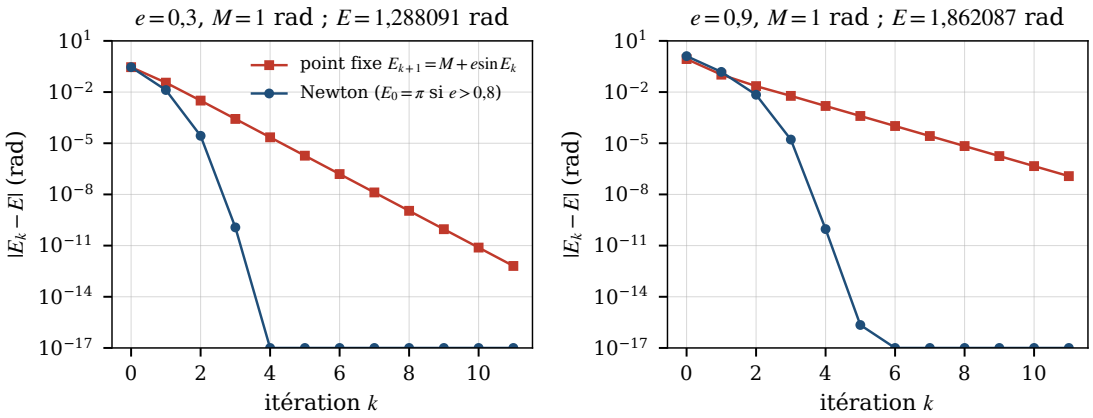


FIGURE 3.6 – Convergence de la méthode de Newton et de l'itération de point fixe pour l'équation de Kepler.

Complément : cas hyperbolique

Pour une hyperbole ($e > 1$, $a < 0$), on définit l'anomalie hyperbolique H par $r = a(1 - e\cosh H)$, et l'équation de Kepler devient $e\sinh H - H = n(t - t_p)$ avec $n = \sqrt{\mu/(-a)^3}$; la relation avec l'anomalie vraie s'écrit $\tan(\theta/2) = \sqrt{(e+1)/(e-1)}\tanh(H/2)$. Ces formules servent pour les trajectoires de survol planétaire et les passages de comètes ou d'objets interstellaires comme 1I/'Oumuamua ($e = 1{,}20$) ou 3I/ATLAS ($e \simeq 6{,}1$, 2025).

3.4 Équations de Lagrange

Dans cette section on montre que les n équations newtoniennes d'un système potentiel de n points matériels, qui sont des équations vectorielles sur les positions et les vitesses, peuvent s'écrire sous forme de 3n équations lagrangiennes, qui sont des équations scalaires écrites directement sur les coordonnées généralisées des n points matériels. Deux exemples simples sont donnés.

Reprenons les équations de la dynamique de Newton d'un système potentiel de n points matériels telles que nous les avons posées au problème (3.29) :

$$m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i + \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_i} = 0. \tag{3.50}$$

Dans ce système l'énergie potentielle est $U = U(\boldsymbol{r})$ et l'énergie cinétique $T = \sum_i m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i^2/2$. De plus les $6n$ variables $(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_n, \dot{\boldsymbol{r}}_1, \ldots, \dot{\boldsymbol{r}}_n)$ sont indépendantes. Introduisons l'application $L : E^{3n} \times E^{3n} \to \mathbb{R}$ telle que $L(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}) = T(\dot{\boldsymbol{r}}) - U(\boldsymbol{r})$. Comme on a

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i} = m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i, \qquad \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_i} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_i}, \tag{3.51}$$

on peut écrire l'équation (3.50) sous la forme

$$(3.50) \iff \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_i} = 0. \tag{3.52}$$

On peut montrer (cf. le principe de moindre action de Hamilton dans [1] par exemple) que l'équivalence (3.52) est vraie quel que soit le système de coordonnées sur l'espace de configuration E^{3n} du système de points matériels. On a alors le théorème suivant.

Théorème (équations d'Euler-Lagrange)

Soient $q = (q_1, \ldots, q_{3n})$ des coordonnées quelconques sur l'espace de configuration (c'est-à-dire l'espace des positions) d'un système potentiel de n points matériels. Alors les variations de q en fonction du temps obéissent aux équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \qquad L = T - U. \tag{3.53}$$

Ces équations s'étendent telles quelles aux cas où T et U dépendent explicitement du temps. Cela peut arriver par exemple lorsque des parties du système ont un mouvement imposé (dans ce cas l'énergie cinétique T dépend explicitement du temps) ou encore lorsque le système est soumis à un champ extérieur variable (dans ce cas U dépend du temps). Ainsi L est plus généralement une fonction de $6n+1$ variables : $L = L(q_1, \ldots, q_{3n}, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_{3n}, t)$.

3.5 Fonction de Lagrange, coordonnées généralisées

On appelle $L(q, \dot{q}, t) = T - U$ la *fonction de Lagrange* (ou lagrangien) ; les q_i sont les *coordonnées généralisées*, les $\dot{q}_i$ les *vitesses généralisées*, les $\partial L/\partial \dot{q}_i$ les *impulsions généralisées* et les $\partial L/\partial q_i$ les *forces généralisées*.

Notez ici le changement par rapport aux équations de Newton : il n'est plus question désormais de manipuler des vecteurs positions et des vecteurs vitesses, ni de déterminer les bonnes projections qui permettront de sortir les équations du mouvement dans un jeu de coordonnées judicieux. Ici les équations sont directement données sur les coordonnées généralisées q qui définissent les positions du système (c'est-à-dire sa configuration). Il ne reste donc plus qu'à choisir les coordonnées généralisées les plus adaptées à la description de la configuration du système et on a immédiatement sur ces coordonnées les équations du mouvement. Toute la difficulté est reportée sur le changement de variables.

Attention cependant à ce qu'on entend par coordonnées généralisées. Pour déterminer la position d'un système de n points matériels dans l'espace, il faut se donner n rayons vecteurs, c'est-à-dire $3n$ coordonnées cartésiennes. Le nombre de grandeurs scalaires indépendantes qu'il faut se donner pour déterminer de façon univoque la position (c'est-à-dire la configuration) d'un système est appelé nombre de *degrés de liberté* du système. Dans le cas présent ce nombre est égal à $3n$; il est plus petit en présence de liaisons (un pendule plan de longueur fixe n'a qu'un degré de liberté). Ces grandeurs ne sont pas forcément les coordonnées cartésiennes des points, bien sûr, et selon les conditions du problème le choix d'un autre système de coordonnées peut être plus commode (il peut y avoir des angles, des distances ou des combinaisons de ces grandeurs, mais jamais de vitesses). Mais dans tous les cas il faut absolument que les grandeurs choisies $(q_1, \ldots, q_{3n})$ caractérisent de manière univoque la position du système.

3.6 Équations de Hamilton

La formulation des lois de la mécanique à l'aide de la fonction de Lagrange (et des équations de Lagrange que l'on en déduit) suppose que l'on se donne, pour décrire l'état mécanique d'un système, ses coordonnées généralisées et ses vitesses généralisées. Cette méthode n'est pas la seule possible. La description de l'état d'un système à l'aide de ses coordonnées et de ses impulsions généralisées présente aussi de nombreux avantages, notamment pour l'étude de divers problèmes généraux de mécanique. Cette section développe les équations du mouvement (équations de Hamilton) correspondant à cette méthode.

La fonction L de Lagrange, comme on l'a vu précédemment, est une fonction de $2m$ variables indépendantes q_i et $\dot{q}_i$ (m est le nombre de degrés de liberté). Sa différentielle totale s'écrit

$$\mathrm{d}L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\,\mathrm{d}q_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,\mathrm{d}\dot{q}_i. \tag{3.54}$$

En appelant $p_i = \partial L/\partial \dot{q}_i$ les impulsions généralisées, les équations de Lagrange donnent $\partial L/\partial q_i = \dot{p}_i$. Donc on peut écrire la différentielle totale de L sous la forme

$$\mathrm{d}L = \sum_i \dot{p}_i \,\mathrm{d}q_i + \sum_i p_i \,\mathrm{d}\dot{q}_i = \sum_i \dot{p}_i \,\mathrm{d}q_i + \mathrm{d}\Big(\sum_i p_i \dot{q}_i\Big) - \sum_i \dot{q}_i \,\mathrm{d}p_i, \tag{3.55}$$

en développant le deuxième terme. Ceci donne finalement

$$\mathrm{d}\Big(\sum_i p_i \dot{q}_i - L\Big) = -\sum_i \dot{p}_i \,\mathrm{d}q_i + \sum_i \dot{q}_i \,\mathrm{d}p_i. \tag{3.56}$$

On appelle la quantité sous le signe différentiel la *fonction de Hamilton* (ou hamiltonien) du système :

$$H(q,p,t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L, \tag{3.57}$$

et de l'égalité $\mathrm{d}H = -\sum \dot{p}_i \,\mathrm{d}q_i + \sum \dot{q}_i \,\mathrm{d}p_i$, dans laquelle les variables indépendantes sont les coordonnées et les impulsions, on tire les équations suivantes :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{3.58}$$

Ce sont les *équations de Hamilton*. Elles constituent un système de $2m$ équations du premier ordre à $2m$ inconnues $p(t)$ et $q(t)$, équivalent aux m équations du second ordre obtenues par la méthode de Lagrange. En effet on vient de voir que si les $q_i(t)$ vérifient les équations de Lagrange alors les couples $(p_i(t), q_i(t))$ vérifient les équations de Hamilton. La réciproque se démontre de la même manière. On a donc obtenu le théorème suivant.

Théorème (équations canoniques)

Soit le système d'équations de Lagrange $\dot{p} = \partial L/\partial q$, où $p = \partial L/\partial \dot{q}$, défini par la fonction de Lagrange $L : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $L(q,\dot{q},t) = T - U$. Ce système est équivalent au système de $2m$ équations du premier ordre, ou équations de Hamilton,

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \tag{3.59}$$

où l'application $H : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $H(q,p,t) = p\,\dot{q} - L(q,\dot{q},t)$, est la fonction de Hamilton [a].

a. Dans les faits on peut montrer que ce résultat est vrai pour toute fonction L convexe en $\dot{q}$, et que dans ce cas H est la transformée de Legendre de la fonction de Lagrange considérée comme une fonction de $\dot{q}$. En mécanique c'est toujours le cas puisque la partie de $L = T - U$ qui dépend de $\dot{q}$ n'est autre que l'énergie cinétique T, forme quadratique définie positive de $\dot{q}$. Notez cependant que ce résultat est général à tous les problèmes variationnels et ne se restreint pas à la mécanique. Cf. [1] pour plus de détails.

À cause de leur simplicité et de leur symétrie, ces équations sont souvent appelées *équations canoniques*.

3.7 Fonction de Hamilton et énergie

Dans le cadre de la mécanique, comme on l'a vu plus haut, la fonction de Lagrange s'écrit sous la forme $L = T - U$ où l'énergie cinétique T est une forme quadratique en $\dot{q}$:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}(q,t)\,\dot{q}_i \dot{q}_j, \qquad U = U(q). \tag{3.60}$$

On peut sous ces hypothèses démontrer le théorème suivant (à l'aide du théorème d'Euler sur les fonctions homogènes, voir [3] ou [1]), qui donne un sens physique à la fonction de Hamilton.

Théorème

Sous les hypothèses faites ci-dessus, la fonction de Hamilton H est l'énergie totale :

$$H = T + U. \tag{3.61}$$

Ce théorème de l'équivalence de l'énergie totale avec la fonction de Hamilton entraîne d'importants corollaires. Par exemple, la loi de conservation de l'énergie va alors s'exprimer sous une forme simple.

Corollaire

L'égalité $\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial H}{\partial t}$ est vérifiée. En particulier pour les systèmes dont la fonction de Hamilton ne dépend pas explicitement du temps ($\partial H/\partial t = 0$), la loi de conservation de la fonction de Hamilton, c'est-à-dire de l'énergie, est réalisée : $H(q(t), p(t)) = \text{cste}$.

Pour montrer ce corollaire, il suffit d'écrire la dérivée de la fonction de Hamilton par rapport au temps dans laquelle on fait intervenir les équations de Hamilton :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(q(t),p(t),t) = \frac{\partial H}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial H}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}. \tag{3.62}$$

3.8 Quelques exemples simples

3.8.1 Le pendule simple

Considérons un pendule simple de longueur l, de masse m, en mouvement dans un plan (figure 3.7). Son mouvement peut être paramétré par un seul angle θ, que fait la tige du pendule avec la verticale locale. Pour le pendule simple, l'espace de configuration est de dimension 1 : il peut être complètement paramétré par une seule variable. Comme θ est un angle, il est périodique de période 2π : l'espace de configuration du pendule simple est le cercle $\mathbb{S} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

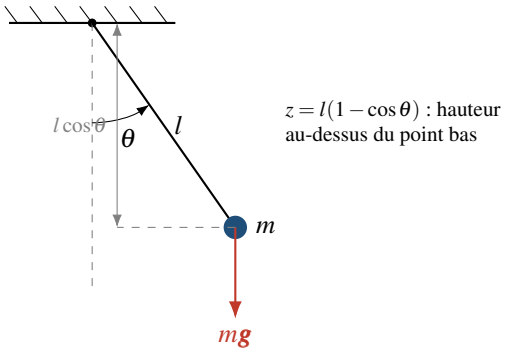


FIGURE 3.7 – Pendule simple.

Appelons g l'accélération de la pesanteur. En projetant l'équation de Newton $m\ddot{\boldsymbol{r}} = -\boldsymbol{\nabla}U + \boldsymbol{N}$ ($\boldsymbol{N}$ étant la tension de la tige) sur la direction perpendiculaire à la tige du pendule, on en déduit l'équation du pendule :

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin\theta, \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{3.63}$$

Passons au calcul de l'équation du mouvement par la méthode de Lagrange. L'énergie cinétique du pendule est $T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$; son énergie potentielle est $U = mgz = mgl(1-\cos\theta)$. Donc le lagrangien est $L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1-\cos\theta)$, et l'équation du mouvement sur θ est donnée par l'équation de Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0, \tag{3.64}$$

c'est-à-dire l'équation habituelle déjà obtenue ci-dessus, $\ddot{\theta} + \omega^2 \sin\theta = 0$, sans avoir eu à se soucier de la tension de la tige : c'est tout l'intérêt de la méthode.

3.8.2 Le problème de Kepler en formalisme de Lagrange

Le problème de Kepler est le problème du mouvement d'un point matériel libre dans un plan, attiré par un champ central selon la loi de Newton. On peut remarquer, en passant, que ce mouvement n'est autre qu'une chute libre (nous avons déjà traité ce cas de la manière « classique » à la section 3.3.1), puisque le mouvement de la chute libre est plan du fait de la conservation du moment cinétique. Ici, comme le mouvement du point matériel est libre de contraintes et qu'il se fait dans le plan, son espace de configuration est le plan : il est de dimension 2. Comme déjà considéré, les coordonnées naturelles pour étudier ce problème sont les coordonnées polaires, car elles s'adaptent très bien à la fois à la planéité du mouvement et à la symétrie du champ central. On utilisera donc les coordonnées $q_1 = r$ et $q_2 = \phi$ (figure 3.8).

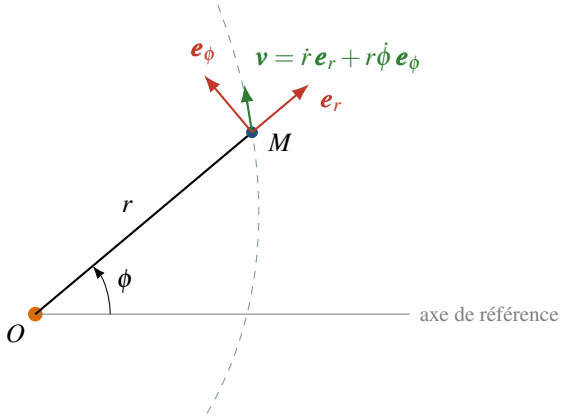


FIGURE 3.8 – Le problème de Kepler en coordonnées polaires.

Le vecteur vitesse s'écrit dans ces coordonnées $\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\,\boldsymbol{e}_r + r\dot{\phi}\,\boldsymbol{e}_\phi$. L'énergie cinétique de la particule s'écrit $T = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2)$ et l'énergie potentielle $U(r) = -m\mu/r$. Le lagrangien s'écrit donc

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) + \frac{m\mu}{r}. \tag{3.65}$$

Le mouvement dans les coordonnées (q_1, q_2) est alors donné par les équations de Lagrange sous la forme du système

$$\begin{cases} m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 + \dfrac{m\mu}{r^2} = 0, \\ mr^2\ddot{\phi} + 2mr\dot{r}\dot{\phi} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(mr^2\dot{\phi}\right) = 0. \end{cases} \tag{3.66}$$

On retrouve les équations de la section 3.3.1 : la seconde exprime que ϕ est une coordonnée *cyclique* (elle n'apparaît pas dans L), et que son impulsion conjuguée $p_\phi = mr^2\dot{\phi}$, le moment cinétique, est une intégrale première. L'approche hamiltonienne de ce problème est développée dans l'annexe B.

4 Problème à deux corps

Le problème à deux corps s'intéresse à l'interaction de deux corps massifs se mouvant sous l'influence de leur attraction mutuelle. Il s'agit du problème techniquement le plus simple que l'on puisse envisager en mécanique céleste, avec des équations dynamiques qui sont intégrables en fonction du temps. La répartition des masses dans le Système solaire fait que l'on peut utiliser l'approximation à deux corps dans

un nombre très important de cas, le plus souvent quand un corps de faible masse orbite autour d'un corps ayant une masse plus importante (Soleil et planète, Jupiter et ses satellites, Terre et satellite artificiel).

Bien évidemment, c'est dans l'approximation à deux corps que l'on démontre le mouvement elliptique des planètes, en une application simple des lois de la dynamique de Newton.

4.1 Approche képlérienne

M_1 et M_2 sont les deux corps de masses m_1 et m_2, de centre d'inertie G (figure 4.1). Pour un système isolé, le centre d'inertie G a un mouvement rectiligne uniforme. Le principe de relativité de Galilée permet de choisir G comme origine d'un repère inertiel R_G. En général on préfère, pour simplifier, choisir comme origine du système de référence un des deux corps ; nous allons voir à quel prix.

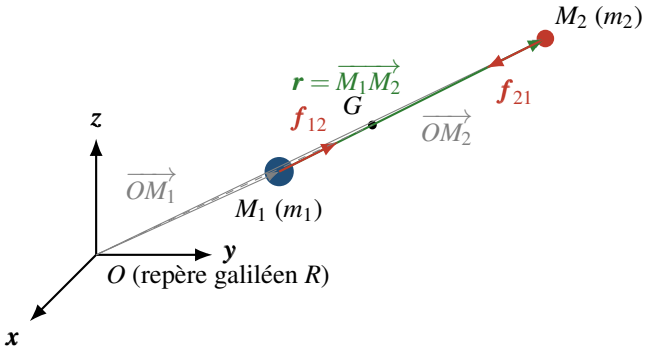


FIGURE 4.1 – Le problème à deux corps.

On note $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{M_1M_2}$, $\boldsymbol{r}_1 = \overrightarrow{GM_1}$ et $\boldsymbol{r}_2 = \overrightarrow{GM_2}$. Si l'on applique le principe fondamental de la dynamique dans le repère galiléen d'origine O,

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM_1}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{f}_{12} \\ m_2 \dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM_2}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{f}_{21} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2}\right) = (m_1+m_2)\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OG}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{f}_{12} + \boldsymbol{f}_{21} = \boldsymbol{0} \tag{4.1}$$

d'après le principe de l'action et de la réaction, ce qui confirme que R_G est galiléen. Dans R_G on a donc $m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2 = \boldsymbol{f}_{21}$ et, comme $m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{0}$ implique $\boldsymbol{r}_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{r}$,

$$\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{f}_{21} = -G\frac{m_1m_2}{r^3}\boldsymbol{r} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{G(m_1+m_2)}{r^3}\boldsymbol{r}} \tag{4.2}$$

Dans (4.2), G désigne la constante de la gravitation et non le centre d'inertie. Tout se passe comme si un référentiel d'origine M_1, de directions fixes par rapport au référentiel d'origine O, était galiléen pour le mobile M_2, à condition de remplacer la masse du corps central par la masse totale m_1+m_2. On appelle $m^* = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ la *masse réduite* du système : l'équation (4.2) est celle d'une particule fictive de masse m^* soumise à la force $\boldsymbol{f}_{21}$. Si $m_2 \ll m_1$, alors $m^* \simeq m_2$, le référentiel barycentrique se confond avec celui centré sur M_1 et l'on retrouve la chute libre de la section 3.3 avec $\mu = Gm_1$.

Dans le cas général, chacun des deux corps décrit dans R_G une conique homothétique de celle du mouvement relatif (de rapports $-m_2/(m_1+m_2)$ et $m_1/(m_1+m_2)$, le signe moins traduisant le fait que M_1 et M_2 sont toujours de part et d'autre de G), de foyer G. On s'est donc ramené au cas traité à la section 3.3 avec $\mu = G(m_1+m_2)$: c'est cette valeur qui intervient dans la troisième loi de Kepler, $n^2a^3 = G(m_1+m_2)$, ce qui permet de peser les systèmes doubles (étoiles binaires, astéroïdes binaires, exoplanètes).

4.2 L'orbite dans l'espace : les éléments orbitaux

À un instant t, la trajectoire est complètement déterminée par trois coordonnées de position et trois coordonnées de vitesse : le vecteur d'état comprend donc six paramètres. Dans le cas du mouvement képlérien, il est plus adapté de décrire la trajectoire du mobile en fonction des caractéristiques géométriques de la conique décrite. La trajectoire d'un satellite est décrite dans un repère non tournant, supposé galiléen, centré au centre de gravité du corps autour duquel il orbite : la Terre pour les satellites terrestres, le Soleil pour les sondes interplanétaires durant leur croisière, Mars pour les sondes martiennes, etc. On utilisera donc un repère géocentrique équatorial pour décrire le mouvement des satellites terrestres, et un repère héliocentrique écliptique pour celui des sondes interplanétaires. Ces repères sont en réalité accélérés, puisque le corps central est lui-même attiré par les autres astres ; cette accélération intervient dans les perturbations dues à un troisième corps (section 5.8.3).

Par convention, l'orbite est décrite par les six *éléments orbitaux* (ou éléments képlériens) suivants (figure 4.2) :

- a : demi-grand axe de l'orbite (sa taille) ;
- e : excentricité de l'orbite (sa forme) ;
- i : inclinaison du plan de l'orbite sur le plan de référence ;
- Ω : longitude du nœud ascendant, angle entre la direction de référence γ et la ligne des nœuds, comptée dans le plan de référence ;
- ω : argument du périgée (ou du périastre), angle entre le nœud ascendant et le périgée, compté dans le plan de l'orbite ;
- t_p (ou τ) : instant de passage au périgée ; on utilise aussi, de manière équivalente, l'anomalie moyenne M_0 à une époque donnée.

Les éléments a et e définissent la taille et la forme de l'orbite, i et Ω l'orientation de son plan dans l'espace, ω l'orientation de l'orbite dans ce plan, et le dernier élément fixe la position du satellite sur l'orbite. La position courante est repérée par l'anomalie vraie ν (notée θ dans le chapitre précédent) ou par l'*argument de latitude* $u = \omega + \nu$, angle entre le nœud ascendant et le satellite.

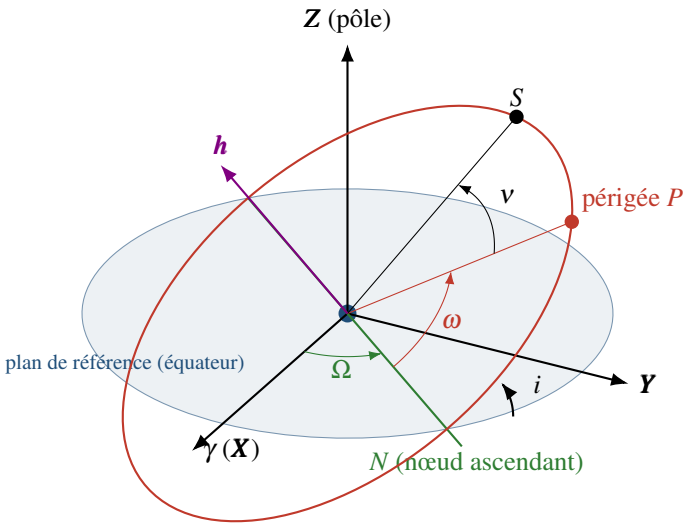


FIGURE 4.2 – Les éléments orbitaux : inclinaison i, longitude du nœud ascendant Ω, argument du périgée ω, anomalie vraie ν.

Les conventions de signe sont les suivantes : les angles sont positifs dans le sens direct ; l'orbite est décrite dans le sens direct autour de $\boldsymbol{h}$; le nœud pris pour origine est le nœud *ascendant*, où le satellite

traverse le plan de référence vers le nord ; l'inclinaison est comprise entre 0 et 180°, et si $90° < i < 180°$ l'orbite est *rétrograde* (le satellite tourne dans le sens opposé à la rotation de la Terre). Une orbite d'inclinaison nulle est dite équatoriale, une orbite de 90° polaire. Le *moment cinétique* par unité de masse $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{v}$ est normal au plan de l'orbite ; sa composante selon l'axe polaire vaut $h\cos i$.

> Lorsque l'excentricité ou l'inclinaison sont nulles, certains éléments deviennent indéterminés (le périgée pour une orbite circulaire, le nœud pour une orbite équatoriale). On utilise alors des éléments non singuliers, comme la longitude du périgée $\varpi = \Omega + \omega$, la longitude moyenne $\ell = \varpi + M$, ou les éléments équinoxiaux $(a, e\cos\varpi, e\sin\varpi, \tan\frac{i}{2}\cos\Omega, \tan\frac{i}{2}\sin\Omega, \ell)$. Les variables de Poincaré de la section 5.6 répondent au même souci.

4.3 Rappels sur les coniques

Ce paragraphe rappelle les principales propriétés caractéristiques de l'ellipse, utiles pour comprendre ce qui suit (figure 3.3 et annexe D) : a est le demi-grand axe ; A l'apogée (apoapse), point le plus éloigné du foyer F occupé par le corps central ; P le périgée (périapse), point le plus rapproché ; $b = IB$ le demi-petit axe, I étant le centre ; $c = IF$ la demi-distance focale ; $e = c/a$ l'excentricité. Les relations (3.16) s'appliquent : $a^2 = b^2 + c^2$, $p = a(1-e^2)$, $b = a\sqrt{1-e^2}$, $r_p = a(1-e)$, $r_a = a(1+e)$.

4.4 Paramètres cartésiens et paramètres képlériens

Il est souvent utile de passer d'un repère cartésien à une description képlérienne, et réciproquement. Cette section vise à définir quelques outils utiles pour effectuer ces correspondances.

On définit un repère lié à l'orbite et centré au foyer, $(O, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{W})$ (le foyer O étant par exemple le centre de la Terre) : $\boldsymbol{P}$ est le vecteur unitaire dirigé de O vers le périgée, $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{h}/h$ est le vecteur unitaire normal à l'orbite, et $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{W} \wedge \boldsymbol{P}$ complète le trièdre direct dans le plan de l'orbite. Dans ce repère, dit *périfocal*, la position et la vitesse s'écrivent simplement en fonction de l'anomalie vraie :

$$\boldsymbol{r} = r\cos\nu\,\boldsymbol{P} + r\sin\nu\,\boldsymbol{Q}, \qquad \boldsymbol{v} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\left[-\sin\nu\,\boldsymbol{P} + (e+\cos\nu)\,\boldsymbol{Q}\right], \qquad r = \frac{p}{1+e\cos\nu}. \tag{4.3}$$

Si l'on note (X, Y, Z) les coordonnées de S dans le repère de référence (géocentrique équatorial, supposé galiléen) et $(x, y, z) = (r\cos\nu, r\sin\nu, 0)$ ses coordonnées dans le repère périfocal, le passage de l'un à l'autre est une composition de trois rotations. On rappelle que les matrices de rotation d'angle θ autour des axes $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Z}$ s'écrivent

$$R_X(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad R_Z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

avec la convention *active* : $R_Z(\theta)\boldsymbol{u}$ est le vecteur $\boldsymbol{u}$ tourné de θ autour de $\boldsymbol{Z}$ dans le sens direct.

4.5 Passage du repère périfocal au repère galiléen

Pour amener le repère de référence sur le repère périfocal, on tourne d'abord de Ω autour de $\boldsymbol{Z}$ (ce qui amène $\boldsymbol{X}$ sur la ligne des nœuds), puis de i autour de la ligne des nœuds (ce qui amène le plan de référence sur le plan orbital), puis de ω autour de $\boldsymbol{W}$ (ce qui amène la ligne des nœuds sur $\boldsymbol{P}$). Ce sont les trois angles d'Euler classiques, et la matrice de passage s'écrit

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = R_Z(\Omega)\,R_X(i)\,R_Z(\omega) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

soit explicitement, en notant c et s les cosinus et sinus,

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_\Omega c_\omega - s_\Omega c_i s_\omega & -c_\Omega s_\omega - s_\Omega c_i c_\omega & s_\Omega s_i \\ s_\Omega c_\omega + c_\Omega c_i s_\omega & -s_\Omega s_\omega + c_\Omega c_i c_\omega & -c_\Omega s_i \\ s_i s_\omega & s_i c_\omega & c_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

Les colonnes de cette matrice sont les composantes de $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ et $\boldsymbol{W}$ dans le repère de référence ; la troisième colonne redonne bien la direction du moment cinétique, $\boldsymbol{W} = (\sin\Omega\sin i, -\cos\Omega\sin i, \cos i)$. La transformation inverse s'obtient avec la matrice transposée (les matrices de rotation sont orthogonales). Avec la relation (4.3), on dispose ainsi d'un algorithme complet pour passer des six éléments orbitaux au vecteur d'état $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$ à toute date : on calcule $M = n(t - t_p)$, on résout l'équation de Kepler pour obtenir E puis ν, on forme $\boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{v}$ dans le repère périfocal, et on applique (4.6). La figure 4.3 résume l'ensemble des angles et des vecteurs mis en jeu.

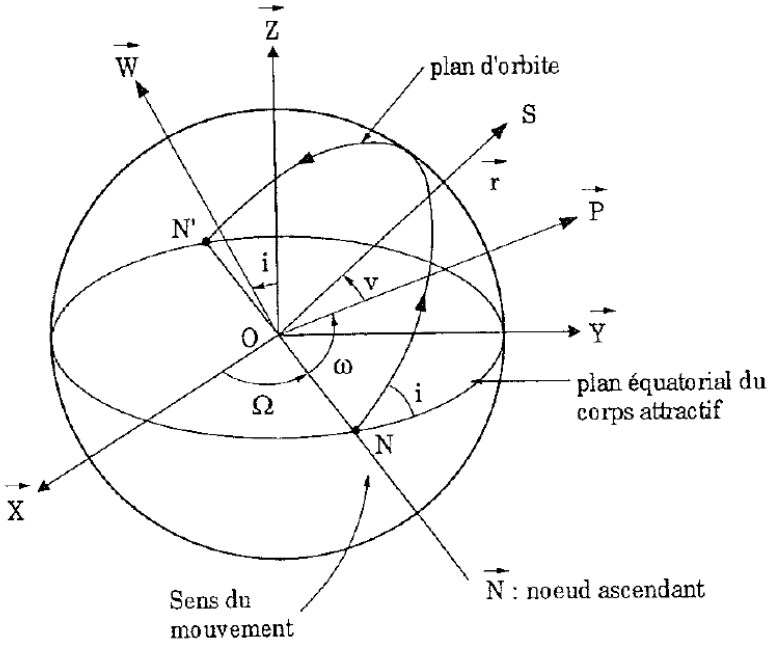


FIGURE 4.3 – Repère de référence $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$, direction $\boldsymbol{P}$ du périgée, normale $\boldsymbol{W}$ au plan de l'orbite et direction S du satellite, portée par $\boldsymbol{r}$; les angles Ω, i, ω et ν relient ces directions. $\boldsymbol{N}$ est la direction du nœud ascendant et N' le nœud descendant ; le vecteur $\boldsymbol{Q}$ du repère périfocal n'est pas représenté.

Complément : du vecteur d'état aux éléments orbitaux

Le passage inverse, du vecteur d'état $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$ aux éléments orbitaux, est tout aussi utile (il est par exemple le point de départ des équations de Gauss du chapitre suivant). On calcule successivement :

- le moment cinétique $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{v}$, d'où i par $\cos i = h_Z/h$, et le vecteur nodal $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{Z} \wedge \boldsymbol{h}$, dirigé vers le nœud ascendant, d'où Ω par $\cos\Omega = N_X/N$ (avec $\Omega > 180°$ si $N_Y < 0$) ;
- le vecteur excentricité (ou vecteur de Laplace-Runge-Lenz normalisé), dirigé vers le périgée et de norme e :
$$\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{h}}{\mu} - \frac{\boldsymbol{r}}{r} = \frac{1}{\mu}\left[\left(v^2 - \frac{\mu}{r}\right)\boldsymbol{r} - (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{v}\right]; \tag{4.7}$$
- le demi-grand axe par l'équation des forces vives, $\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu}$;
- l'argument du périgée par $\cos\omega = \boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{e}/(Ne)$ (avec $\omega > 180°$ si $e_Z < 0$) et l'anomalie vraie par $\cos\nu = \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}/(er)$ (avec $\nu > 180°$ si $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v} < 0$) ;
- enfin E par $\tan(E/2) = \sqrt{(1-e)/(1+e)}\tan(\nu/2)$, puis $M = E - e\sin E$ et $t_p = t - M/n$.

Le vecteur excentricité est, avec $\boldsymbol{h}$ et l'énergie, la troisième intégrale première du problème de Kepler ; c'est sa conservation qui exprime que l'orbite est fermée et que le périgée ne tourne pas, propriété très particulière du potentiel en $1/r$.

4.6 Le repère orbital local

On travaille souvent dans le *repère orbital local* $(\boldsymbol{R},\boldsymbol{S},\boldsymbol{W})$, lié au satellite et qui tourne avec lui (figure 4.4) : $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}/r$ est le vecteur unitaire radial, $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{h}/h$ le vecteur unitaire normal à l'orbite, parallèle au moment cinétique, et $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{W} \wedge \boldsymbol{R}$ le vecteur transverse, dans le plan de l'orbite et dans le sens du mouvement. On l'appelle aussi repère $(\boldsymbol{R},\boldsymbol{T},\boldsymbol{N})$ ou repère QSW dans la littérature du CNES (avec $\boldsymbol{Q}$ radial, $\boldsymbol{S}$ transverse, $\boldsymbol{W}$ normal). C'est dans ce repère que l'on exprime naturellement les forces perturbatrices et les manœuvres du chapitre suivant.

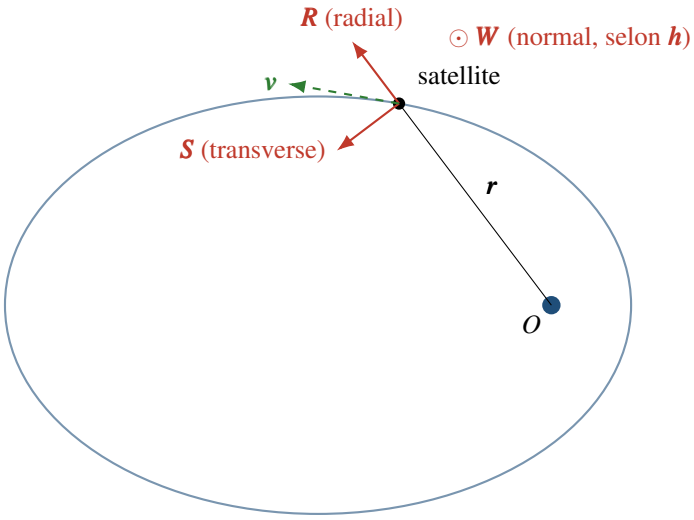


FIGURE 4.4 – Le repère orbital local $(\boldsymbol{R},\boldsymbol{S},\boldsymbol{W})$: $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}/r$, $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{h}/h$, $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{W} \wedge \boldsymbol{R}$. Le trièdre est direct et tourne avec le satellite ; la vitesse a une composante radiale $\dot{r}$ et une composante transverse $r\dot{\nu}$, jamais de composante normale.

Le passage du repère orbital local au repère galiléen s'obtient à partir de (4.5) en remplaçant ω par l'argument de latitude $u = \omega + \nu$, puisque $\boldsymbol{R}$ se déduit de la ligne des nœuds par une rotation d'angle u dans le plan de l'orbite :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = R_Z(\Omega)\, R_X(i)\, R_Z(\omega+\nu) \begin{pmatrix} x_R \\ x_S \\ x_W \end{pmatrix}. \tag{4.8}$$

Dans ce repère, la vitesse a pour composantes $v_R = \dot{r} = \sqrt{\mu/p}\, e \sin\nu$ et $v_S = r\dot{\nu} = \sqrt{\mu/p}\,(1+e\cos\nu)$, et pas de composante normale.

Complément : les grandes familles d'orbites terrestres

Le tableau 4.1 rassemble quelques orbites d'usage courant autour de la Terre. Les orbites basses (LEO) sont celles des stations spatiales, de l'observation de la Terre et des constellations de télécommunications récentes ; l'orbite géostationnaire (GEO), circulaire, équatoriale et de période égale au jour sidéral, permet à un satellite de rester fixe dans le ciel ; l'orbite de transfert géostationnaire (GTO) est l'ellipse de Hohmann qui relie les deux ; les orbites héliosynchrones et Molniya exploitent les perturbations dues à l'aplatissement terrestre (section 5.11 et encadré page 57). La colonne « altitude » donne l'altitude d'une orbite circulaire, ou les altitudes du périgée et de l'apogée pour une orbite elliptique ; on obtient le rayon en ajoutant le rayon équatorial terrestre, $R_\oplus = 6\,378\,\text{km}$.

Orbite	altitude (km)	e	i	période	exemples
LEO (ISS)	400–420	$\simeq 0$	51,6°	92,8 min	ISS
LEO constellation	480–570	$\simeq 0$	53°	94–96 min	Starlink
Héliosynchrone	700–800	$\simeq 0$	98,2°–98,6°	98–101 min	Sentinel-2, Pléiades, SPOT
Molniya	$500 \times 39\,900$	0,74	63,4°	11 h 58 min	Molniya, SDS
GTO (Ariane 6)	$250 \times 35\,786$	0,73	6°	10 h 32 min	satellites GEO avant leur circularisation
MEO (navigation)	20 200	$\simeq 0$	55°	11 h 58 min	GPS
MEO (navigation)	23 222	$\simeq 0$	56°	14 h 05 min	Galileo
GEO	35 786	0	0°	23 h 56 min	Meteosat, Eutelsat

TABLE 4.1 – Quelques orbites terrestres usuelles.

5 Mouvement à deux corps perturbé

Une application directe du mouvement à deux corps est le cas où l'on recherche la solution d'un problème à deux corps faiblement perturbé. Ce cas est particulièrement utile lorsque l'on s'intéresse au mouvement réel d'un satellite autour de la Terre. On a vu auparavant que le champ de gravité de la Terre pouvait s'approcher, en première approximation, du champ de gravité créé par un point matériel, dans le cas où l'on supposait un corps central de masse volumique fonction du seul rayon. Ce n'est évidemment pas rigoureusement vrai, et l'on ne peut pas non plus négliger les autres forces qui s'exercent sur un satellite artificiel. Toutefois, ces forces étant de plusieurs ordres de grandeur inférieures au champ de gravité central, on appliquera avec efficacité la théorie qui suit.

5.1 Première approche

Le mouvement réel d'un objet dans la situation décrite ci-dessus (par exemple, mais pas obligatoirement, un satellite artificiel autour de la Terre) répond à l'équation suivante :

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \underbrace{-\frac{\mu}{r^3}\boldsymbol{r}}_{\substack{\text{attraction centrale}\\ \text{terme principal}}} + \underbrace{\boldsymbol{a}_p}_{\substack{\text{accélération perturbatrice}\\ \text{autres forces}}} \tag{5.1}$$

$\boldsymbol{a}_p$ est en général très faible devant l'accélération principale, et la trajectoire réelle est donc quasi képlérienne. On travaillera donc plutôt en termes d'écarts à la trajectoire képlérienne. Par rapport à un problème classique, la bonne formulation est toutefois celle exprimée en paramètres képlériens, plutôt qu'en paramètres cartésiens : les six éléments orbitaux, constants dans le problème non perturbé, deviennent des fonctions lentement variables du temps.

5.2 Éléments orbitaux osculateurs

Dans le cas d'une orbite képlérienne, la trajectoire est entièrement déterminée par les six éléments $(a, e, i, \Omega, \omega, t_p)$. Ces paramètres sont des fonctions des conditions initiales $(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{v}_0)$. Dans le cas d'une orbite perturbée, on écrit

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\mu}{r^3}\boldsymbol{r} + \boldsymbol{a}_p \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{r}(t_0) = \boldsymbol{r}_0,\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t_0) = \boldsymbol{v}_0. \tag{5.2}$$

À tout instant, on peut calculer les paramètres de Kepler « idéaux » à partir du vecteur d'état courant $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$, en utilisant les formules du complément de la section 4.5 (moment cinétique $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{v}$, vecteur excentricité, énergie). L'orbite képlérienne ainsi définie est celle que suivrait le satellite si la perturbation cessait instantanément ; elle est appelée *orbite osculatrice*, et ses éléments sont appelés *éléments orbitaux*

osculateurs (figure 5.1). Attention, les deux trajectoires sont tangentes mais pas osculatrices au sens géométrique du terme : elles n'ont en général pas la même courbure, puisque la composante de l'accélération normale à la vitesse diffère dès que $\boldsymbol{a}_p$ n'est pas colinéaire à $\boldsymbol{v}$.

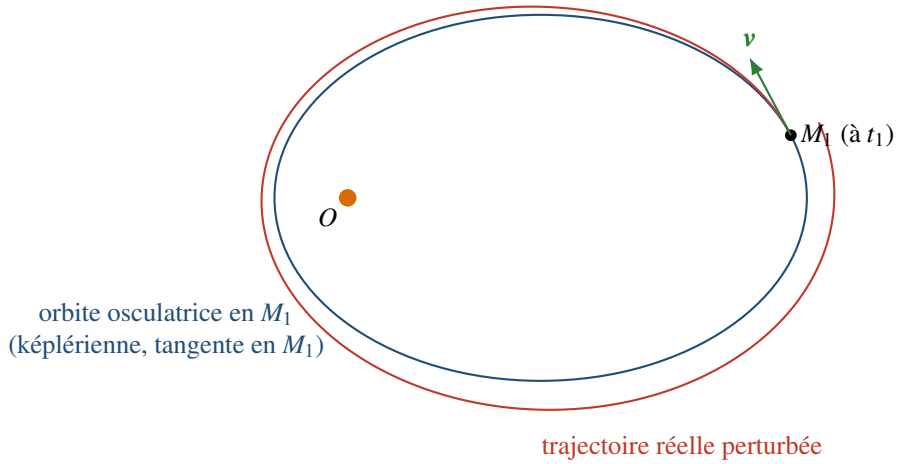


FIGURE 5.1 – Orbite osculatrice.

5.3 Équations de Gauss

Puisqu'il existe une bijection entre la formulation cartésienne du mouvement et la formulation selon les paramètres de Kepler, que les paramètres de Kepler ne dépendent que des conditions initiales, et que certaines perturbations sont naturellement formulées selon ces paramètres, on va chercher à intégrer directement les paramètres de Kepler de manière à avoir une intégration « directe » de la trajectoire. Dans le repère orbital local $(\boldsymbol{R},\boldsymbol{S},\boldsymbol{W})$ de la section 4.6, une accélération perturbatrice pourra s'écrire

$$\boldsymbol{a}_p = R\,\boldsymbol{u}_R + S\,\boldsymbol{u}_S + W\,\boldsymbol{u}_W \tag{5.3}$$

où $\boldsymbol{u}_R$, $\boldsymbol{u}_S$ et $\boldsymbol{u}_W$ désignent les vecteurs unitaires $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{W}$ de ce repère, avec R la composante radiale, S la composante transverse (dans le plan de l'orbite, dans le sens du mouvement) et W la composante normale au plan de l'orbite. On va alors chercher à exprimer les dérivées par rapport au temps des paramètres de Kepler $(\dot{a},\dot{e},\dot{i},\dot{\Omega},\dot{\omega},\dot{M})$ en fonction de ces composantes. On note ν l'anomalie vraie, $u=\omega+\nu$ l'argument de latitude, $p=a(1-e^2)$ et $h=\sqrt{\mu p}$ le moment cinétique par unité de masse.

Paramètre a. On a exprimé à la section 3.3.4 l'énergie mécanique par unité de masse dans le mouvement elliptique, notée E_M au chapitre 3 et $\mathscr{E}$ ici,

$$\mathscr{E} = -\frac{\mu}{2a}. \tag{5.4}$$

La variation d'énergie mécanique est égale au travail de la force perturbatrice. On peut donc écrire, par unité de masse et de temps,

$$\dot{\mathscr{E}} = \boldsymbol{a}_p\cdot\boldsymbol{v} = (R\,\boldsymbol{u}_R + S\,\boldsymbol{u}_S + W\,\boldsymbol{u}_W)\cdot(\dot{r}\,\boldsymbol{u}_R + r\dot{\nu}\,\boldsymbol{u}_S) = \dot{r}R + r\dot{\nu}S. \tag{5.5}$$

Si l'on différentie maintenant l'expression (5.4), il vient $\dot{\mathscr{E}} = \frac{\mu}{2a^2}\dot{a}$. Or, d'après la section 4.6, $\dot{r} = \sqrt{\mu/p}\,e\sin\nu$ et $r\dot{\nu} = \sqrt{\mu/p}\,(1+e\cos\nu)$, d'où

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \frac{2a^2}{\mu}\,(\dot{r}R + r\dot{\nu}S) = \frac{2a^2}{h}\left[e\sin\nu\,R + \frac{p}{r}S\right] = \frac{2a^{3/2}}{\sqrt{\mu(1-e^2)}}\left[e\sin\nu\,R + (1+e\cos\nu)S\right]. \tag{5.6}$$

On remarque qu'une force normale à l'orbite ne change pas le demi-grand axe et que, puisque $\dot{a} = (2a^2/\mu)\,\boldsymbol{a}_p\cdot\boldsymbol{v}$, une force tangentielle (colinéaire à la vitesse) est la plus efficace pour le modifier (c'est la stratégie des manœuvres tangentielles de la section 5.12).

Paramètre e. Le moment cinétique par unité de masse vérifie $h^2 = \mu a(1-e^2)$, soit $e^2 = 1 - h^2/(\mu a) = 1 + 2h^2\mathscr{E}/\mu^2$. En dérivant cette expression,

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \frac{e^2-1}{2e}\left(2\frac{\dot{h}}{h} + \frac{\dot{\mathscr{E}}}{\mathscr{E}}\right). \tag{5.7}$$

Comme la dérivée du moment cinétique est égale au moment de la force appliquée,

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{h}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{r}\wedge\boldsymbol{a}_p = rS\,\boldsymbol{u}_W - rW\,\boldsymbol{u}_S \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = rS, \tag{5.8}$$

la composante selon $\boldsymbol{u}_S$ ne modifiant que la direction de $\boldsymbol{h}$. En reportant, et après quelques lignes de calcul, il vient

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{h}\left[p\sin\nu\,R + ((p+r)\cos\nu + re)\,S\right] = \sqrt{\frac{p}{\mu}}\left[\sin\nu\,R + (\cos\nu+\cos E)\,S\right], \tag{5.9}$$

la seconde forme utilisant l'anomalie excentrique ($r(\cos\nu + e) = p\cos E$). Ici aussi, une force normale à l'orbite ne change pas l'excentricité.

Paramètre i. L'inclinaison se lit sur la direction du moment cinétique : $\cos i = h_Z/h$. Seule la composante normale W fait tourner $\boldsymbol{h}$: son moment $-rW\,\boldsymbol{u}_S$ fait tourner $\boldsymbol{h}$ autour de $\boldsymbol{u}_R$ à la vitesse angulaire rW/h, et la projection de cette rotation sur la ligne des nœuds est proportionnelle à $\cos u$. Des calculs directs conduisent à

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{r\cos(\omega+\nu)}{h}\,W. \tag{5.10}$$

On constate que les variations de i ne peuvent se produire que sous l'action d'une force normale à l'orbite, et qu'elles sont maximales aux nœuds ($u = 0$ ou π).

Paramètre Ω. Si l'on exprime le moment cinétique $\boldsymbol{h}$ dans le repère cartésien de référence, on peut écrire (section 4.5)

$$h_X = h\sin i\sin\Omega, \qquad h_Y = -h\sin i\cos\Omega, \qquad h_Z = h\cos i, \qquad \text{et donc} \qquad \tan\Omega = -\frac{h_X}{h_Y}. \tag{5.11}$$

On peut alors dériver Ω :

$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = \frac{h_X\dot{h}_Y - h_Y\dot{h}_X}{h_X^2+h_Y^2} = \frac{\sin\Omega\,\dot{h}_Y + \cos\Omega\,\dot{h}_X}{h\sin i}. \tag{5.12}$$

En substituant dans cette expression les composantes de $\dot{\boldsymbol{h}} = -rW\,\boldsymbol{u}_S + rS\,\boldsymbol{u}_W$, il vient

$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = \frac{r\sin(\omega+\nu)}{h\sin i}\,W. \tag{5.13}$$

Le nœud ne bouge que sous l'action d'une force normale, et l'effet est maximal lorsque le satellite est le plus loin du plan de référence ($u = \pm\pi/2$). L'expression est singulière pour $i = 0$: pour une orbite équatoriale, le nœud n'est pas défini.

Paramètres ω et M. Les calculs, plus longs, partent de la dérivée du vecteur excentricité, $\dot{\boldsymbol{e}} = \left[\boldsymbol{a}_p\wedge\boldsymbol{h} + \boldsymbol{v}\wedge(\boldsymbol{r}\wedge\boldsymbol{a}_p)\right]/\mu$, qui n'est plus conservé en présence de perturbation, et de la définition de l'anomalie moyenne ; on trouvera le détail dans [21] ou [20]. Le résultat complet est le suivant.

Équations de Gauss. Avec $p = a(1-e^2)$, $h = \sqrt{\mu p}$, $n = \sqrt{\mu/a^3}$, $u = \omega + \nu$ et (R,S,W) les composantes radiale, transverse et normale de l'accélération perturbatrice :

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \frac{2a^2}{h}\left[e\sin\nu\, R + \frac{p}{r}S\right] \tag{5.14}$$

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{h}\left[p\sin\nu\, R + ((p+r)\cos\nu + re)\, S\right] \tag{5.15}$$

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{r\cos u}{h}W \tag{5.16}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = \frac{r\sin u}{h\sin i}W \tag{5.17}$$

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{he}\left[-p\cos\nu\, R + (p+r)\sin\nu\, S\right] - \frac{r\sin u\cos i}{h\sin i}W \tag{5.18}$$

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = n + \frac{1}{na^2e}\left[(p\cos\nu - 2re)\, R - (p+r)\sin\nu\, S\right] \tag{5.19}$$

Il est à noter que ces expressions sont très générales et ne préjugent absolument pas de la nature de la force exercée : elles s'appliquent aussi bien aux perturbations naturelles qu'aux poussées des moteurs. Elles sont singulières pour $e = 0$ (le périgée n'est pas défini) et $i = 0$ (le nœud n'est pas défini) ; on utilise alors des éléments non singuliers.

5.4 Équations de Lagrange

On peut simplifier les expressions dans le cas où les forces perturbatrices dérivent d'un potentiel, ce qui est vrai pour toutes les perturbations gravitationnelles. On écrit alors l'accélération perturbatrice sous la forme $\boldsymbol{a}_p = \boldsymbol{\nabla}\mathscr{R}$, où la *fonction perturbatrice* $\mathscr{R}$ est un potentiel au sens des astronomes (l'opposé de l'énergie potentielle par unité de masse), de sorte que

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\mu}{r} + \mathscr{R}\right). \tag{5.20}$$

En exprimant $\mathscr{R}$ en fonction des éléments orbitaux et en projetant son gradient sur le repère orbital local, les équations de Gauss se transforment en équations ne faisant intervenir que les dérivées partielles de $\mathscr{R}$ par rapport aux éléments. Ce sont les *équations planétaires de Lagrange* (1808), avec $M = n(t - t_p)$ l'anomalie moyenne :

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{na}\frac{\partial\mathscr{R}}{\partial M} \tag{5.21}$$

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \frac{1-e^2}{na^2e}\frac{\partial\mathscr{R}}{\partial M} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial\mathscr{R}}{\partial\omega} \tag{5.22}$$

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial\mathscr{R}}{\partial\omega} - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial\mathscr{R}}{\partial\Omega} \tag{5.23}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial\mathscr{R}}{\partial i} \tag{5.24}$$

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial\mathscr{R}}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial\mathscr{R}}{\partial i} \tag{5.25}$$

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = n - \frac{1-e^2}{na^2e}\frac{\partial\mathscr{R}}{\partial e} - \frac{2}{na}\frac{\partial\mathscr{R}}{\partial a} \tag{5.26}$$

On remarquera la structure antisymétrique de ce système : la dérivée de chaque élément fait intervenir les dérivées partielles de $\mathscr{R}$ par rapport aux éléments « conjugués », avec des coefficients opposés (par

exemple $\partial\mathscr{R}/\partial M$ dans $\dot{a}$ et $\partial\mathscr{R}/\partial a$ dans $\dot{M}$). Cette structure est celle d'un système hamiltonien écrit dans des variables non canoniques ; les variables de Delaunay, ci-dessous, la rendent explicite.

5.5 Équations de Delaunay

Une autre façon d'étudier l'évolution dynamique du système est d'utiliser le formalisme de Hamilton. Pour cela, considérons deux points massifs M_1 et M_2 de masses m_1 et m_2, et les vecteurs position $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x,y,z)$ et vitesse $\boldsymbol{v} = (\dot{x},\dot{y},\dot{z})$ du mouvement relatif. Si l'on introduit $\mu = G(m_1+m_2)$ et la masse réduite $m^* = m_1m_2/(m_1+m_2)$, ainsi que l'impulsion $\boldsymbol{p} = m^*\boldsymbol{v}$, on a déjà vu que le hamiltonien s'identifiait à l'énergie totale du système :

$$H_{\text{Kepler}} = \frac{p^2}{2m^*} - \frac{\mu m^*}{r} = m^*\mathscr{E}. \tag{5.27}$$

Les équations de Hamilton, $\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{p}} H_{\text{Kepler}}$ et $\dot{\boldsymbol{p}} = -\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}} H_{\text{Kepler}}$, redonnent bien

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\boldsymbol{p}}{m^*}, \qquad \dot{\boldsymbol{p}} = -\frac{\mu m^*}{r^3}\boldsymbol{r} : \tag{5.28}$$

on a remplacé les trois équations couplées du second ordre par six équations couplées du premier ordre, et l'on reconnaît un système hamiltonien à trois degrés de liberté, dans lequel les coordonnées cartésiennes q_i et les impulsions p_i sont conjuguées. Est-ce le cas des éléments orbitaux $(a,e,i,\Omega,\omega,t_p)$, qui sont eux adaptés au problème képlérien ? De fait non : les équations de Lagrange ci-dessus montrent que leurs crochets de Lagrange (annexe A) ne sont pas ceux d'un système canonique. Toutefois, certaines fonctions des éléments orbitaux forment des ensembles conjugués : les variables de Delaunay et les variables de Poincaré.

Les *variables de Delaunay* sont trois angles et leurs trois moments conjugués (ici par unité de masse réduite ; il suffit de multiplier les moments par m^* pour retrouver les impulsions physiques) :

$$\begin{array}{lll} l = M & g = \omega & h = \Omega \\ L = \sqrt{\mu a} & G = \sqrt{\mu a(1-e^2)} = L\sqrt{1-e^2} & H = \sqrt{\mu a(1-e^2)}\cos i = G\cos i \end{array} \tag{5.29}$$

G est le moment cinétique par unité de masse et H sa projection sur l'axe polaire. Dans ces variables, le hamiltonien du problème de Kepler s'écrit (annexe B.2.4)

$$H_K = -\frac{\mu}{2a} = -\frac{\mu^2}{2L^2} \quad \text{(par unité de masse réduite)}, \tag{5.30}$$

et les équations canoniques

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H_K}{\partial L}, \quad \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H_K}{\partial G}, \quad \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H_K}{\partial H}, \qquad \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H_K}{\partial l}, \quad \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H_K}{\partial g}, \quad \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H_K}{\partial h} \tag{5.31}$$

donnent immédiatement $\dot{L} = \dot{G} = \dot{H} = 0$, $\dot{g} = \dot{h} = 0$ et

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H_K}{\partial L} = \frac{\mu^2}{L^3} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = n : \tag{5.32}$$

le hamiltonien ne dépend que d'un seul moment, le système est *dégénéré* (deux fréquences nulles sur trois), ce qui est une autre façon d'exprimer que l'orbite képlérienne est fermée et fixe dans l'espace. En présence d'une perturbation dérivant de la fonction perturbatrice $\mathscr{R}$, le hamiltonien devient $\mathscr{H} = H_K - \mathscr{R}(l,g,h,L,G,H)$, où h et H désignent ici les variables de Delaunay (et non le moment cinétique ni le hamiltonien), et les équations de Delaunay, $\dot{L} = \partial\mathscr{R}/\partial l$, $\dot{l} = n - \partial\mathscr{R}/\partial L$, etc., sont strictement équivalentes aux équations de Lagrange, mais avec la structure canonique apparente.

5.6 Variables de Poincaré

Les variables de Delaunay sont singulières pour $e = 0$ (g n'est pas défini) et $i = 0$ (h n'est pas défini). Poincaré a proposé de les remplacer par les variables suivantes :

$$\begin{array}{lll} \lambda = M + \omega + \Omega & \gamma = -\omega - \Omega & z = -\Omega \\ \Lambda = \sqrt{\mu a} & \Gamma = \sqrt{\mu a}\left(1 - \sqrt{1-e^2}\right) & Z = \sqrt{\mu a(1-e^2)}\,(1-\cos i) \end{array} \tag{5.33}$$

Ce sont les *variables de Poincaré* : λ (longitude moyenne), γ et z sont les coordonnées, et Λ, Γ et Z les moments conjugués correspondants. On note que $\Gamma \simeq \Lambda e^2/2$ et $Z \simeq \Lambda i^2/2$ pour e et i petits. Les variables de Poincaré se déduisent des variables de Delaunay par la transformation

$$\begin{array}{lll} \Lambda = L & \Gamma = L - G & Z = G - H \\ \lambda = l + g + h & \gamma = -g - h & z = -h \end{array} \tag{5.34}$$

et l'on vérifie au passage que

$$\Lambda\lambda + \Gamma\gamma + Zz = Ll + Gg + Hh, \tag{5.35}$$

ce qui montre que la transformation est canonique (c'est une transformation linéaire de matrice A sur les angles, et $(A^t)^{-1}$ sur les moments, cf. annexe A). Lorsque l'on exprime le hamiltonien du problème de Kepler dans les variables de Poincaré, on trouve

$$H_K = -\frac{\mu^2}{2\Lambda^2}. \tag{5.36}$$

On utilise enfin très souvent les variables cartésiennes associées, $(\xi, \eta) = \sqrt{2\Gamma}\,(\cos\gamma, \sin\gamma)$ et $(p, q) = \sqrt{2Z}\,(\cos z, \sin z)$, elles aussi canoniques (η et q étant les coordonnées, ξ et p les moments conjugués) et régulières en $e = 0$ et $i = 0$. Cette formulation, en sus de son élégance, a une importance historique majeure : c'est grâce à elle que Poincaré a pu formuler le problème des trois corps de manière à en étudier la stabilité, et c'est elle qu'utilisent les théories analytiques modernes des perturbations planétaires (Laskar, chapitre 8).

5.7 Application : les perturbations d'orbite pour les satellites artificiels

On va s'intéresser d'un peu plus près aux satellites orbitant autour de la Terre. La généralisation du problème à deux corps aux orbites proches des planètes suppose que la Terre a une symétrie sphérique et que la seule force newtonienne s'exerce sur le satellite. Mais la réalité est moins parfaite : la Terre n'est ni sphérique ni homogène, et tous les autres corps du Système solaire exercent une force sur le couple Terre-satellite. Par ailleurs, un satellite évolue dans un environnement qui n'est pas réellement vide (atmosphère résiduelle, plasma, vent solaire, rayonnement électromagnétique).

En conclusion, un satellite sur une orbite terrestre est soumis, en plus de la force centrale en μ/r^2, à des forces perturbatrices qui vont l'éloigner de l'orbite képlérienne théorique. Ces forces sont de deux types. Les forces *conservatives*, qui dérivent d'un potentiel, sont essentiellement les forces gravitationnelles : harmoniques du potentiel terrestre, marées terrestres et océaniques, attraction luni-solaire et des autres planètes, auxquelles on ajoute les corrections relativistes. Les forces *non conservatives* sont la traînée atmosphérique, la pression de radiation solaire (directe et réfléchie par la Terre), les forces électromagnétiques, et les forces dues au contrôle du satellite lui-même (poussées, dégazage, fuites).

5.8 Perturbations gravitationnelles

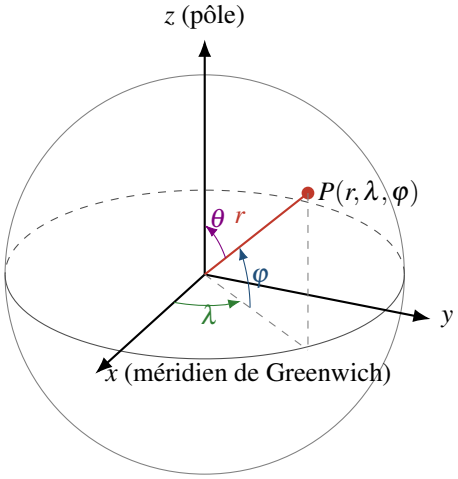
5.8.1 Harmoniques du potentiel terrestre

On se place dans un repère géocentrique tournant avec la Terre. Un point P est repéré par ses coordonnées sphériques (r, λ, φ), où λ est la longitude géographique et φ la latitude (figure 5.2). En

dehors des masses, le potentiel terrestre est une fonction harmonique et peut être écrit sous la forme d'une série d'*harmoniques sphériques* :

$$U(r,\lambda,\varphi) = \frac{\mu}{r}\left[1 - \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{R_\oplus}{r}\right)^k J_k P_k(\sin\varphi) + \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{R_\oplus}{r}\right)^k P_k^j(\sin\varphi)\left(C_{kj}\cos j\lambda + S_{kj}\sin j\lambda\right)\right] \tag{5.37}$$

où $R_\oplus$ est le rayon équatorial de la Terre. Le potentiel est ici pris au sens des astronomes et des géodésiens ($\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\nabla} U$, soit $U = +\mu/r$ pour le terme central), avec le signe opposé à celui du chapitre 3. Les termes de degré $k = 1$ sont nuls si l'origine est au centre de masse.



φ : latitude, $\theta = \pi/2 - \varphi$: colatitude, λ : longitude
(repère lié à la Terre, tournant)

FIGURE 5.2 – Coordonnées sphériques utilisées pour le potentiel terrestre.

Les fonctions $P_k(X)$ sont les polynômes de Legendre et les $P_k^j(X)$ les fonctions de Legendre associées :

$$P_k(X) = \frac{1}{2^k k!}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}X^k}\left[(X^2-1)^k\right], \qquad P_k^j(X) = (1-X^2)^{j/2}\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}X^j}P_k(X). \tag{5.38}$$

Les premiers polynômes sont $P_2(X) = \frac{1}{2}(3X^2-1)$, $P_3(X) = \frac{1}{2}(5X^3-3X)$ et $P_4(X) = \frac{1}{8}(35X^4-30X^2+3)$. On distingue (figure 5.4) :

- les *harmoniques zonaux* J_k, associés aux fonctions $P_k(\sin\varphi)$ qui ne dépendent que de la latitude (symétrie de révolution autour de l'axe des pôles) ; le premier terme, $J_2 = 1{,}0826\cdot10^{-3}$, qui traduit l'aplatissement de la Terre (figure 5.3), est plus de quatre cents fois supérieur à tous les autres ($J_3 = -2{,}53\cdot10^{-6}$, $J_4 = -1{,}62\cdot10^{-6}$) ;
- les *harmoniques tesséraux* ($j < k$) et *sectoriels* ($j = k$), de coefficients C_{kj} et S_{kj}, qui dépendent de la longitude et traduisent les écarts à la symétrie de révolution. Les termes C_{21} et S_{21} sont quasi nuls parce que l'axe de rotation coïncide, à quelques mètres près, avec l'axe principal d'inertie ; les termes $C_{22} = 1{,}57\cdot10^{-6}$ et $S_{22} = -0{,}90\cdot10^{-6}$ traduisent l'ellipticité de l'équateur (écart de 70 m entre les deux demi-axes), responsable de la dérive en longitude des satellites géostationnaires.

On trouve parfois les termes $C_{kj}\cos j\lambda + S_{kj}\sin j\lambda$ écrits sous la forme $J_{kj}\cos j(\lambda - \lambda_{kj})$. Les modèles de champ modernes (EGM2008, EIGEN-6C4, issus des missions GRACE et GOCE) vont jusqu'au degré 2000 et plus ; pour la mécanique orbitale, quelques dizaines de degrés suffisent, et pour une étude préliminaire, J_2 seul.

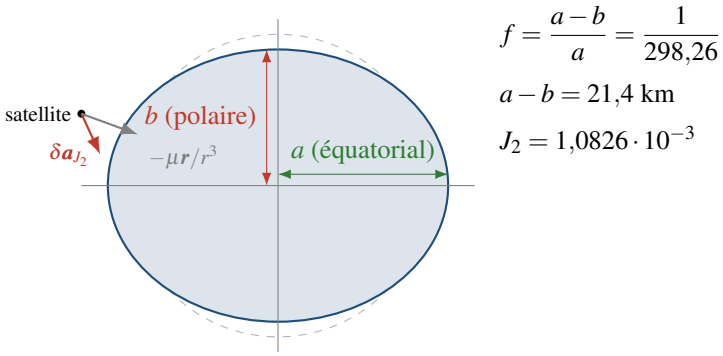


FIGURE 5.3 – Aplatissement de la Terre lié au paramètre J_2.

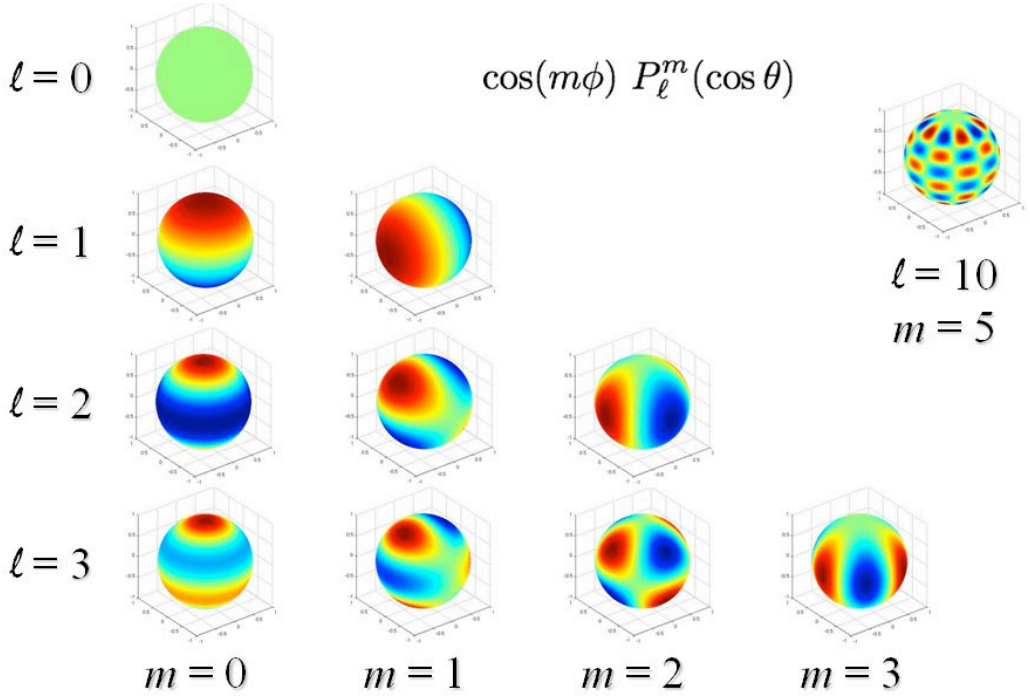


FIGURE 5.4 – Représentation des harmoniques sphériques $\cos(m\phi)\,P_\ell^m(\cos\theta)$ jusqu'au degré 3, et de l'harmonique $\ell = 10$, $m = 5$ (sur la figure, ϕ désigne la longitude λ, θ la colatitude, $\ell = k$ et $m = j$) : la couleur donne le signe et l'amplitude de la fonction sur la sphère. Les harmoniques zonaux ($m = 0$) ne dépendent que de la latitude ; les lignes nodales des sectoriels ($m = \ell$) sont des méridiens, si bien que leur signe ne dépend que de la longitude ; les tesséraux découpent la sphère en damier. Le potentiel terrestre est une combinaison de ces « modes ».

5.8.2 Marées terrestres

Afin de définir le potentiel terrestre, on a considéré que la répartition des masses sur la Terre était constante en fonction du temps, ce qui est faux. Ce potentiel est une fonction du temps, dépendant des marées terrestres (solides) et des marées océaniques, elles-mêmes forcées par la Lune et le Soleil. L'ordre de grandeur de ces corrections est de 10^{-8} à 10^{-7} fois le terme central, ce qui est comparable aux harmoniques statiques de degré élevé. L'étude des variations du potentiel terrestre en fonction du temps a des implications très importantes dans l'étude du « système » Terre. On peut ainsi suivre, par la mission GRACE puis par la mission GRACE-FO qui lui a succédé, la fonte des calottes glaciaires, les variations des nappes phréatiques, la réponse de la Terre aux variations de charge (rebond post-glaciaire)

ou les redistributions de masse associées aux grands séismes.

5.8.3 Attraction luni-solaire

Pour un corps en orbite terrestre, les forces du Soleil et de la Lune sont les actions prépondérantes par rapport aux autres corps (l'effet de Vénus est environ dix mille fois plus faible que celui du Soleil, celui de Jupiter près de cent mille fois). Soient T la Terre, P le satellite et B un troisième corps (Lune ou Soleil) de paramètre gravitationnel μ_B. On note $\boldsymbol{r}$ le vecteur Terre-satellite, $\boldsymbol{r}_B$ le vecteur Terre-corps perturbateur et $\boldsymbol{\rho}_B = \boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}$ le vecteur satellite-corps perturbateur. Dans le repère centré sur la Terre, qui n'est pas galiléen puisque la Terre elle-même est attirée par B, l'accélération perturbatrice du satellite est la différence entre l'attraction de B sur le satellite et l'attraction de B sur la Terre :

$$\boldsymbol{a}_B = \mu_B \left(\frac{\boldsymbol{\rho}_B}{\rho_B^3} - \frac{\boldsymbol{r}_B}{r_B^3} \right) = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}} U_B \qquad \text{avec} \qquad U_B = \mu_B \left(\frac{1}{\rho_B} - \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}_B}{r_B^3} \right). \tag{5.39}$$

Le second terme, dit *indirect*, provient de l'entraînement du repère. Si l'on note ψ l'angle entre $\boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{r}_B$, on a $\rho_B^2 = r_B^2 \left(1 - 2\frac{r}{r_B}\cos\psi + \frac{r^2}{r_B^2}\right)$, et le développement de $1/\rho_B$ en polynômes de Legendre (fonction génératrice) donne

$$U_B = \frac{\mu_B}{r_B} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{r}{r_B}\right)^k P_k(\cos\psi) \simeq \frac{\mu_B r^2}{2 r_B^3} \left(3\cos^2\psi - 1\right) + \ldots \tag{5.40}$$

Le terme $k = 0$ est une constante sans effet et le terme $k = 1$ s'annule exactement avec le terme indirect. Comme $r \ll r_B$, les amplitudes des termes décroissent très vite et le terme quadrupolaire $k = 2$ domine : il suffit en orbite basse, mais en orbite géostationnaire le terme $k = 3$ de la Lune en atteint encore 16 %, et les propagateurs précis utilisent l'expression exacte (5.39). C'est le terme $k = 2$, appliqué à la Terre étendue, qui produit les marées. Les paramètres r_B et ψ se calculent en fonction de la date grâce aux éphémérides de la Lune et du Soleil.

5.9 Forces non gravitationnelles

5.9.1 Traînée atmosphérique

Sur les planètes à atmosphère (dont la Terre) il existe une atmosphère résiduelle, fonction de l'altitude. Bien que ténue, son impact cumulatif est loin d'être négligeable. La force de traînée s'écrit

$$\boldsymbol{F}_a = -\frac{1}{2}\rho\, C_D\, S\, V_{\text{rel}}\, \boldsymbol{V}_{\text{rel}}, \tag{5.41}$$

où ρ est la masse volumique de l'atmosphère, C_D le coefficient de traînée (2 à 2,5 en régime moléculaire libre), S la section efficace du satellite et $\boldsymbol{V}_{\text{rel}}$ la vitesse du satellite par rapport à l'atmosphère, qui tourne avec la Terre. Le rapport $B = C_D S/m$ est appelé *coefficient balistique* (parfois son inverse) ; il vaut typiquement 0,005 à 0,02 m^2/kg. La force de portance associée est en général négligeable. Il convient toutefois de la prendre en compte pour l'analyse des couples aérodynamiques, essentiellement en orbite basse. La masse volumique varie énormément avec l'altitude (figure 5.5) mais aussi avec l'état de l'atmosphère : succession jour-nuit, saison, et surtout activité solaire (indice de flux $F_{10,7}$ et indices géomagnétiques K_p, A_p), qui peut, à 500 km d'altitude, faire varier ρ d'un facteur 10 entre minimum et maximum du cycle de onze ans. Les modèles usuels sont NRLMSISE-00, JB2008 et DTM.

Son impact principal est une décroissance séculaire du demi-grand axe et de l'excentricité (l'orbite se circularise). Pour une orbite circulaire, l'équation de Gauss (5.14), avec une composante transverse de l'accélération égale à $-\frac{1}{2}\rho B V^2$, donne la chute de demi-grand axe par orbite,

$$\Delta a_{\text{orbite}} \simeq -2\pi\rho\, B\, a^2, \tag{5.42}$$

dont l'ordre de grandeur va du décimètre par orbite vers 700–800 km (activité solaire moyenne) jusqu'à la dizaine de mètres par orbite pour la Station spatiale internationale (vers 400 km, soit une centaine de mètres par jour, compensée par des remontées d'orbite régulières). En dessous de 300 km, la durée de vie n'est plus que de quelques semaines : c'est ce qui limite la vie des constellations très basses et ce qui, à l'inverse, garantit la désorbitation naturelle des débris.

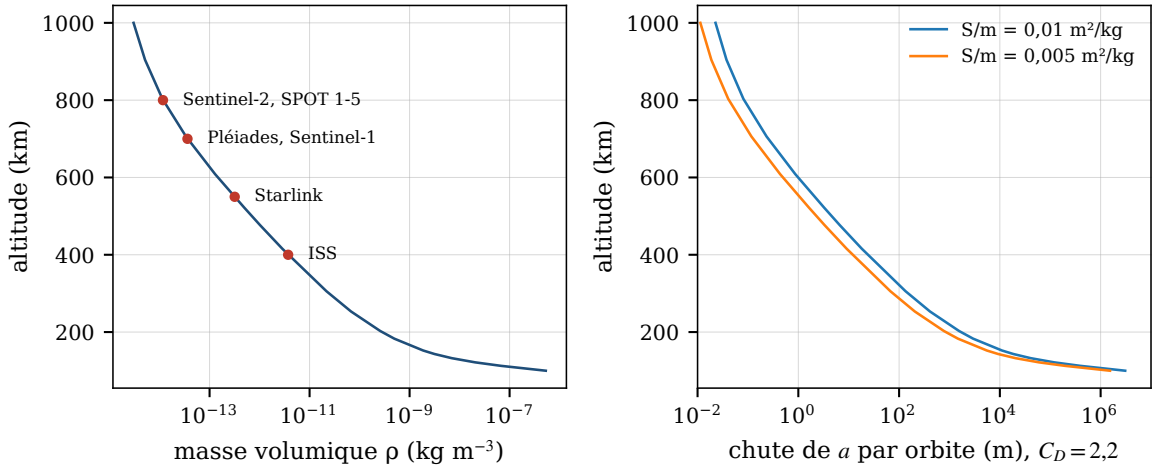


FIGURE 5.5 – Masse volumique de la haute atmosphère (modèle exponentiel par tranches de Vallado [20], conditions solaires moyennes) et chute du demi-grand axe par orbite qui en résulte.

5.9.2 Pression de radiation solaire

La pression de radiation solaire comporte une composante directe (flux du Soleil). Elle peut également comporter une composante réfléchie pour les objets en orbite autour de la Terre ou d'une autre planète (albédo, auquel s'ajoute le flux infrarouge thermique de la planète). Un flux d'énergie Φ (en W/m^2) transporte une quantité de mouvement Φ/c par unité de surface et de temps ; la *pression de radiation* à la distance ρ_s du Soleil est donc

$$P = \frac{\Phi}{c} = \frac{L_\odot}{4\pi\rho_s^2 c} \simeq 4{,}54 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{N/m^2} \text{ à 1 UA}, \tag{5.43}$$

où $L_\odot = 3{,}83 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}$ est la luminosité du Soleil et $\Phi = 1\,361\,\mathrm{W/m^2}$ la constante solaire. La force directe s'écrit

$$\boldsymbol{F} = -P C_R S_0 \boldsymbol{u}_{\mathrm{sat}\to\mathrm{Sol}}, \tag{5.44}$$

où C_R est le coefficient de réflectivité, entre 1 (absorption totale) et 2 (réflexion spéculaire), S_0 la section du satellite exposée au Soleil et $\boldsymbol{u}_{\mathrm{sat}\to\mathrm{Sol}}$ le vecteur unitaire dirigé du satellite vers le Soleil. Elle s'annule bien sûr lorsque le satellite est dans l'ombre de la Terre, ce qui introduit des discontinuités délicates à intégrer. Sa valeur varie très peu le long de l'orbite, les rayons incidents du Soleil étant parallèles. La composante réfléchie par la Terre s'obtient en intégrant sur la surface éclairée de la planète :

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{alb}} = P C_R S_0 \iint_{\mathrm{Terre}} \frac{\alpha \cos\theta_i \cos\theta_e}{\pi d^2} \frac{\boldsymbol{d}}{d}\, \mathrm{d}^2 S \tag{5.45}$$

où α est l'albédo local (0,3 en moyenne), θ_i et θ_e les angles d'incidence du Soleil et d'émission vers le satellite sur l'élément de surface, et $\boldsymbol{d}$ le vecteur de l'élément vers le satellite. Cet effet vaut 10 à 30 % de la pression directe en orbite basse. La pression de radiation est la perturbation dominante pour les voiles solaires, les objets à grand rapport surface/masse (ballons, débris de films multicouches) et elle produit des variations à longue période (de l'ordre de l'année) de l'excentricité des orbites GEO et GPS.

5.10 Ordres de grandeur

Le tableau 5.1 donne quelques ordres de grandeur utiles pour évaluer les perturbations orbitales en orbite terrestre, pour un satellite de rapport $S/m = 0{,}01$ m^2/kg.

Accélération (m/s^2)	Orbite basse (400 km)	Orbite géostationnaire
Attraction centrale μ/r^2	8,7	0,22
Aplatissement J_2	$1{,}2 \cdot 10^{-2}$	$8 \cdot 10^{-6}$
Ellipticité de l'équateur (C_{22}, S_{22})	$\sim 10^{-4}$	$\sim 5 \cdot 10^{-8}$
Autres harmoniques (degré ≥ 3)	$\sim 3 \cdot 10^{-5}$	$\sim 10^{-8}$
Attraction de la Lune	$1{,}2 \cdot 10^{-6}$	$7 \cdot 10^{-6}$
Attraction du Soleil	$5 \cdot 10^{-7}$	$3 \cdot 10^{-6}$
Traînée atmosphérique	$2 \cdot 10^{-6}$ (activité moyenne)	0
Pression de radiation solaire	$6 \cdot 10^{-8}$	$6 \cdot 10^{-8}$
Correction relativiste (Schwarzschild)	$2 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-10}$
Marées solides	$\sim 3 \cdot 10^{-7}$	$\sim 3 \cdot 10^{-10}$

TABLE 5.1 – Ordres de grandeur des accélérations perturbatrices en orbite terrestre ($S/m = 0{,}01$ m^2/kg, $C_D = 2{,}2$, $C_R = 1{,}3$). Les perturbations d'origine gravitationnelle de degré k décroissent comme $r^{-(k+2)}$, celles du troisième corps croissent comme r.

5.11 Quels effets prendre en compte ? L'effet du J_2

Pour une étude préliminaire d'orbite terrestre, il convient de prendre en compte, en sus de l'accélération centrale (problème képlérien), le terme J_2 de la perturbation liée au potentiel terrestre. Attention, dans le cas d'un corps central autre que la Terre, la perturbation liée au J_2 n'est pas toujours prépondérante : autour de la Lune, dont le champ est très irrégulier ($J_2 = 2 \cdot 10^{-4}$ seulement, et des concentrations de masse, ou *mascons*, importantes), ou pour les orbites hautes où l'attraction du troisième corps domine. En général, pour la Terre, on considérera donc d'abord les effets des harmoniques du potentiel terrestre. Si leur analyse est possible en utilisant la formulation de Gauss, la formulation de Lagrange, qui gère directement les potentiels, est la plus adaptée.

Le terme J_2 de la fonction perturbatrice est donné par

$$\mathscr{R} = -\frac{\mu}{r} J_2 \left(\frac{R_\oplus}{r}\right)^2 P_2(\sin\varphi), \qquad P_2(\sin\varphi) = \frac{1}{2}\left(3\sin^2\varphi - 1\right). \tag{5.46}$$

On notera que $\sin\varphi = \sin i \sin(\omega + \nu)$ (règle de Napier appliquée au triangle sphérique formé par le nœud, le satellite et sa projection sur l'équateur), avec i l'inclinaison de l'orbite, ω l'argument du périgée et ν l'anomalie vraie. D'où

$$\mathscr{R} = \frac{\mu}{r} J_2 \left(\frac{R_\oplus}{r}\right)^2 \frac{1}{2}\left(1 - 3\sin^2 i \sin^2(\omega + \nu)\right). \tag{5.47}$$

On peut alors en déduire l'impact du J_2 sur les paramètres orbitaux en reportant (5.47) dans les équations de Lagrange et en moyennant sur une orbite (ce qui élimine les termes périodiques, dont l'amplitude reste de l'ordre de $J_2 R_\oplus^2/a$, soit quelques kilomètres). Après une orbite, avec $p = a(1-e^2)$:

$$\begin{cases} \Delta_{2\pi} a = \Delta_{2\pi} e = \Delta_{2\pi} i = 0 \\ \Delta_{2\pi}\Omega = -3\pi J_2 \left(\dfrac{R_\oplus}{p}\right)^2 \cos i \\ \Delta_{2\pi}\omega = \dfrac{3\pi}{2} J_2 \left(\dfrac{R_\oplus}{p}\right)^2 \left(5\cos^2 i - 1\right) \\ \Delta_{2\pi} M = 2\pi + \dfrac{3\pi}{2} J_2 \left(\dfrac{R_\oplus}{p}\right)^2 \sqrt{1-e^2}\left(3\cos^2 i - 1\right) \end{cases} \tag{5.48}$$

soit, en dérives séculaires (figure 5.6),

$$\dot{\Omega} = -\frac{3}{2} n J_2 \left(\frac{R_\oplus}{p}\right)^2 \cos i, \qquad \dot{\omega} = \frac{3}{4} n J_2 \left(\frac{R_\oplus}{p}\right)^2 \left(5\cos^2 i - 1\right), \tag{5.49}$$

$$\dot{M} = n\left[1 + \frac{3}{4} J_2 \left(\frac{R_\oplus}{p}\right)^2 \sqrt{1-e^2}\left(3\cos^2 i - 1\right)\right]. \tag{5.50}$$

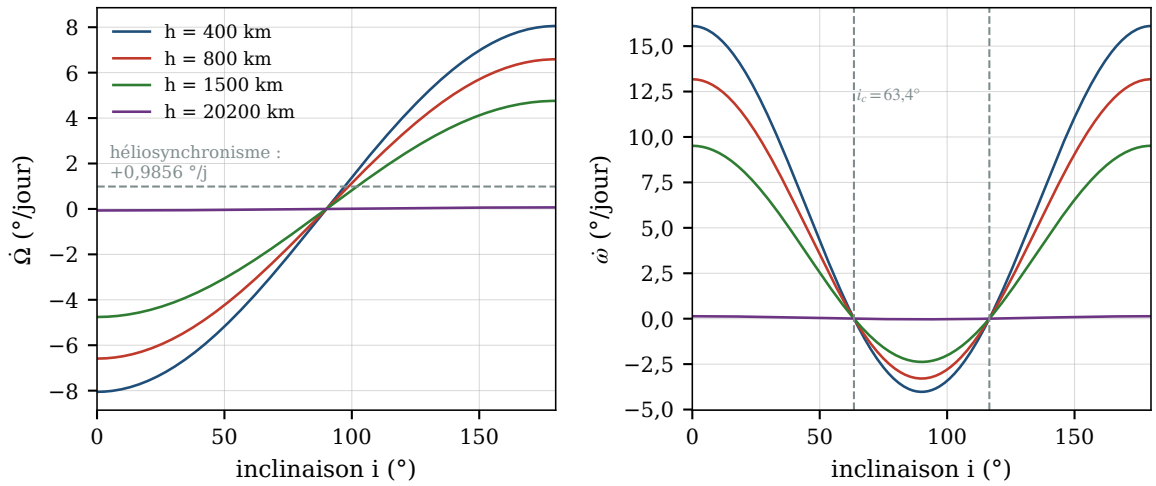


FIGURE 5.6 – Dérives séculaires du nœud et du périgée dues au J_2, pour des orbites circulaires de différentes altitudes.

On constate donc :

1. que le plan de l'orbite tourne autour de l'axe des pôles, vers l'ouest pour les orbites directes ($i < 90°$) et vers l'est pour les orbites rétrogrades : une orbite basse inclinée à 51,6° (ISS) voit son nœud reculer de 5° par jour. C'est cet effet que l'on met à profit pour les orbites héliosynchrones (ci-dessous) ;
2. que l'orbite tourne dans son plan (rotation de la ligne des apsides). Cet effet est nul pour deux inclinaisons dites *critiques*, i_c telles que $5\cos^2 i_c = 1$, soit $i_c = 63{,}4°$ et 116,6°. C'est l'inclinaison des orbites Molniya (tableau 4.1) : très excentriques, avec l'apogée au-dessus de l'hémisphère nord, elles y « stationnent » huit heures sur douze, et le périgée ne tourne pas ;
3. que la période orbitale est modifiée sensiblement : on distingue la période anomalistique (retour au périgée, $2\pi/\dot{M}$), la période draconitique (retour au nœud, $2\pi/(\dot{M}+\dot{\omega})$) et la période képlérienne.

Complément : orbites héliosynchrones

Une orbite est dite *héliosynchrone* lorsque son plan tourne autour de l'axe des pôles à la même vitesse que la direction du Soleil, soit 360° par année tropique : $\dot{\Omega}_{\text{hs}} = +0{,}9856°/\text{jour} = 1{,}991 \cdot 10^{-7}\,\text{rad/s}$ (figure 5.7). L'angle entre le plan de l'orbite et la direction du Soleil est alors constant, si bien que le satellite survole chaque point à la même heure solaire locale : conditions d'éclairement répétitives pour l'observation de la Terre, et thermique simplifiée (les orbites « crépusculaires » 6 h–18 h ne connaissent d'éclipses, courtes, que pendant deux à trois mois autour d'un solstice). D'après (5.49), la condition $\dot{\Omega} = \dot{\Omega}_{\text{hs}}$ s'écrit

$$\cos i = -\frac{2\dot{\Omega}_{\text{hs}}\, p^2}{3 n J_2 R_\oplus^2} = -\frac{2\dot{\Omega}_{\text{hs}}}{3 J_2 R_\oplus^2 \sqrt{\mu}}\, a^{7/2}(1-e^2)^2. \tag{5.51}$$

La dérive devant être positive, l'inclinaison est nécessairement rétrograde, $i > 90°$. Pour une orbite

circulaire à 700 km ($a = 7078$ km, $n = 1{,}060 \cdot 10^{-3}$ rad/s), on trouve $\cos i = -0{,}142$ soit $i = 98{,}2°$; à 800 km, $i = 98{,}6°$; l'altitude maximale possible est d'environ 5 970 km ($i = 180°$). Les satellites SPOT, Pléiades, Sentinel-1, -2, -3, Landsat, MetOp et la plupart des satellites météorologiques défilants utilisent de telles orbites, souvent combinées à une contrainte de *phasage* : le nombre de révolutions par jour est choisi rationnel ($14 + 3/10$ pour Sentinel-2, qui repasse sur la même trace au bout de 10 jours et 143 révolutions ; $14 + 5/26$ pour SPOT, cycle de 26 jours).

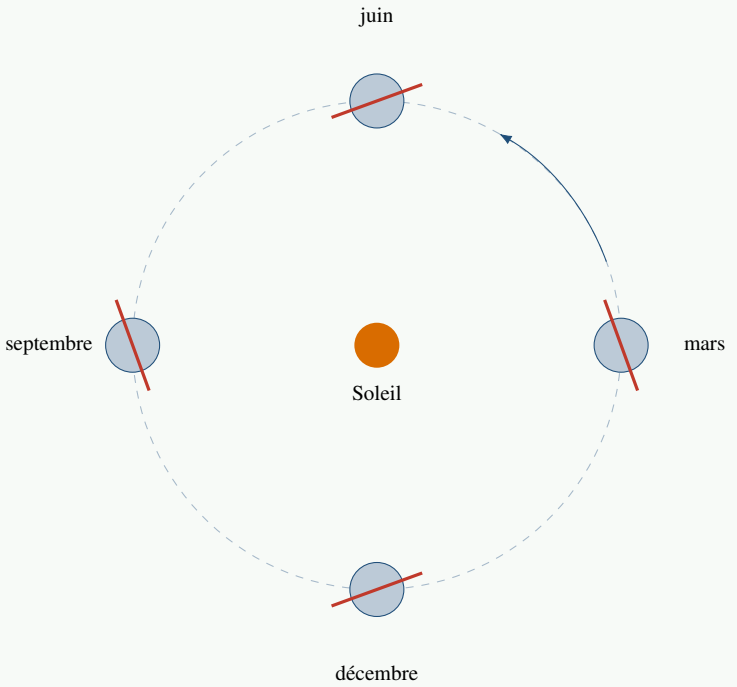


FIGURE 5.7 – Principe de l'orbite héliosynchrone : le plan de l'orbite (trait rouge, vu par la tranche depuis le pôle nord de l'écliptique) tourne de 0,9856° par jour et garde un angle fixe avec la direction du Soleil.

5.12 Application : les manœuvres

5.12.1 Généralités

Une autre application des perturbations d'orbite concerne celles qui ne sont plus subies, mais cette fois-ci voulues. Il s'agit des **manœuvres**. Les manœuvres servent à réaliser les transferts orbitaux, à corriger après l'injection par le lanceur l'orbite d'un satellite artificiel pour atteindre l'orbite finale opérationnelle, à contrôler l'orbite (et éventuellement l'attitude) durant toute la durée de vie, à corriger les perturbations de toutes sortes sur le satellite (en particulier pour asservir la position du satellite sur l'orbite képlérienne « idéale »), et en fin de vie à désorbiter le satellite ou à le placer sur une orbite cimetière. L'objectif est cette fois-ci de changer la vitesse du satellite, afin de changer sa trajectoire.

Les modifications du vecteur vitesse sont effectuées à l'aide de systèmes propulsifs qui fournissent une poussée au satellite. Pour la propulsion chimique (poudre, ou liquide monoergol ou biergol), la poussée est due à l'éjection des gaz de combustion par les tuyères. Dans le cas de la propulsion électrique, les propulseurs ionisent un gaz rare (le xénon, ou de plus en plus le krypton) et l'éjectent en l'accélérant à l'aide de champs électriques ; la vitesse d'éjection est cinq à dix fois plus élevée (15 à 40 km/s contre 2 à 4,5 km/s), mais la poussée très faible (de quelques dizaines à quelques centaines de millinewtons). Dans les deux cas, la manœuvre consomme une certaine masse d'ergols, donnée par l'équation de Tsiolkovski,

$$\Delta V = v_e \ln \frac{m_0}{m_f} = g_0 I_{sp} \ln \frac{m_0}{m_f}, \tag{5.52}$$

où v_e est la vitesse d'éjection, I_{sp} l'impulsion spécifique (en secondes) et m_0, m_f les masses avant et après la manœuvre : toute manœuvre diminue la masse du satellite. On doit donc prévoir tous les ergols nécessaires pour la durée de vie du satellite. Or un lanceur est caractérisé par la masse maximale qu'il peut emporter, et les satellites et sondes spatiales ont une masse limitée : il y a nécessité de minimiser la masse d'ergols à bord et donc d'optimiser les manœuvres. Le *bilan de* ΔV d'une mission en est la grandeur caractéristique.

Suivant les types de propulsion, la durée d'actionnement des propulseurs peut varier. Sauf en ce qui concerne les moteurs électriques, la durée de poussée est faible devant la période orbitale : on fait en général l'approximation que la poussée est *impulsionnelle*, c'est-à-dire que si l'on suppose que la vitesse du satellite est $\boldsymbol{V}$ à t, alors à $t + \mathrm{d}t$ la vitesse sera $\boldsymbol{V} + \Delta\boldsymbol{V}$, la position n'ayant pas changé. La propulsion électrique conduit au contraire à des transferts à poussée continue, en spirale, qui durent plusieurs mois (mise à poste des satellites géostationnaires « tout électrique », missions SMART-1, Dawn, BepiColombo, Psyche) et dont l'optimisation relève de la théorie du contrôle optimal.

5.12.2 Manœuvres usuelles

Principe des manœuvres. Considérons un satellite à la date t. Sa trajectoire est définie par un couple position-vitesse $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$. On réalise un incrément de vitesse $\Delta\boldsymbol{V}$ qui le fait passer sur une autre orbite définie par le couple $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v} + \Delta\boldsymbol{V})$. La nouvelle orbite ainsi définie passe donc nécessairement par le point de l'orbite initiale où a été réalisée la manœuvre : une manœuvre impulsionnelle unique ne peut relier que des orbites sécantes.

Modification de la forme de l'orbite. Il faut que l'incrément de vitesse soit inclus dans le plan de l'orbite (figure 5.8). Soit une orbite initiale O_1 de demi-grand axe a_1 et un point M sur cette orbite, de rayon r. Si $\boldsymbol{V}_1$ est la vitesse de M sur O_1, l'équation des forces vives donne $\frac{V_1^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a_1}$. On réalise une poussée impulsionnelle $\boldsymbol{V}_2 = \boldsymbol{V}_1 + \Delta\boldsymbol{V}$; sur la nouvelle orbite, $\frac{V_2^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a_2}$ (même r). Il vient très simplement

$$V_2^2 = V_1^2 + \Delta V^2 + 2\Delta V\, V_1 \cos\alpha \qquad \text{soit} \qquad \mu\left[\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right] = \Delta V^2 + 2\Delta V\, V_1 \cos\alpha, \tag{5.53}$$

où α est l'angle entre $\Delta \boldsymbol{V}$ et $\boldsymbol{V}_1$. Supposons que l'on cherche à réaliser un incrément Δa donné : $1/a_1 - 1/a_2$ est fixé, et le ΔV nécessaire est minimal pour $\alpha = 0$. Donc, *pour modifier le demi-grand axe, on pousse tangentiellement*, et le plus efficacement là où V_1 est la plus grande, c'est-à-dire au périgée (effet Oberth).

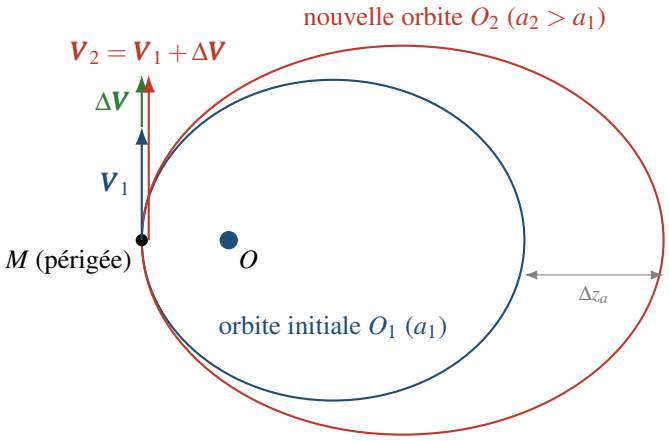


FIGURE 5.8 – Manœuvre impulsionnelle dans le plan de l'orbite.

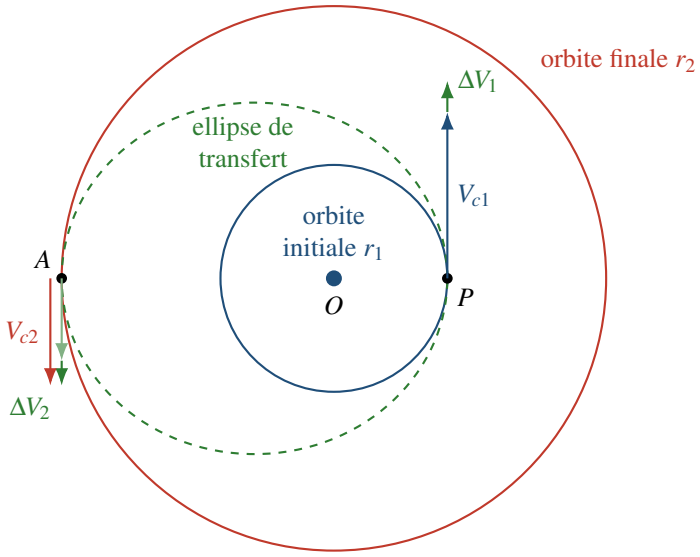
Pour une petite impulsion tangentielle au périgée, la différentiation de l'équation des forces vives donne $\mathrm{d}a = \frac{2a^2}{\mu} V \, \mathrm{d}V$; le périgée est inchangé, et comme $r_a = 2a - r_p$, l'altitude de l'apogée est relevée de

$$\Delta z_a = \frac{4a_1^2}{\mu} V_p \, \Delta V. \tag{5.54}$$

On a ainsi relevé l'apogée de l'orbite, et augmenté à la fois le demi-grand axe a et l'excentricité e. Si l'on veut abaisser l'altitude de l'apogée, il faut pousser au périgée à l'opposé de la vitesse. Pour modifier l'altitude du périgée, on se place de la même façon à l'apogée et on pousse selon la vitesse : $\Delta z_p = \frac{4a_1^2}{\mu} V_a \, \Delta V$. Cette manœuvre est moins efficace ($V_a < V_p$) mais elle est nécessaire, en particulier si l'on veut circulariser une orbite.

5.12.3 Transfert de Hohmann

Il s'agit d'une stratégie de transfert entre deux orbites circulaires coplanaires, de rayons r_1 et $r_2 > r_1$, proposée par Walter Hohmann en 1925. Comme il n'y a pas d'intersection entre les orbites, deux manœuvres sont nécessaires : on passe par une *orbite de transfert*, l'ellipse tangente aux deux cercles, de périgée r_1 et d'apogée r_2, donc de demi-grand axe $a_t = (r_1 + r_2)/2$ (figure 5.9).



Vitesses à l'échelle, pour $r_2 = 2{,}4\,r_1$.

FIGURE 5.9 – Transfert de Hohmann entre deux orbites circulaires coplanaires : deux impulsions tangentielles, ΔV_1 au périgée de l'ellipse de transfert et ΔV_2 à son apogée, une demi-période de transfert plus tard.

La vitesse sur l'orbite initiale est $V_{c1} = \sqrt{\mu/r_1}$. La première impulsion ΔV_1, tangentielle, porte la vitesse à la vitesse au périgée de l'ellipse de transfert :

$$\Delta V_1 = \sqrt{\frac{2\mu}{r_1} - \frac{2\mu}{r_1 + r_2}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} = V_{c1}\left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1\right). \tag{5.55}$$

Puis on attend d'arriver à l'apogée, une demi-période de transfert plus tard, soit $t_H = \pi\sqrt{a_t^3/\mu}$, et on applique ΔV_2 pour circulariser :

$$\Delta V_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}} - \sqrt{\frac{2\mu}{r_2} - \frac{2\mu}{r_1 + r_2}} = V_{c2}\left(1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}}\right). \tag{5.56}$$

La nouvelle orbite est circulaire au rayon souhaité. C'est la stratégie optimale en ΔV total parmi les transferts à deux impulsions ; pour des rapports r_2/r_1 supérieurs à 11,94, un transfert bi-elliptique à trois impulsions (passant par un apogée intermédiaire très élevé) devient légèrement plus économique, au prix d'une durée bien plus longue. Le coût relatif $\Delta V/V_{c1}$ passe par un maximum de 0,536 pour $r_2/r_1 = 15{,}58$ (figure 5.10) : au-delà, il est paradoxalement moins coûteux d'aller plus loin.

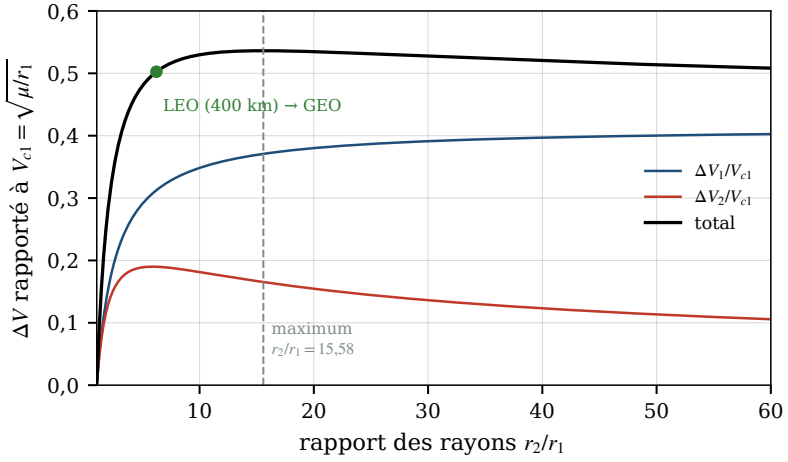


FIGURE 5.10 – Coût du transfert de Hohmann en fonction du rapport des rayons. Le point vert correspond à l'application numérique ci-dessous (de l'orbite basse à 400 km à l'orbite géostationnaire, $r_2/r_1 = 6{,}22$).

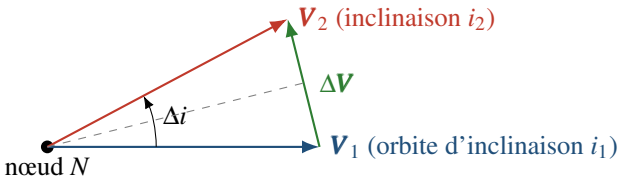
Application numérique : de l'orbite basse à l'orbite géostationnaire. Pour $r_1 = 6778$ km (400 km d'altitude) et $r_2 = 42\,164$ km : $V_{c1} = 7{,}67\,\mathrm{km/s}$, $V_{c2} = 3{,}07\,\mathrm{km/s}$, $a_t = 24\,471$ km ; la vitesse au périgée de transfert est 10,07 km/s, d'où $\Delta V_1 = 2{,}40\,\mathrm{km/s}$; la vitesse à l'apogée est 1,62 km/s, d'où $\Delta V_2 = 1{,}46\,\mathrm{km/s}$. Le total vaut 3,85 km/s et le transfert dure 5 h 17 min. En pratique, le lanceur injecte directement sur l'orbite de transfert (GTO) et le satellite réalise lui-même la circularisation, en plusieurs poussées d'apogée pour la propulsion chimique, ou en plusieurs mois de spirale pour la propulsion électrique. Il faut y ajouter le changement d'inclinaison, d'un angle au moins égal à la latitude de la base de lancement (5,2° pour Kourou, 28,5° pour Cap Canaveral), que l'on combine avec ΔV_2 à l'apogée.

5.12.4 Modification du plan de l'orbite

Pour modifier simplement l'inclinaison de l'orbite (sans modifier ni sa forme ni son orientation), il faut que la manœuvre ait lieu à l'un des nœuds de l'orbite. Soit une orbite initiale O_1 d'inclinaison i_1 ; on réalise la manœuvre au nœud N. Comme on veut juste changer l'inclinaison, on impose $V_2 = V_1$; la rotation du plan autour de la ligne des nœuds laisse inchangée la composante radiale de la vitesse et fait tourner de Δi sa composante transverse $V_S = r\dot{\nu}$, d'où (figure 5.11)

$$\boxed{\Delta V = 2V_S \sin\frac{\Delta i}{2}}, \qquad \Delta i = i_2 - i_1, \tag{5.57}$$

avec $V_S = V$ pour une orbite circulaire ou lorsque le nœud est un apside.



Triangle isocèle : $\Delta V = 2V\sin(\Delta i/2)$.
Pour $\Delta i = 28°$, $\Delta V = 0{,}48\,V$: très coûteux.

FIGURE 5.11 – Manœuvre hors plan : changement d'inclinaison au nœud d'une orbite circulaire ($V_S = V$), dans le plan horizontal local.

Le ΔV sera minimal, à Δi donné, si $V_S = h/r$ est minimale : on a donc intérêt à **effectuer la correction d'inclinaison à l'apogée**, et si possible à un apogée très élevé (c'est l'une des raisons d'être des orbites de transfert « super-synchrones »). Par ailleurs, étant proportionnelle à V_S, cette manœuvre est très coûteuse en ergols : changer de 1° l'inclinaison d'une orbite basse coûte 134 m/s, soit autant que plusieurs années de maintien à poste. De la même façon, les corrections de Ω sont coûteuses (on pousse alors au point de latitude extrême). On limitera donc les manœuvres « hors plan », et l'on choisira dès le lancement l'azimut qui donne l'inclinaison voulue.

5.12.5 Modification de l'orientation de l'orbite dans son plan

Si l'on veut modifier l'argument du périgée ω sans toucher aux autres paramètres (et donc laisser la forme de l'orbite inchangée), il faut conserver le module de la vitesse (pour ne pas modifier a) mais aussi le moment cinétique orbital (pour ne pas modifier p, donc e). On utilisera une méthode géométrique pour déterminer la manœuvre (figure 5.12) : l'orbite initiale et l'orbite tournée de θ se coupent en deux points M_1 et M_2, d'anomalies vraies $\nu = \theta/2$ et $\nu = \theta/2 + \pi$ sur l'orbite initiale ($-\theta/2$ et $-\theta/2 + \pi$ sur la nouvelle). En ces points, les normes des vitesses sont égales (même r, même a), les composantes transverses sont égales (même h) et les vitesses radiales, $V_r = \sqrt{\mu/p}\, e \sin\nu$, sont opposées. En appliquant un $\Delta\boldsymbol{V}$ radial égal à $-2\boldsymbol{V}_r$, on ne change que l'orientation de la vitesse, donc l'orientation de la ligne des

apsides. Pour faire tourner la ligne des apsides d'un angle θ, il faut donc fournir un ΔV radial de module

$$\Delta V = 2\sqrt{\frac{\mu}{p}}\, e \sin\frac{\theta}{2} \tag{5.58}$$

aux points de l'orbite initiale d'anomalie vraie $\theta/2$ ou $\theta/2+\pi$.

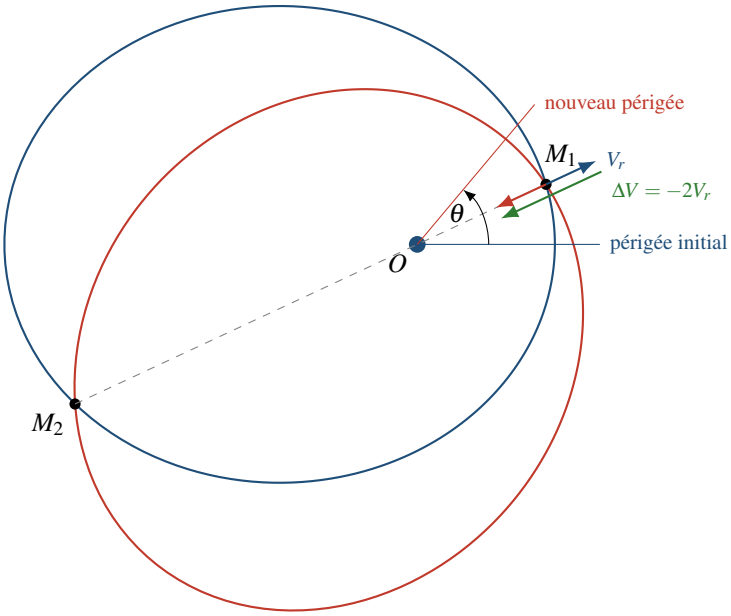


FIGURE 5.12 – Modification de l'argument du périgée par une impulsion radiale.

5.12.6 Modification de la date de passage : le phasage

On peut également vouloir modifier l'horaire de passage d'un satellite au-dessus d'une zone particulière, ou sa position sur l'orbite par rapport à un autre satellite : il faut alors modifier t_p (ou M_0) sans changer les autres éléments. Or on a vu que la période d'un satellite est reliée au demi-grand axe par la troisième loi de Kepler, $T^2/a^3 = \text{cste}$. On pourra donc, pour « retarder » le satellite, passer temporairement sur une orbite de période plus longue (impulsion tangentielle positive, qui relève l'apogée en gardant le périgée au même endroit), y effectuer N révolutions, puis revenir sur l'orbite initiale par l'impulsion opposée. Le décalage accumulé est $N\Delta T$, avec $\Delta T = 3\pi\sqrt{a/\mu}\,\Delta a$; pour « avancer » le satellite, on passe au contraire sur une orbite plus basse. On utilise ce principe pour les rendez-vous en orbite (ravitaillement de l'ISS, qui se fait toujours par le bas), pour la mise à poste des constellations de satellites et pour le repositionnement des satellites géostationnaires en longitude.

5.13 Sphère d'influence et assistance gravitationnelle

Complément : trajectoires interplanétaires par coniques juxtaposées

Une sonde interplanétaire est soumise à la fois au Soleil et aux planètes. La méthode des *coniques juxtaposées* (*patched conics*) consiste à découper la trajectoire en arcs képlériens successifs, chacun rapporté à un seul corps central : héliocentrique en croisière, planétocentrique au voisinage de chaque planète. La frontière est la *sphère d'influence* de la planète, de rayon

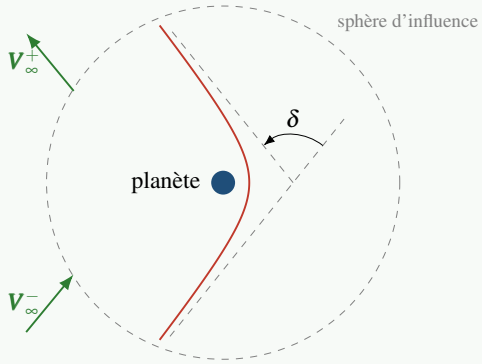
$$r_{\text{SI}} \simeq a_P \left(\frac{m_P}{M_\odot}\right)^{2/5}, \tag{5.59}$$

distance à laquelle le rapport de la perturbation solaire à l'attraction de la planète, dans le mouvement planétocentrique, est égal au rapport de la perturbation planétaire à l'attraction du Soleil, dans le

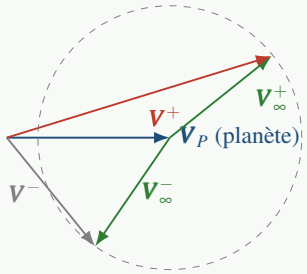
mouvement héliocentrique (Laplace). Elle vaut 0,93 million de km pour la Terre, 0,58 pour Mars et 48 millions de km pour Jupiter ; on notera qu'elle est plus petite que le rayon de Hill du chapitre suivant (1,5 million de km pour la Terre), qui répond à une autre question.
Dans le repère de la planète, la sonde arrive de l'infini avec une vitesse $\boldsymbol{V}_\infty^-$ et suit une hyperbole ; elle ressort avec une vitesse $\boldsymbol{V}_\infty^+$ de même module mais déviée d'un angle δ qui dépend de la distance de survol r_p (figure 5.13) :

$$\sin\frac{\delta}{2} = \frac{1}{e} = \frac{1}{1 + r_p V_\infty^2/\mu_P}. \tag{5.60}$$

Dans le repère du Soleil, la vitesse de la sonde est $\boldsymbol{V}^\pm = \boldsymbol{V}_P + \boldsymbol{V}_\infty^\pm$: la rotation de $\boldsymbol{V}_\infty$ change le module de la vitesse héliocentrique, de $\Delta V = 2V_\infty \sin(\delta/2)$ au maximum. C'est l'*assistance gravitationnelle* : la sonde gagne (ou perd) de l'énergie orbitale aux dépens de la planète, sans dépenser d'ergols. Un survol de Jupiter à $5R_J$ avec $V_\infty = 10\,\mathrm{km/s}$ dévie de 102° et peut modifier la vitesse héliocentrique de 15,6 km/s au plus, davantage que tout étage supérieur : c'est ainsi que Voyager 1 et 2, Cassini ou New Horizons ont atteint le Système solaire externe (Juice, lancée en 2023, doit atteindre Jupiter en 2031 grâce à des survols de la Terre et de Vénus), et que BepiColombo et Parker Solar Probe, à l'inverse, ont freiné pour approcher Mercure et le Soleil. Le passage dans la sphère d'influence dure quelques jours pour une planète tellurique, mais plusieurs mois pour Jupiter (une centaine de jours dans l'exemple ci-dessus) : à l'échelle de la croisière héliocentrique, qui dure des années, tout se passe comme une impulsion instantanée.



Dans le repère de la planète : hyperbole,
$|\boldsymbol{V}_\infty^+| = |\boldsymbol{V}_\infty^-|$, déviation δ



Dans le repère du Soleil : $\boldsymbol{V}^\pm = \boldsymbol{V}_P + \boldsymbol{V}_\infty^\pm$;
la rotation de $\boldsymbol{V}_\infty$ change le module de $\boldsymbol{V}$: ici $|\boldsymbol{V}^+| > |\boldsymbol{V}^-|$

FIGURE 5.13 – Assistance gravitationnelle : hyperbole dans le repère de la planète (à gauche) et triangle des vitesses dans le repère héliocentrique (à droite).

Le point de départ de tout calcul de mission est le V_∞ *de départ* (ou son carré, le $C_3 = V_\infty^2$, en $\mathrm{km^2/s^2}$, que les lanceurs spécifient) : pour un transfert de Hohmann Terre-Mars, la vitesse héliocentrique au départ doit être 32,7 km/s contre 29,8 km/s pour la Terre, soit $V_\infty = 2{,}9\,\mathrm{km/s}$ et $C_3 = 8{,}7\ \mathrm{km^2/s^2}$; depuis une orbite basse, l'impulsion d'injection vaut $\Delta V = \sqrt{V_\infty^2 + V_L^2} - V_c = 3{,}6\,\mathrm{km/s}$, et le voyage dure 259 jours. Les fenêtres de lancement vers Mars reviennent tous les 26 mois (période synodique).

6 Le problème à trois corps restreint

Contrairement au problème à deux corps, et malgré son apparence simple, le problème à trois corps n'admet pas de solution analytique générale. Tous les efforts pour le réduire, par tout ce que la science a compté de grandes figures (on peut citer Euler, Lagrange, Laplace, Jacobi, Le Verrier, Hamilton, qui se sont attaqués au problème), sont restés vains, et Poincaré a montré en 1890 pourquoi : le problème n'est pas intégrable, au sens où il n'existe pas d'intégrales premières analytiques en nombre suffisant (Bruns,

1887, l'avait déjà établi pour les intégrales algébriques). Sundman a bien donné en 1912 une solution sous forme de série convergente, mais sa convergence est si lente qu'elle est inutilisable en pratique. Seules quelques configurations particulières admettent des solutions exactes :

- les solutions homographiques d'Euler (1767), où les trois corps restent alignés, et de Lagrange (1772), où ils forment un triangle équilatéral, chacun décrivant une conique de foyer le centre de masse : ce sont les ancêtres des points de Lagrange étudiés dans ce chapitre ;
- plus récemment, des orbites périodiques remarquables comme le « huit » de Chenciner et Montgomery (2000, [27]), où trois masses égales se poursuivent sur une même courbe en forme de 8.

Le problème de Pythagore (trois corps initialement au repos aux sommets d'un triangle 3-4-5, avec des masses 3, 4 et 5) et le problème de Copenhague (cas du problème restreint circulaire, présenté plus bas, où les deux corps principaux ont la même masse) sont au contraire des cas d'école du chaos à trois corps, qui ne se traitent que numériquement. Toutefois, l'arrivée des calculateurs et des méthodes d'intégration numérique a bien fait bouger les lignes. On peut maintenant, sur d'assez longues périodes, intégrer numériquement les équations différentielles du mouvement.

Il reste un cas particulier où l'on peut effectuer des simplifications analytiques : c'est le cas où la masse de l'un des corps est négligeable devant celle des deux autres. On parle de **problème à trois corps restreint**.

6.1 Introduction et hypothèses

Au premier abord, le problème à trois corps *circulaire restreint*, où les trajectoires des deux corps principaux sont circulaires et où la masse du troisième corps est négligeable devant les deux autres, semble très restrictif. En pratique, la hiérarchie des masses dans le Système solaire (cf. section 1.4.1) fait que cette approximation donne de bons résultats, pertinents pour une classe très importante de problèmes : sondes spatiales dans le système Terre-Lune ou Soleil-Terre, astéroïdes troyens, comètes perturbées par Jupiter, satellites irréguliers des planètes géantes.

Premier jeu d'hypothèses. Les corps sont considérés comme des masses ponctuelles, et $m \ll m_1$, $m \ll m_2$. Dans ces conditions, M n'a pas d'effet sur P_1 et P_2. On peut donc supposer que (P_1,P_2) est un système isolé à deux corps, identique à celui utilisé dans la section 4.1. On se ramène donc au cas précédent, et l'on va traiter le problème dans un référentiel (O,X,Y,Z) lié au centre de masse de P_1 et P_2 ; ce référentiel est galiléen. Le moment cinétique du système est constant :

$$\boldsymbol{H} = m_1\boldsymbol{\rho}_1 \wedge \dot{\boldsymbol{\rho}}_1 + m_2\boldsymbol{\rho}_2 \wedge \dot{\boldsymbol{\rho}}_2 = \overrightarrow{\text{cste}} \qquad \text{avec} \qquad m_1\boldsymbol{\rho}_1 + m_2\boldsymbol{\rho}_2 = \boldsymbol{0}, \tag{6.1}$$

où $\boldsymbol{\rho}_i = \overrightarrow{OP_i}$. Les moments cinétiques de P_1 et P_2 sont donc constants et parallèles, $\boldsymbol{H}_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{H}$ et $\boldsymbol{H}_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{H}$, et P_1 et P_2 évoluent dans le même plan (O,X,Y).

Deuxième jeu d'hypothèses. Les orbites des points P_1 et P_2 sont supposées circulaires. Cette condition, qui peut sembler restrictive, s'applique de fait à de nombreuses situations en mécanique céleste, comme par exemple les couples Terre-Lune ($e = 0{,}055$), Soleil-Terre ($e = 0{,}017$) ou Soleil-Jupiter ($e = 0{,}049$) : les excentricités des orbites des planètes sont faibles. On considère donc un point M de masse m négligeable devant m_1 et m_2, et l'on note d la distance constante P_1P_2 (figure 6.1).

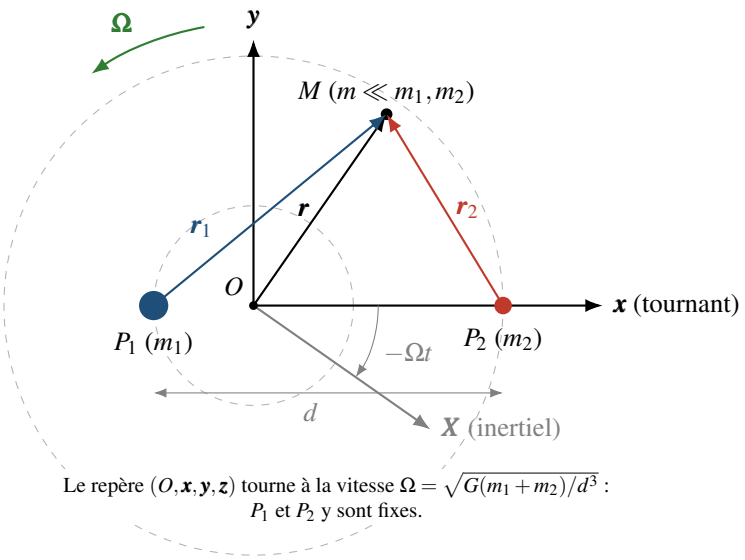


FIGURE 6.1 – Le problème à trois corps restreint dans le repère tournant (synodique) ; O est le barycentre de P_1 et P_2.

Dans le repère galiléen $R_G = (O,X,Y,Z)$, on peut écrire, en notant $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$, $\boldsymbol{r}_1 = \overrightarrow{P_1M}$ et $\boldsymbol{r}_2 = \overrightarrow{P_2M}$,

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -G\frac{m_1}{r_1^3}\boldsymbol{r}_1 - G\frac{m_2}{r_2^3}\boldsymbol{r}_2. \tag{6.2}$$

Pour s'affranchir des mouvements des corps principaux P_1 et P_2, on écrira le mouvement de M dans un repère tournant lié à P_1 et P_2, dit repère *synodique*. On définit $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\,\boldsymbol{e}_z$ la rotation instantanée de ce repère tournant, noté $R_\Omega = (O,x,y,z)$, par rapport à R_G. Compte tenu des hypothèses précédentes, $\boldsymbol{\Omega}$ est de direction inertielle fixe et de norme constante, donnée par la troisième loi de Kepler : $\Omega^2 = G(m_1+m_2)/d^3$. On notera $\delta/\delta t$ la dérivée par rapport au temps dans le repère tournant ainsi défini. La composition des dérivations donne

$$\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{R_G} = \left.\frac{\delta\boldsymbol{r}}{\delta t}\right|_{R_\Omega} + \boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{r}, \qquad \left.\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\right|_{R_G} = \left.\frac{\delta^2\boldsymbol{r}}{\delta t^2}\right|_{R_\Omega} + 2\boldsymbol{\Omega}\wedge\left.\frac{\delta\boldsymbol{r}}{\delta t}\right|_{R_\Omega} + \boldsymbol{\Omega}\wedge(\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{r}), \tag{6.3}$$

et donc, dans le repère tournant,

$$\left.\frac{\delta^2\boldsymbol{r}}{\delta t^2}\right|_{R_\Omega} = -G\frac{m_1}{r_1^3}\boldsymbol{r}_1 - G\frac{m_2}{r_2^3}\boldsymbol{r}_2 - 2\boldsymbol{\Omega}\wedge\left.\frac{\delta\boldsymbol{r}}{\delta t}\right|_{R_\Omega} - \boldsymbol{\Omega}\wedge(\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{r}). \tag{6.4}$$

Les deux derniers termes, opposés des accélérations de Coriolis et d'entraînement de la formule de composition ci-dessus, sont les accélérations d'inertie de Coriolis et d'entraînement (centrifuge). Comme $-\boldsymbol{\Omega}\wedge(\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{r}) = \Omega^2(x\,\boldsymbol{e}_x + y\,\boldsymbol{e}_y)$, on peut regrouper les forces gravitationnelles et la force centrifuge en un seul gradient :

$$\left.\frac{\delta^2\boldsymbol{r}}{\delta t^2}\right|_{R_\Omega} = -\boldsymbol{\nabla}U - 2\boldsymbol{\Omega}\wedge\left.\frac{\delta\boldsymbol{r}}{\delta t}\right|_{R_\Omega} \qquad \text{avec} \qquad U(x,y,z) = -G\left(\frac{m_1}{r_1}+\frac{m_2}{r_2}\right) - \frac{1}{2}\Omega^2\left(x^2+y^2\right). \tag{6.5}$$

Quelques remarques sur cette fonction U : c'est une fonction de x,y,z dans le repère tournant, indépendante du temps ; ce n'est pas le potentiel gravitationnel, mais un *potentiel effectif* qui inclut le terme centrifuge ; enfin la force de Coriolis, qui dépend de la vitesse, n'en dérive pas, mais elle ne travaille pas.

Si l'on projette l'équation (6.5) sur la vitesse relative $\boldsymbol{v} = \delta\boldsymbol{r}/\delta t$, le terme de Coriolis disparaît, et

$$\boldsymbol{v}\cdot\frac{\delta\boldsymbol{v}}{\delta t} = -\boldsymbol{\nabla}U\cdot\boldsymbol{v} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{v^2}{2}+U\right) = 0. \tag{6.6}$$

On obtient donc une intégrale première :

$$v^2 + 2U = -C \qquad \text{soit} \qquad v^2 = 2G\left(\frac{m_1}{r_1}+\frac{m_2}{r_2}\right) + \Omega^2\left(x^2+y^2\right) - C. \tag{6.7}$$

6.2 Intégrale de Jacobi

L'expression $\boxed{v^2 + 2U = -C}$ s'appelle l'**intégrale de Jacobi**, et la constante C, qui ne dépend que des conditions initiales, la **constante de Jacobi**. On l'appelle parfois l'intégrale de l'énergie relative. Attention : c'est bien une intégrale première du mouvement (la seule que possède le problème à trois corps restreint, comme l'a montré Poincaré), mais *ce n'est pas l'énergie* du corps M, qui n'est pas conservée dans le repère inertiel puisque les corps principaux, en tournant, travaillent sur lui ; le moment cinétique de M n'est pas non plus conservé. Une seule intégrale ne suffit pas à intégrer un système à trois degrés de liberté, mais elle fournit tout de même des informations importantes.

Pour simplifier les écritures, on introduit des variables sans dimension : la distance d comme unité de longueur, $1/\Omega$ comme unité de temps, et le paramètre de masse

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \leq \frac{1}{2}, \tag{6.8}$$

de sorte que $G(m_1 + m_2) = 1$, $\Omega = 1$, et que P_1 (masse $1-\mu$) et P_2 (masse μ) sont situés sur l'axe x aux abscisses $-\mu$ et $1-\mu$. Attention, dans ce chapitre μ désigne ce rapport de masses et non le paramètre gravitationnel. L'intégrale de Jacobi s'écrit alors

$$v^2 = x^2 + y^2 + \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} - C \quad \text{avec} \quad \begin{cases} r_1 = \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2 + z^2} \\ r_2 = \sqrt{(x-1+\mu)^2 + y^2 + z^2} \end{cases} \tag{6.9}$$

Pour le système Terre-Lune, $\mu = 0{,}01215$; pour Soleil-Terre, $\mu = 3{,}0 \cdot 10^{-6}$; pour Soleil-Jupiter, $\mu = 9{,}5 \cdot 10^{-4}$.

Exemple 1 : surfaces de vitesse nulle. L'intérêt de la constante de Jacobi peut s'apprécier simplement en considérant les surfaces où la vitesse relative de la particule est nulle, $2U + C = 0$. Puisque $v^2 \geq 0$, le mouvement ne peut avoir lieu que dans la région $-2U \geq C$, c'est-à-dire

$$\Omega_J(x,y,z) \equiv x^2 + y^2 + \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} \geq C. \tag{6.10}$$

La figure 6.2 donne une image de $-\Omega_J = 2U$, c'est-à-dire du potentiel effectif au facteur 2 près, vu comme un relief : deux puits profonds aux positions des corps principaux, entourés d'une crête circulaire au-delà de laquelle le terme centrifuge fait redescendre le relief, et cinq points critiques, trois cols et deux sommets, qui sont les points de Lagrange.

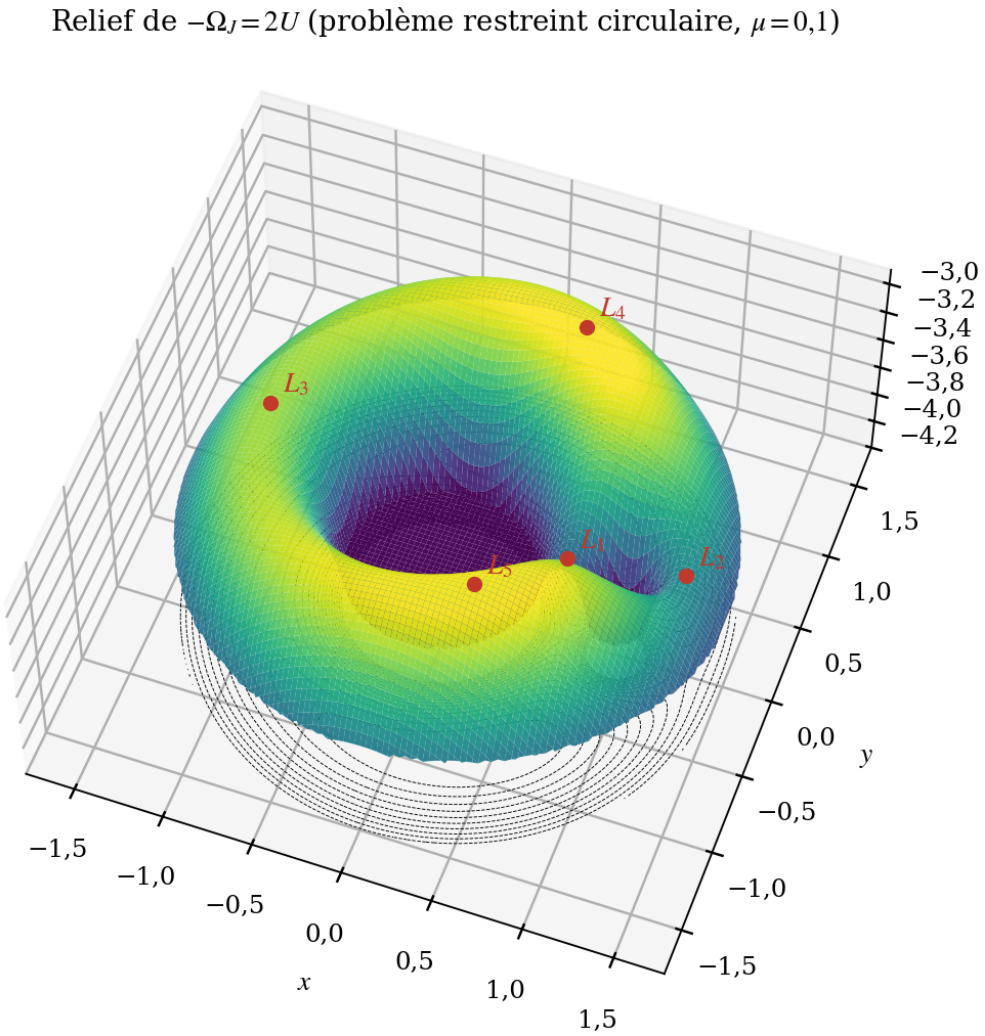


FIGURE 6.2 – La fonction $-\Omega_J(x,y) = 2U$ (potentiel effectif au facteur 2 près) du problème restreint circulaire ($\mu = 0{,}1$ pour la lisibilité), représentée en relief et en courbes de niveau. Les cols L_1, L_2, L_3 sont sur l'axe des deux corps, les sommets L_4 et L_5 aux sommets des triangles équilatéraux.

Les surfaces $\Omega_J = C$, dites *surfaces de vitesse nulle* ou *surfaces de Hill*, limitent les régions accessibles à M pour une valeur donnée de C, quelle que soit la complexité de sa trajectoire. Si l'on se restreint au plan du mouvement, leur intersection avec le plan (x,y) donne les *courbes de vitesse nulle* de la figure 6.3, tracées pour le système Terre-Lune. Pour C grand (énergie relative faible), la particule est confinée soit près de la Terre, soit près de la Lune, soit très loin des deux : les trois régions sont séparées. Quand C décroît, un premier col s'ouvre en L_1 entre la Terre et la Lune ($C_{L_1} = 3{,}188$), puis un second en L_2 derrière la Lune ($C_{L_2} = 3{,}172$), qui permet de s'échapper, puis un troisième en L_3 ($C_{L_3} = 3{,}012$) ; enfin, pour $C < C_{L_4} = 2{,}988$, tout le plan est accessible. C'est ainsi que les transferts Terre-Lune à faible énergie, comme celui de la mission SMART-1 ou des CubeSats d'Artemis I, exploitent l'ouverture du col L_1.

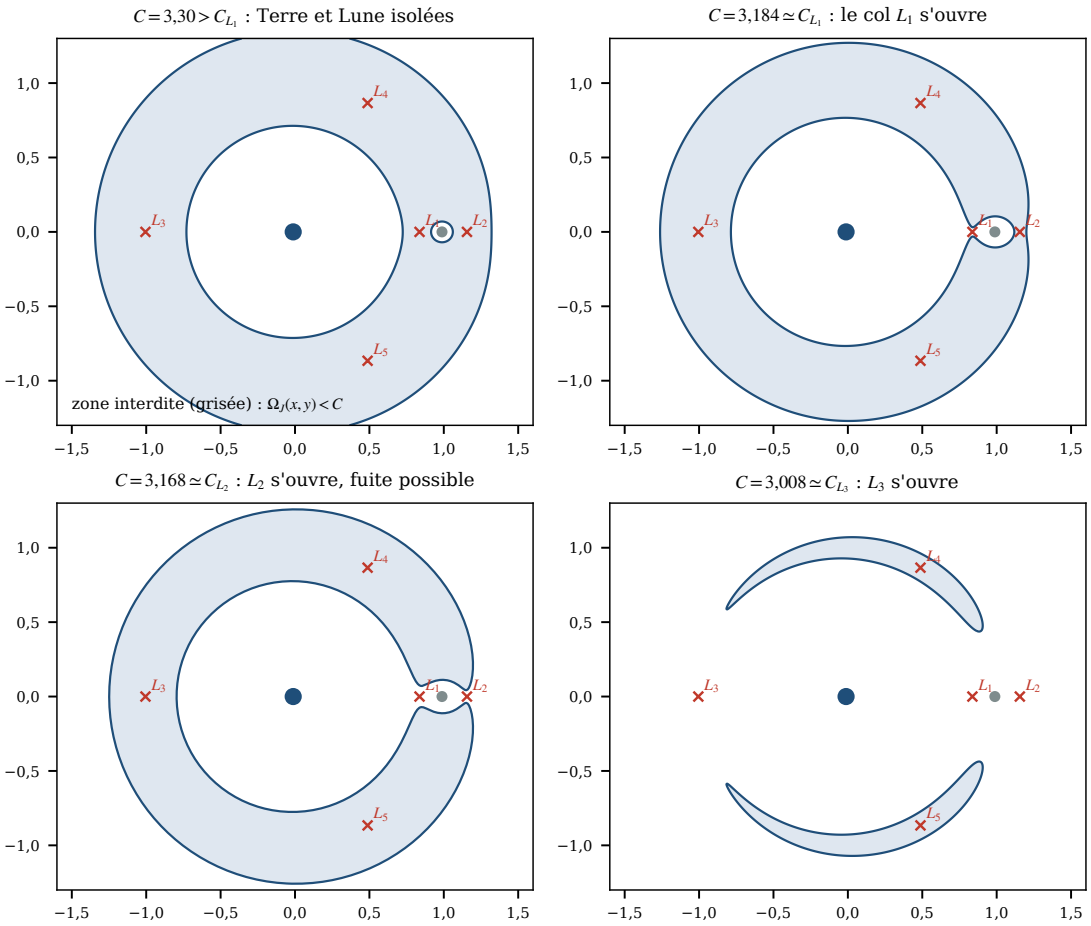


FIGURE 6.3 – Courbes de vitesse nulle du système Terre-Lune ($\mu = 0{,}01215$) pour quatre valeurs de la constante de Jacobi. Les zones grisées sont interdites.

Exemple 2 : les points de Lagrange. Le tracé des surfaces de vitesse nulle fait apparaître cinq points où le gradient du potentiel effectif U est nul. Ces cinq points, solutions de l'équation $\boldsymbol{\nabla} U = \mathbf{0}$, sont des points d'équilibre dans le repère tournant : une particule qui y est placée sans vitesse relative y reste indéfiniment, tournant avec les deux corps principaux (figures 6.4 et 6.5). Ce sont les *points de Lagrange* L_1 à L_5. On montrera dans les sections suivantes que les points L_1, L_2 et L_3, situés sur l'axe des deux corps, sont des points d'équilibre instables (ce sont des cols du potentiel effectif), tandis que les points L_4 et L_5, aux sommets des triangles équilatéraux, sont stables pour μ assez petit, bien qu'ils soient des maxima du potentiel effectif U (donc des minima de $\Omega_J = -2U$) : c'est la force de Coriolis qui les stabilise.

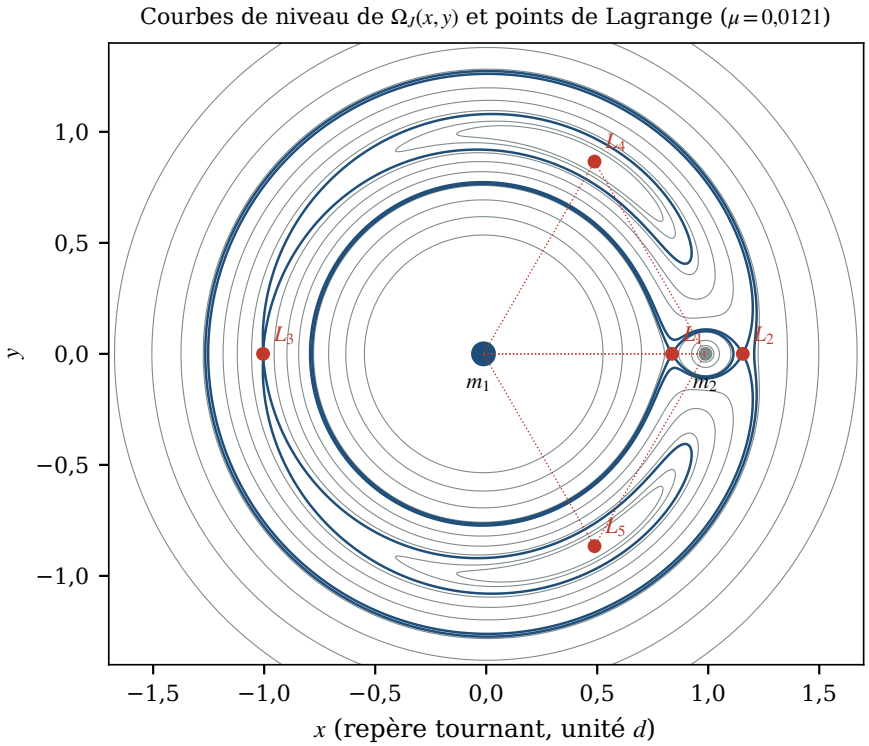


FIGURE 6.4 – Courbes de niveau de Ω_J et position des cinq points de Lagrange, ici pour $\mu = 0{,}0121$ (Terre-Lune). Il en existe de similaires pour tout couple de corps : Soleil-Terre, Soleil-Jupiter, etc.

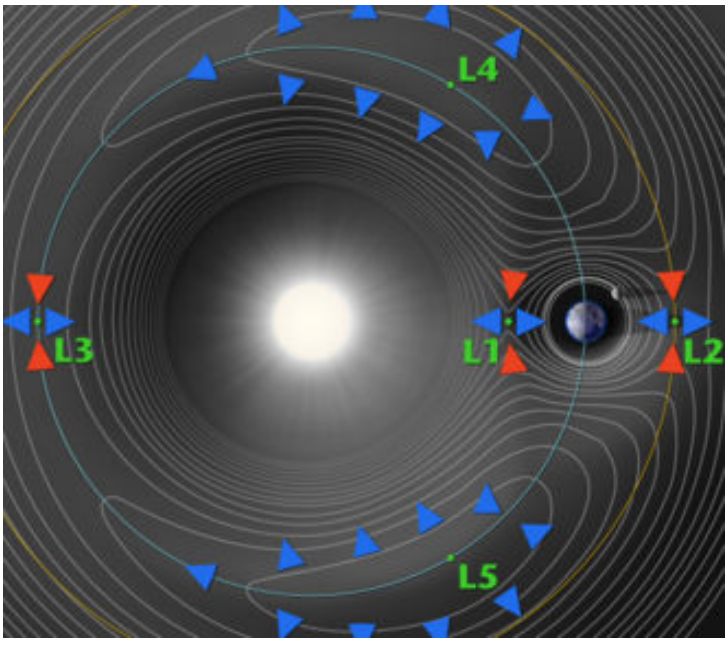
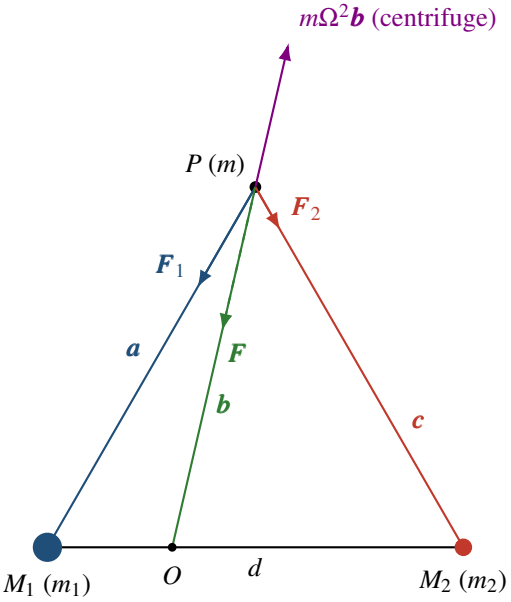


FIGURE 6.5 – Les cinq points de Lagrange du système Soleil-Terre sur le relief du potentiel effectif : les flèches indiquent le sens dans lequel une particule légèrement écartée de l'équilibre commence à glisser (crédit : NASA/WMAP Science Team).

6.3 Position des points de Lagrange L_4 et L_5 : approche géométrique

Ce paragraphe vise à donner une première approche de la localisation des points de Lagrange L_4 et L_5, dans le cas simple du problème circulaire restreint, par un raisonnement de statique dans le repère

tournant. Soient deux corps M_1 et M_2 de masses m_1 et m_2, O le centre de gravité de ces deux masses et $d = M_1M_2$. P est un point de masse m négligeable par rapport à m_1 et m_2 (les corps notés P_1, P_2 et M à la section 6.1 sont notés ici M_1, M_2 et P). On se place dans le repère tournant autour de O défini précédemment. On note $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{M_1P}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{M_2P}$ et $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OP}$ (figure 6.6). Soient $\boldsymbol{F}_1$ la force exercée par M_1 sur P et $\boldsymbol{F}_2$ la force exercée par M_2 sur P, et $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$.



À l'équilibre, la résultante $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$ des deux attractions est dirigée vers le barycentre O et compense exactement la force centrifuge.

FIGURE 6.6 – Bilan des forces aux points de Lagrange L_4 et L_5.

À l'équilibre dans le repère tournant, la résultante $\boldsymbol{F}$ doit compenser la force centrifuge $m\Omega^2\boldsymbol{b}$: elle est donc dirigée vers O, c'est-à-dire colinéaire à $\boldsymbol{b}$. Les propriétés du barycentre nous permettent d'écrire

$$\boldsymbol{b} = \frac{m_1\boldsymbol{a} + m_2\boldsymbol{c}}{m_1 + m_2} \qquad \text{soit} \qquad m_1(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = m_2(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}). \tag{6.11}$$

Si l'on prend le produit vectoriel de cette expression par $\boldsymbol{F}$, en utilisant $\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{0}$ et $\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{0}$ (les attractions sont dirigées selon $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{c}$), il vient

$$m_1\,\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{F}_2 + m_2\,\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{0}. \tag{6.12}$$

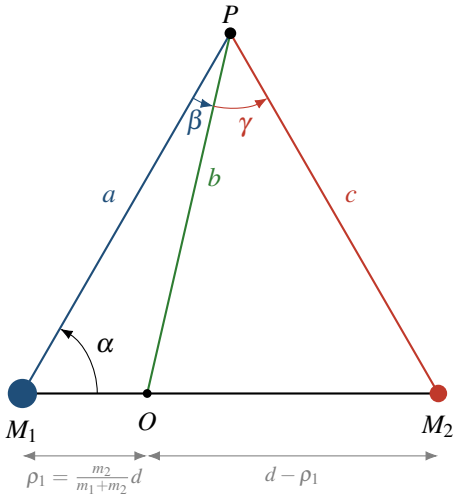
Les deux produits vectoriels font intervenir le même angle $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$, d'où, en normes, $m_1 a F_2 = m_2 c F_1$. Dans le cas de forces gravitationnelles, $F_1 = Gm_1m/a^2$ et $F_2 = Gm_2m/c^2$, et donc

$$m_1 a \frac{Gm_2m}{c^2} = m_2 c \frac{Gm_1m}{a^2} \qquad \Rightarrow \qquad a^3 = c^3 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{a = c}\,: \tag{6.13}$$

le triangle M_1PM_2 où se situe le point d'équilibre est *isocèle*.

La deuxième condition pour que le point soit en équilibre est que l'accélération centrifuge en P compense la résultante des attractions des deux masses, avec les notations de la figure 6.7 :

$$\Omega^2 b = \frac{F_1}{m}\cos\beta + \frac{F_2}{m}\cos\gamma = \frac{G}{a^2}(m_1\cos\beta + m_2\cos\gamma). \tag{6.14}$$



Triangle M_1PM_2 isocèle ($a=c$) : $\cos\alpha = d/(2a)$.
Projections sur M_1P et M_2P : $b\cos\beta = a-\rho_1\cos\alpha$, $b\cos\gamma = a-(d-\rho_1)\cos\alpha$.

FIGURE 6.7 – Notations pour la recherche des points L_4 et L_5.

En projetant les triangles (O,P,M_1) et (O,P,M_2) sur les directions M_1P et M_2P respectivement, il vient

$$b\cos\beta = a-\rho_1\cos\alpha, \qquad b\cos\gamma = a-(d-\rho_1)\cos\alpha, \tag{6.15}$$

avec $\cos\alpha = d/(2a)$ et $\rho_1 = OM_1 = m_2 d/(m_1+m_2)$, et donc

$$\Omega^2 = \frac{G}{a^2b^2}\left[(m_1+m_2)a - \frac{d}{2a}\left(m_1\rho_1 + m_2(d-\rho_1)\right)\right] = \frac{G(m_1+m_2)}{a^3b^2}\left(a^2 - \frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}d^2\right). \tag{6.16}$$

Par ailleurs, dans le triangle (O,P,M_1), $b^2 = a^2+\rho_1^2-2a\rho_1\cos\alpha = a^2+\rho_1^2-\rho_1 d$, soit

$$b^2 = a^2 - \frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}d^2. \tag{6.17}$$

On déduit de (6.16) et (6.17) que $\Omega^2 = G(m_1+m_2)/a^3$. Or le problème à deux corps contraint la vitesse de rotation de l'ensemble, $\Omega^2 = G(m_1+m_2)/d^3$, d'où $\boxed{a=d}$. Le système a donc un point d'équilibre situé au sommet d'un triangle *équilatéral* ayant pour base le segment joignant les deux masses. Par symétrie par rapport à l'axe M_1M_2, on en déduit l'existence des deux points L_4 et L_5. On remarquera que ce résultat ne dépend pas du rapport des masses.

Application : les astéroïdes troyens. La figure 6.8 représente le Système solaire interne, jusqu'à Jupiter. Le dessin comprend la ceinture d'astéroïdes principale (le nuage blanc en forme de beignet), les Hildas (le « triangle » orange juste à l'intérieur de l'orbite de Jupiter, en résonance 3:2) et les Troyens (en vert). Le groupe d'astéroïdes qui précède Jupiter de 60°, autour de L_4, est appelé « camp grec » et le groupe qui suit Jupiter, autour de L_5, « camp troyen » ; on en connaît aujourd'hui plus de 13 000, et la sonde Lucy (lancée en 2021) doit en survoler huit, en comptant leurs compagnons, entre 2027 et 2033. Ces astéroïdes sont situés approximativement aux sommets des triangles équilatéraux ayant pour base le segment Soleil-Jupiter, et oscillent autour de ces points (section 6.6). On connaît aussi des Troyens de Neptune (une trentaine), de Mars, d'Uranus, et même deux Troyens de la Terre (2010 TK_7 et 2020 XL_5, tous deux en L_4).

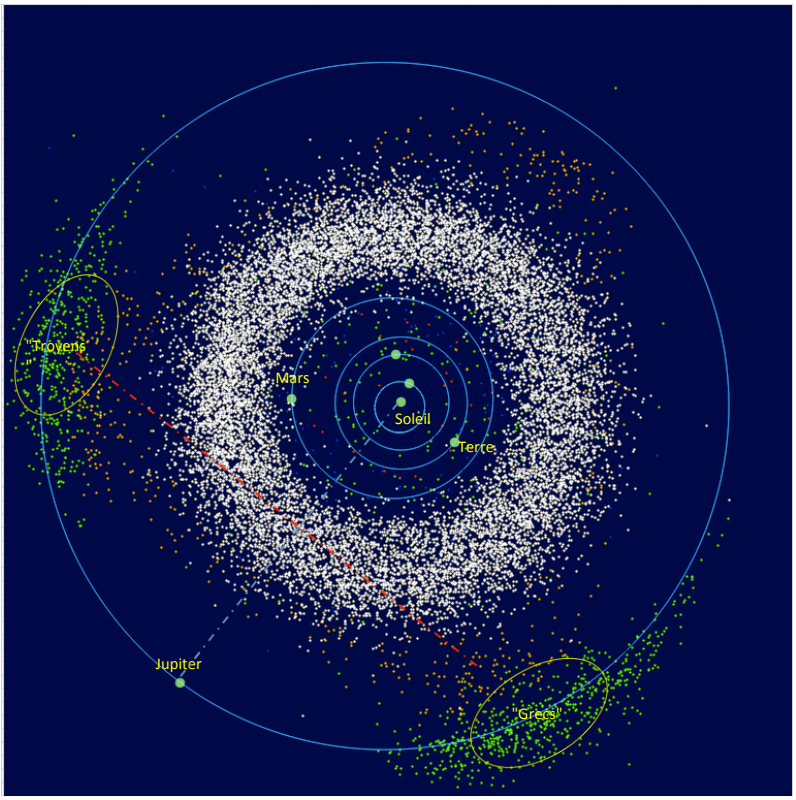


FIGURE 6.8 – Le Système solaire interne, entre le Soleil et Jupiter, d'après une figure de Wikimedia Commons (auteur Mdf, domaine public) fondée sur les éphémérides du JPL. On notera la configuration en triangle équilatéral des amas d'astéroïdes troyens.

6.4 Position des points de Lagrange : cas général

Si le problème à trois corps n'est pas intégrable, on peut toutefois trouver un certain nombre de solutions particulières. Continuons donc la recherche des points où la vitesse et l'accélération d'une particule sont nulles dans le référentiel tournant (synodique). Supposons de plus que le mouvement est confiné dans le plan (x,y). Réécrivons le potentiel sous une forme différente, avec les unités sans dimension de la section 6.2 : on note $\mu_1 = Gm_1 = 1-\mu$ et $\mu_2 = Gm_2 = \mu$ (de sorte que $\mu_1+\mu_2 = 1$), et $n = \Omega = 1$ le moyen mouvement du système en rotation. Il est commode d'utiliser ici, comme le font Murray et Dermott [6], la *fonction de force* $\mathscr{U} = -U$, positive, de sorte que les équations du mouvement s'écrivent

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2n\dot{y} = \dfrac{\partial \mathscr{U}}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} = \dfrac{\partial \mathscr{U}}{\partial y} \\ \ddot{z} = \dfrac{\partial \mathscr{U}}{\partial z} \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad \mathscr{U} = \frac{n^2}{2}\left(x^2+y^2\right) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} = \frac{1}{2}\Omega_J. \tag{6.18}$$

À partir des définitions de r_1 et r_2, il vient $\mu_1 r_1^2 + \mu_2 r_2^2 = x^2+y^2+\mu_1\mu_2$ (avec $z=0$). On peut alors exprimer $\mathscr{U}$ sous la forme suivante :

$$\mathscr{U} = \mu_1\left(\frac{1}{r_1} + \frac{r_1^2}{2}\right) + \mu_2\left(\frac{1}{r_2} + \frac{r_2^2}{2}\right) - \frac{1}{2}\mu_1\mu_2. \tag{6.19}$$

L'avantage de cette expression est qu'elle ne dépend plus explicitement ni de x ni de y, ce qui va nous simplifier les dérivations partielles. Si l'on reprend l'équation du mouvement (6.18) en cherchant les

points d'équilibre, c'est-à-dire $\dot{x} = \dot{y} = 0$ et $\ddot{x} = \ddot{y} = 0$, on obtient les conditions

$$\frac{\partial \mathscr{U}}{\partial x} = \frac{\partial \mathscr{U}}{\partial r_1}\frac{\partial r_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathscr{U}}{\partial r_2}\frac{\partial r_2}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \mathscr{U}}{\partial y} = \frac{\partial \mathscr{U}}{\partial r_1}\frac{\partial r_1}{\partial y} + \frac{\partial \mathscr{U}}{\partial r_2}\frac{\partial r_2}{\partial y} = 0. \tag{6.20}$$

Une simple inspection de ces équations donne dans un premier temps l'existence de deux solutions triviales, celles pour lesquelles les deux dérivées partielles s'annulent séparément :

$$\frac{\partial \mathscr{U}}{\partial r_1} = \mu_1\left(-\frac{1}{r_1^2} + r_1\right) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \mathscr{U}}{\partial r_2} = \mu_2\left(-\frac{1}{r_2^2} + r_2\right) = 0, \tag{6.21}$$

soit $r_1 = r_2 = 1$, c'est-à-dire

$$(x+\mu_2)^2 + y^2 = 1 \quad \text{et} \quad (x-\mu_1)^2 + y^2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{x = \frac{1}{2} - \mu_2, \quad y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}} \tag{6.22}$$

On retrouve bien là les résultats du paragraphe précédent. Par convention, le point L_4 est le point en avant du mouvement ($y > 0$) et le point L_5 le point en arrière du mouvement de rotation.

Si l'on reprend les équations (6.20) en les exprimant en fonction de r_1, r_2, x et y, avec $\partial r_1/\partial x = (x+\mu_2)/r_1$, $\partial r_2/\partial x = (x-\mu_1)/r_2$, $\partial r_1/\partial y = y/r_1$ et $\partial r_2/\partial y = y/r_2$, il vient également

$$\mu_1\left(-\frac{1}{r_1^2} + r_1\right)\frac{x+\mu_2}{r_1} + \mu_2\left(-\frac{1}{r_2^2} + r_2\right)\frac{x-\mu_1}{r_2} = 0, \tag{6.23}$$

$$\mu_1\left(-\frac{1}{r_1^2} + r_1\right)\frac{y}{r_1} + \mu_2\left(-\frac{1}{r_2^2} + r_2\right)\frac{y}{r_2} = 0. \tag{6.24}$$

L'examen de l'équation (6.24) montre que $y = 0$ est une solution simple et que les points d'équilibre restants sont situés le long de l'axe des x, et vérifient (6.23) : *ce sont les points colinéaires L_1, L_2 et L_3*. Le point L_1 est situé entre les masses M_1 et M_2, le point L_2 au-delà de la masse M_2 et le point L_3 au-delà de M_1, à une abscisse négative.

Position du point L_1. Au point L_1, on a

$$r_1 + r_2 = 1, \qquad r_1 = x + \mu_2, \qquad r_2 = -x + \mu_1, \qquad \frac{\partial r_1}{\partial x} = -\frac{\partial r_2}{\partial x} = 1, \tag{6.25}$$

ce qui donne, en combinant avec l'équation (6.23),

$$\mu_1\left(-\frac{1}{(1-r_2)^2} + 1 - r_2\right) - \mu_2\left(-\frac{1}{r_2^2} + r_2\right) = 0, \tag{6.26}$$

soit encore, après réduction au même dénominateur,

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = 3r_2^3\,\frac{1 - r_2 + r_2^2/3}{(1 + r_2 + r_2^2)(1-r_2)^3}. \tag{6.27}$$

Cette équation quintique n'a malheureusement pas de solution explicite, mais une solution peut lui être trouvée soit numériquement, soit à l'aide d'un développement en série. Si l'on note

$$\alpha = \left(\frac{\mu_2}{3\mu_1}\right)^{1/3}, \tag{6.28}$$

il vient

$$r_2 = \alpha - \frac{1}{3}\alpha^2 - \frac{1}{9}\alpha^3 - \frac{23}{81}\alpha^4 + O(\alpha^5) \qquad \text{avec} \qquad x_{L_1} = \mu_1 - r_2. \tag{6.29}$$

Au premier ordre, L_1 est donc à la distance $\alpha d = d\,(m_2/3m_1)^{1/3}$ de M_2 : c'est le *rayon de Hill* r_H, taille de la région où, dans le repère tournant, l'attraction de M_2 l'emporte sur l'effet de marée de M_1 combiné au terme centrifuge (pour le système Soleil-Terre, 1,5 million de km ; pour Soleil-Jupiter, 53 millions de km ; pour Terre-Lune, 61 500 km).

Position du point L_2. De la même façon, au point L_2,

$$r_1 - r_2 = 1, \qquad r_1 = x + \mu_2, \qquad r_2 = x - \mu_1, \qquad \frac{\partial r_1}{\partial x} = \frac{\partial r_2}{\partial x} = 1, \tag{6.30}$$

soit

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = 3r_2^3 \frac{1 + r_2 + r_2^2/3}{(1+r_2)^2(1-r_2^3)}, \tag{6.31}$$

et, avec la même définition de α,

$$r_2 = \alpha + \frac{1}{3}\alpha^2 - \frac{1}{9}\alpha^3 - \frac{31}{81}\alpha^4 + O(\alpha^5) \qquad \text{avec} \qquad x_{L_2} = \mu_1 + r_2. \tag{6.32}$$

L_1 et L_2 sont donc presque symétriques par rapport à M_2, à la distance r_H, L_2 étant légèrement plus loin.

Position du point L_3. Enfin, au point L_3,

$$r_2 - r_1 = 1, \qquad r_1 = -x - \mu_2, \qquad r_2 = -x + \mu_1, \qquad \frac{\partial r_1}{\partial x} = \frac{\partial r_2}{\partial x} = -1, \tag{6.33}$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{(1-r_1^3)(1+r_1)^2}{r_1^3\left(r_1^2 + 3r_1 + 3\right)}, \tag{6.34}$$

dont la solution, en posant cette fois $\beta = \mu_2/\mu_1$ (petit), est

$$r_1 = 1 - \frac{7}{12}\beta + \frac{7}{12}\beta^2 - \frac{13223}{20736}\beta^3 + O(\beta^4) \qquad \text{avec} \qquad x_{L_3} = -\mu_2 - r_1 \simeq -1 - \frac{5}{12}\mu. \tag{6.35}$$

L_3 est donc presque diamétralement opposé à M_2, un peu au-delà de l'orbite de celui-ci. Le tableau 6.1 donne les valeurs numériques pour trois systèmes usuels.

Système	μ	x_{L_1}	x_{L_2}	x_{L_3}	C_{L_1}	C_{L_4}
Soleil-Terre	$3{,}00 \cdot 10^{-6}$	0,99003	1,01003	−1,0000013	3,00089	3,00000
Soleil-Jupiter	$9{,}54 \cdot 10^{-4}$	0,93237	1,06883	−1,00040	3,03876	2,99905
Terre-Lune	$1{,}215 \cdot 10^{-2}$	0,83692	1,15568	−1,00506	3,18834	2,98800

TABLE 6.1 – Position des points colinéaires (en unités de d, origine au barycentre) et constantes de Jacobi de L_1 et L_4 pour trois systèmes usuels.

Complément : missions aux points de Lagrange

Les points de Lagrange L_1 et L_2 du système Soleil-Terre, à 1,5 million de km de la Terre, sont devenus des emplacements de choix. L_1, entre la Terre et le Soleil, offre une vue permanente du Soleil et un poste avancé pour la météorologie de l'espace : SOHO (depuis 1995), ACE, DSCOVR, Aditya-L1 (2024). L_2, à l'opposé, permet de tourner le dos simultanément au Soleil, à la Terre et à la Lune, d'où une grande stabilité thermique et un ciel dégagé : WMAP, Herschel, Planck, Gaia (2014–2025), le télescope spatial James Webb (depuis 2022) et Euclid (2023). Les points colinéaires étant instables, les sondes n'y stationnent pas exactement mais décrivent des orbites de *halo* ou de *Lissajous* de grande amplitude autour d'eux, qu'il faut entretenir par de petites corrections (quelques m/s par an) ; ces orbites périodiques, leurs variétés stables et instables et les « autoroutes interplanétaires » qui les relient sont un domaine très actif de la mécanique céleste moderne. Dans le système Terre-Lune, le relais Queqiao de la mission chinoise Chang'e 4 (2018) est sur une orbite de halo autour de L_2 pour communiquer avec la face cachée, et la station Gateway du programme Artemis devait être placée sur une orbite NRHO (*near-rectilinear halo orbit*) proche de L_2 (la NASA a suspendu ce projet en mars

2026 pour donner la priorité à une base à la surface de la Lune). Enfin les points L_4 et L_5, stables, sont peuplés naturellement : Troyens de Jupiter, nuages de poussière de Kordylewski aux points L_4 et L_5 Terre-Lune.

6.5 Critère de Tisserand

On se place dans le problème à trois corps restreint tel que nous l'avons déjà décrit à la section 6.2, avec le Soleil pour corps P_1 et Jupiter pour P_2. La constante de Jacobi s'exprime dans les coordonnées du repère tournant (x,y,z) par

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2 = x^2+y^2+\frac{2(1-\mu)}{r_1}+\frac{2\mu}{r_2}-C. \tag{6.36}$$

Si on l'exprime dans les coordonnées du repère non tournant (ξ,η,ζ), c'est-à-dire dans le repère héliocentrique (le barycentre est confondu avec le Soleil à μ près), on utilise $x^2+y^2=\xi^2+\eta^2$ et la relation entre les vitesses, $\dot{x}^2+\dot{y}^2=\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2-2(\xi\dot{\eta}-\eta\dot{\xi})+\xi^2+\eta^2$, et il vient

$$\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2+\dot{\zeta}^2-2\left(\xi\dot{\eta}-\eta\dot{\xi}\right) = \frac{2(1-\mu)}{r_1}+\frac{2\mu}{r_2}-C. \tag{6.37}$$

On peut dès lors utiliser les invariants classiques du mouvement képlérien. En particulier, si l'on considère un corps de paramètres képlériens (a,e,i) dans le repère héliocentrique (unités : $a_J=1$, $\mu_\odot\simeq 1$), l'équation des forces vives et la composante du moment cinétique normale au plan de l'orbite de Jupiter donnent

$$\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2+\dot{\zeta}^2=\frac{2}{r}-\frac{1}{a} \qquad \text{et} \qquad \xi\dot{\eta}-\eta\dot{\xi}=\sqrt{a(1-e^2)}\cos i. \tag{6.38}$$

L'expression (6.37) devient alors

$$\frac{2}{r}-\frac{1}{a}-2\sqrt{a(1-e^2)}\cos i = \frac{2(1-\mu)}{r_1}+\frac{2\mu}{r_2}-C. \tag{6.39}$$

Loin de Jupiter, on a $r\simeq r_1$ et le terme $2\mu/r_2$ est négligeable ($\mu\simeq 10^{-3}$), de sorte que les termes en $2/r$ s'éliminent (à μ près) et qu'il reste

$$\boxed{T_J=\frac{1}{a}+2\sqrt{a(1-e^2)}\cos i=\text{cste}} \tag{6.40}$$

C'est ce que l'on appelle le *paramètre* (ou *critère*, ou *invariant*) *de Tisserand*, a étant exprimé en unités du demi-grand axe de Jupiter. Il est conservé, aux termes en μ près, lors d'une rencontre avec Jupiter, alors que a, e et i peuvent changer considérablement (figures 6.9 et 6.10). Historiquement, ce critère a permis de savoir si une comète nouvelle pouvait s'identifier à une comète anciennement observée, même si l'orbite de celle-ci avait subi entre-temps de grandes perturbations dues au passage près de Jupiter. On l'utilise aujourd'hui pour classer les petits corps : les comètes de la famille de Jupiter ont $2<T_J<3$, les comètes de type Halley $T_J<2$, et les astéroïdes typiquement $T_J>3$; une valeur $T_J\simeq 3$ signale un objet qui peut s'approcher de Jupiter à très faible vitesse relative, donc subir des changements d'orbite drastiques, voire une capture temporaire par Jupiter (c'est le cas des comètes quasi-Hilda ; D/1993 F2 Shoemaker-Levy 9, sans doute l'une d'elles, a été capturée avant de s'écraser sur Jupiter en 1994). La comète 67P/Tchourioumov-Guérassimenko, cible de Rosetta, a $T_J=2{,}75$; son périhélie est passé de 2,7 à 1,3 UA lors d'une rencontre avec Jupiter en 1959.

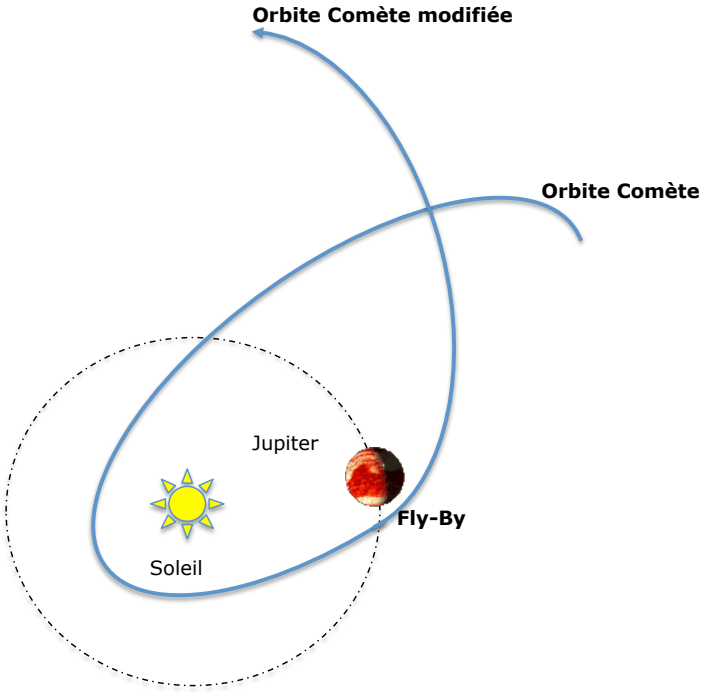


FIGURE 6.9 – Principe : une comète qui passe près de Jupiter (*fly-by*) voit son orbite héliocentrique profondément modifiée, mais son paramètre de Tisserand est conservé.

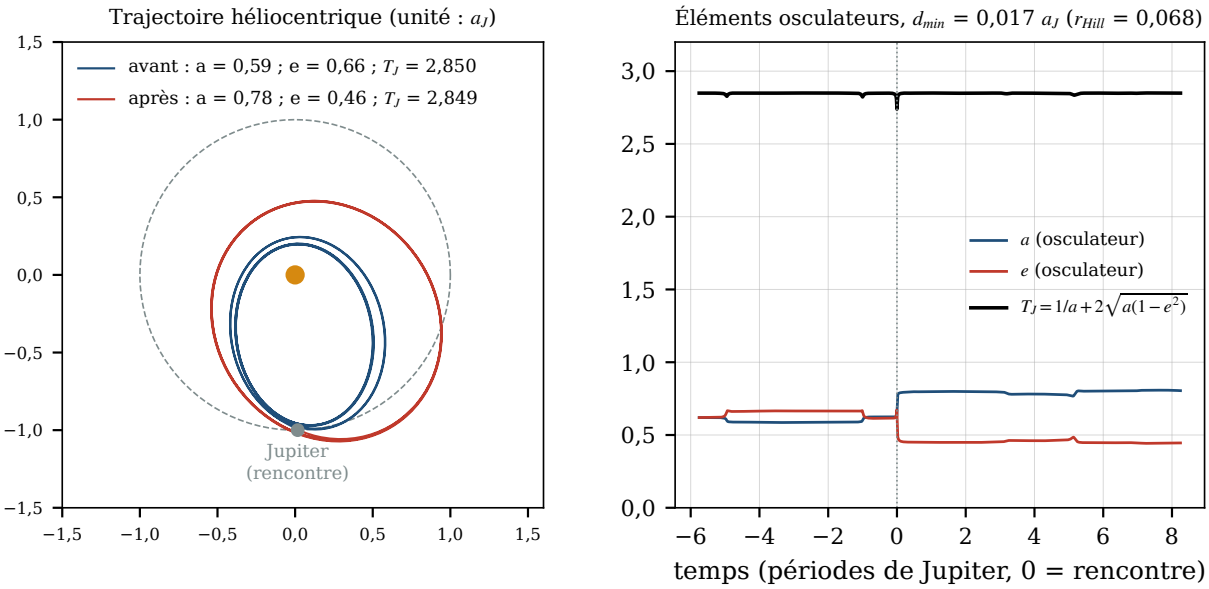


FIGURE 6.10 – Changement d'orbite d'une comète hypothétique après une rencontre avec Jupiter, calculé dans le problème à trois corps restreint circulaire Soleil-Jupiter. La rencontre provoque d'importants changements des éléments orbitaux, mais ne modifie presque pas le paramètre de Tisserand : $T_J = 2{,}850$ avant la rencontre et 2,849 après.

NB. François-Félix Tisserand est né le 13 janvier 1845 à Nuits-Saint-Georges. C'est Le Verrier qui fait nommer astronome adjoint, en 1866, cet agrégé sortant de l'École normale supérieure : il lui demande d'étudier la théorie de la Lune de Delaunay, avec l'espoir, qui fut déçu, que le jeune mathématicien y décèlerait des erreurs. L'œuvre capitale de Tisserand est son *Traité de mécanique céleste* [13], publié en quatre tomes entre 1889 et 1896. Ses propres travaux sont incorporés à cette somme des connaissances de l'époque qui, par sa précision et son élégante clarté, forme encore de nos jours la base de l'enseignement de la mécanique céleste classique. Il dirigea l'Observatoire de Paris de 1892 à sa mort en 1896.

6.6 Mouvement autour des points de Lagrange L_4 et L_5

Il ne suffit pas de savoir qu'il existe des points d'équilibre pour le problème restreint à trois corps. Un point évidemment intéressant est l'étude de la stabilité de ces points, et des trajectoires d'un point matériel autour de ces points particuliers. On peut étudier la stabilité de ces points en considérant des « petits » mouvements autour des points d'équilibre.

En reprenant les équations (6.18), on se place à proximité d'un point d'équilibre que l'on notera (x_L, y_L). Si l'on considère un petit déplacement (X, Y) autour de ce point (à ne pas confondre avec les coordonnées inertielles de la section 6.1), on peut substituer dans (6.18) et effectuer un développement en série autour de (x_L, y_L). Comme les dérivées premières de $\mathscr{U}$ sont nulles au point d'équilibre, il vient au premier ordre

$$\begin{cases} \ddot{X} - 2n\dot{Y} = X\,\mathscr{U}_{xx} + Y\,\mathscr{U}_{xy} \\ \ddot{Y} + 2n\dot{X} = X\,\mathscr{U}_{xy} + Y\,\mathscr{U}_{yy} \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad \mathscr{U}_{xx} = \left(\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x^2}\right)_L, \quad \mathscr{U}_{xy} = \left(\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial x \partial y}\right)_L, \quad \mathscr{U}_{yy} = \left(\frac{\partial^2 \mathscr{U}}{\partial y^2}\right)_L. \tag{6.41}$$

En prenant $n = 1$ et en mettant ces équations sous forme matricielle, il vient

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mathscr{U}_{xx} & \mathscr{U}_{xy} & 0 & 2 \\ \mathscr{U}_{xy} & \mathscr{U}_{yy} & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix}, \qquad \text{soit} \qquad \dot{\mathbf{W}} = A\,\mathbf{W}. \tag{6.42}$$

Il convient maintenant de résoudre ce système linéaire. Ses solutions sont des combinaisons d'exponentielles $\mathrm{e}^{\lambda_k t}$, où les λ_k sont les valeurs propres de A, racines de l'équation caractéristique

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ \mathscr{U}_{xx} & \mathscr{U}_{xy} & -\lambda & 2 \\ \mathscr{U}_{xy} & \mathscr{U}_{yy} & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 + (4 - \mathscr{U}_{xx} - \mathscr{U}_{yy})\,\lambda^2 + \mathscr{U}_{xx}\mathscr{U}_{yy} - \mathscr{U}_{xy}^2 = 0. \tag{6.43}$$

L'équilibre est stable (au sens linéaire) si et seulement si toutes les valeurs propres sont imaginaires pures et distinctes, c'est-à-dire si l'équation bicarrée en λ^2 a deux racines réelles négatives distinctes. On se référera à [6] pour le traitement complet ; on y montre qu'aux points colinéaires L_1, L_2, L_3 l'une des racines λ^2 est toujours positive : ces points sont *instables*, avec un temps caractéristique de divergence de l'ordre de $1/\lambda \simeq 23$ jours pour L_1 et L_2 Soleil-Terre. Dans le cas des points L_4 et L_5, on peut écrire $r_1 = r_2 = 1$ (sommet d'un triangle équilatéral) et dans ce cas on a

$$\mathscr{U}_{xx} = \frac{3}{4}, \qquad \mathscr{U}_{yy} = \frac{9}{4}, \qquad \mathscr{U}_{xy} = \pm\frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu_2) \tag{6.44}$$

(le signe $\pm$ correspondant à L_4 et L_5). L'équation caractéristique devient alors

$$\lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu_2(1 - \mu_2) = 0, \tag{6.45}$$

dont les racines en λ^2 sont réelles, négatives et distinctes si et seulement si le discriminant est strictement positif :

$$1 - 27\mu_2(1 - \mu_2) > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mu_2 < \mu_c = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{23}{27}}\right) \simeq 0{,}0385. \tag{6.46}$$

C'est le critère de stabilité de Gascheau (1843) et Routh : les points triangulaires sont stables dès que la masse secondaire est inférieure à environ 1/26 de la masse totale (soit $m_1/m_2 > 24{,}96$), ce qui est le cas de tous les couples Soleil-planète et planète-satellite du Système solaire (Terre-Lune : $\mu_2 = 0{,}0121$) ; le couple Pluton-Charon ($\mu_2 \simeq 0{,}109$), formé d'une planète naine et de son satellite, fait exception, comme d'autres binaires transneptuniens (Orcus-Vanth, par exemple). Lorsque le critère est vérifié, pour des valeurs de μ_2 faibles, il vient

$$\lambda_{1,2} \simeq \pm \mathrm{i}\sqrt{1 - \frac{27}{4}\mu_2} \qquad \text{et} \qquad \lambda_{3,4} \simeq \pm \mathrm{i}\sqrt{\frac{27}{4}\mu_2}. \tag{6.47}$$

Le mouvement autour des points de Lagrange L_4 et L_5 est donc quasi périodique, composé de deux mouvements différents :

- un mouvement à « courte » période $2\pi/|\lambda_{1,2}| \simeq 2\pi$, c'est-à-dire ayant la période orbitale de la masse μ_2 : c'est le mouvement épicyclique, image dans le repère tournant d'une orbite képlérienne légèrement excentrique ;
- un mouvement de *libration* de longue période $2\pi/|\lambda_{3,4}| \simeq 2\pi/\sqrt{27\mu_2/4}$ autour du point d'équilibre, soit 148 ans pour les Troyens de Jupiter ; pour le système Terre-Lune, cette approximation donne 95 jours, mais μ_2 n'y est plus assez petit et la racine exacte de l'équation caractéristique donne environ 92 jours.

Lorsque l'amplitude de libration augmente, l'approximation linéaire cesse d'être valable et la trajectoire prend, dans le repère tournant, la forme d'un « têtard » (*tadpole*) allongé le long de l'orbite de μ_2 ; pour des amplitudes encore plus grandes, l'orbite englobe L_3, L_4 et L_5 et prend la forme d'un « fer à cheval » (*horseshoe*), comme celles des satellites coorbitaux de Saturne Janus et Épiméthée ou de l'astéroïde géocroiseur (3753) Cruithne (figure 6.11).

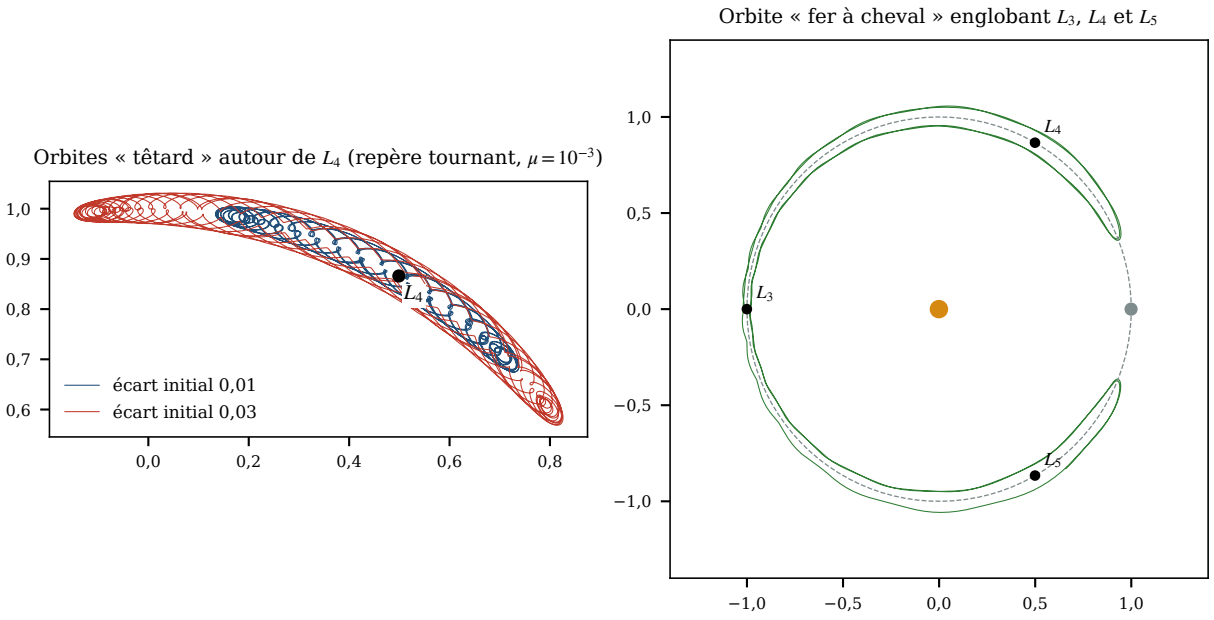


FIGURE 6.11 – Mouvement autour de L_4 dans le repère tournant, intégration numérique du problème restreint avec $\mu = 10^{-3}$ (Soleil-Jupiter). À gauche, orbites en têtard : le mouvement de la particule est la somme de l'épicycle à courte période et de la libration à longue période autour du point d'équilibre ; le mouvement est stable dans le repère tournant, ce qui explique la persistance d'astéroïdes aux points L_4 et L_5 de différentes planètes (Jupiter bien sûr, mais aussi Mars, Neptune, la Terre). À droite, orbite en fer à cheval pour une amplitude plus grande.

7 Couplages et résonances

On l'a vu, l'action de la gravitation n'est pas restreinte aux interactions « directes » entre le Soleil et les planètes ou entre les planètes et leurs satellites : tous les corps du Système solaire ressentent leurs effets réciproques. Typiquement, un corps produit la force dominante sur un autre corps, et le mouvement résultant peut être pensé comme un mouvement képlérien autour d'un corps central, sujet à de petites perturbations résultant de l'influence des autres corps. Nous avons traité au chapitre précédent le mouvement d'un corps de masse négligeable dans le champ de gravité créé par deux autres ; nous allons maintenant nous intéresser à un cas un peu plus général.

Classiquement, une grande partie de la discussion sur l'évolution des orbites dans le Système solaire fait appel à la *théorie des perturbations*. Cette méthode consiste pour l'essentiel à écrire les équations du mouvement comme la somme de termes qui décrivent le mouvement képlérien indépendant des corps autour du Soleil, plus un terme (la fonction perturbatrice du chapitre 5) qui contient les termes liés aux perturbations induites par chacun des autres corps du Système solaire, selon les ordres de grandeur considérés. En général, on va exprimer les termes perturbateurs en fonction de « petits » paramètres du système, comme par exemple les rapports des masses des planètes à celle du Soleil, les excentricités, les inclinaisons, ce qui permet d'utiliser des développements en série (annexe C) pour intégrer à long terme les équations du mouvement.

7.1 Résonances

Si les perturbations sur les orbites képlériennes sont souvent petites, elles ne peuvent pas être ignorées. Elles doivent être incluses dans les éphémérides des planètes si une grande précision est requise, par exemple pour la navigation interplanétaire d'une sonde spatiale, ou encore pour des observations très fines comme la prédiction d'occultations stellaires (étude des atmosphères et des anneaux) ou l'étude des petits mouvements des planètes liés à leur structure interne (géodésie, gravimétrie, libration). La plupart des perturbations sont de nature périodique, leurs arguments oscillant avec les longitudes des corps célestes considérés, ou bien avec des combinaisons plus compliquées des éléments orbitaux.

De petites perturbations peuvent produire des effets prépondérants si elles contiennent des fréquences proches des fréquences naturelles des systèmes considérés. Dans de telles circonstances, les perturbations s'additionnent et s'amplifient de manière cohérente au lieu de se moyenner, au point que des conditions initiales arbitrairement proches ne seront pas suffisantes pour éviter une divergence des solutions du système au bout d'un certain temps.

Pendant très longtemps, les astronomes ont cherché à retrouver dans les mouvements des corps du Système solaire les périodicités qui leur permettaient de faire des prédictions, et jusque très récemment le mouvement des planètes dans le Système solaire était considéré comme le modèle même de régularité (d'où la notion de Cosmos). Les résultats de ces quarante dernières années, issus directement de l'approche en termes de systèmes dynamiques et de résonances, montrent au contraire que le mouvement des planètes lui-même est chaotique, et qu'il devient impossible de prévoir son évolution au-delà de 100 millions d'années environ, ce qui est très court comparé aux 4,6 milliards d'années d'existence du Système solaire.

Aujourd'hui, les « nouveaux » résultats acquis en mécanique céleste portent pour l'essentiel la marque des progrès réalisés dans la compréhension de la dynamique des systèmes gravitationnels, parmi lesquels on trouve le « bestiaire » des résonances entre les mouvements des corps célestes. La figure 7.1 présente quelques exemples des types de résonances que l'on trouve dans le Système solaire et au-delà.

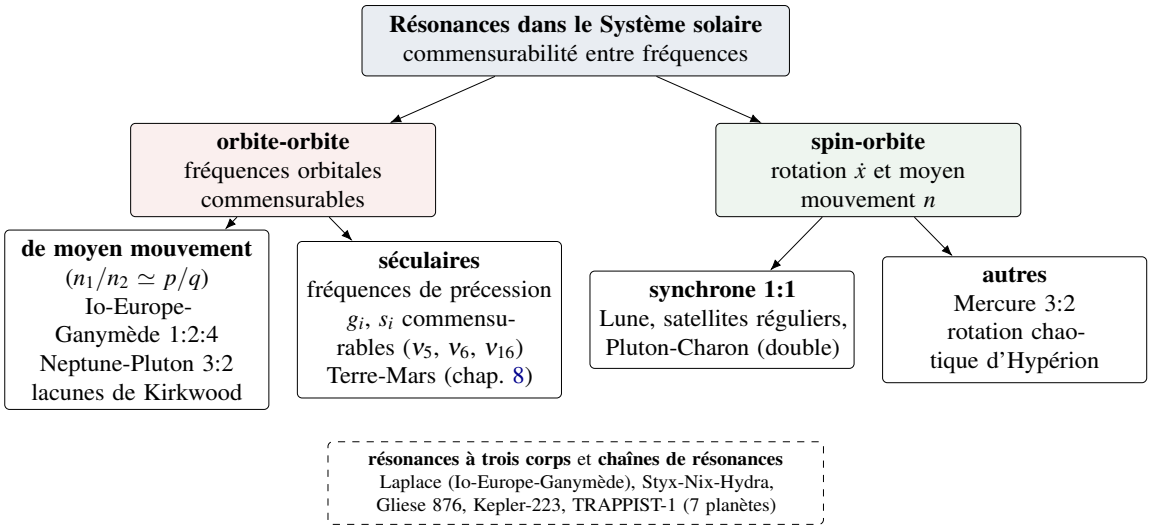
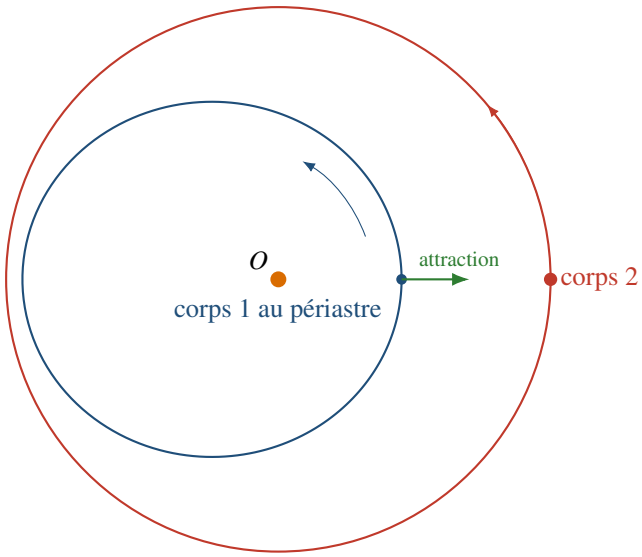


FIGURE 7.1 – Les différents types de résonances.

Une *résonance orbite-orbite* (ou résonance de moyen mouvement) se produit si deux objets célestes ont périodiquement les mêmes positions l'un par rapport à l'autre, de telle sorte que la force de gravitation réciproque tende à conserver la configuration de manière stable (résonance stable) au lieu de s'en écarter rapidement (cas d'une résonance instable), et ce même si cette force de gravitation mutuelle est beaucoup plus petite que la force de gravité entre le Soleil et chacun des objets. Dans le cas d'une résonance orbitale entre deux objets, un multiple de la période orbitale du premier objet est égal à un multiple de la période orbitale de l'autre objet : $qn_1 \simeq pn_2$, soit $n_1/n_2 \simeq p/q$, avec p et q entiers (figure 7.2).



Résonance de moyen mouvement p:q ($n_1/n_2 \simeq p/q$) : les conjonctions se produisent toujours au même endroit de l'orbite (ici près du périastre du corps interne) et les perturbations s'accumulent de façon cohérente au lieu de se moyenner. L'angle résonant $\phi = p\lambda_2 - q\lambda_1 - (p-q)\varpi_1$ oscille (libration) autour d'une valeur fixe.

FIGURE 7.2 – Le couplage orbite-orbite : en résonance de moyen mouvement, les conjonctions se répètent au même endroit des orbites, ici au périastre du corps interne, là où les deux orbites sont le plus éloignées ; la force mutuelle tend à maintenir cette configuration.

a) Résonances orbite-orbite dans le Système solaire. Les principales résonances concernant les planètes et les satellites sont les suivantes :

- 3:2 Neptune-Pluton : Pluton effectue deux révolutions autour du Soleil pendant que Neptune en

effectue trois, et la résonance (l'angle résonant $3\lambda_P - 2\lambda_N - \varpi_P$ libre autour de 180°) fait que les deux corps ne s'approchent jamais à moins de 17 UA, bien que l'orbite de Pluton croise celle de Neptune ; plusieurs centaines d'objets de la ceinture de Kuiper, les *plutinos*, partagent cette résonance ;

- 4:2 Mimas-Téthys (satellites de Saturne, résonance d'inclinaison), 2:1 Encelade-Dioné (résonance d'excentricité, responsable du chauffage de marée et des geysers d'Encelade), 4:3 Titan-Hypérion ;
- 1:2:4 Io-Europe-Ganymède (satellites de Jupiter), la *résonance de Laplace* : les moyens mouvements vérifient $n_1 - 3n_2 + 2n_3 = 0$ et l'angle $\lambda_1 - 3\lambda_2 + 2\lambda_3$ libre autour de 180°, de sorte que les trois satellites ne sont jamais en conjonction simultanée. Cette résonance entretient les excentricités forcées d'Io et d'Europe, et donc le volcanisme d'Io et l'océan d'Europe. Longtemps considérée comme unique, elle a depuis été observée dans les systèmes exoplanétaires (voir le complément ci-dessous) et, sous une forme différente, entre Styx, Nix et Hydra autour de Pluton.

b) Astéroïdes. Les astéroïdes situés aux points de Lagrange L_4 et L_5 du système Soleil-Jupiter sont capturés dans une résonance 1:1 avec Jupiter (on a vu pourquoi à la section 6.6). Le groupe des Hildas est quant à lui en résonance 3:2 avec Jupiter. Ces orbites sont stables. Toutefois, les résonances orbite-orbite instables avec Jupiter (résonances 4:1, 3:1, 5:2, 7:3, 2:1) causent les *lacunes de Kirkwood* dans la distribution des astéroïdes en fonction du demi-grand axe de leur orbite (figure 7.3) : un astéroïde qui s'y trouve voit son excentricité pompée de façon chaotique jusqu'à croiser l'orbite de Mars ou de la Terre. C'est le principal mécanisme d'alimentation de la population des astéroïdes géocroiseurs, et l'origine de la plupart des météorites.

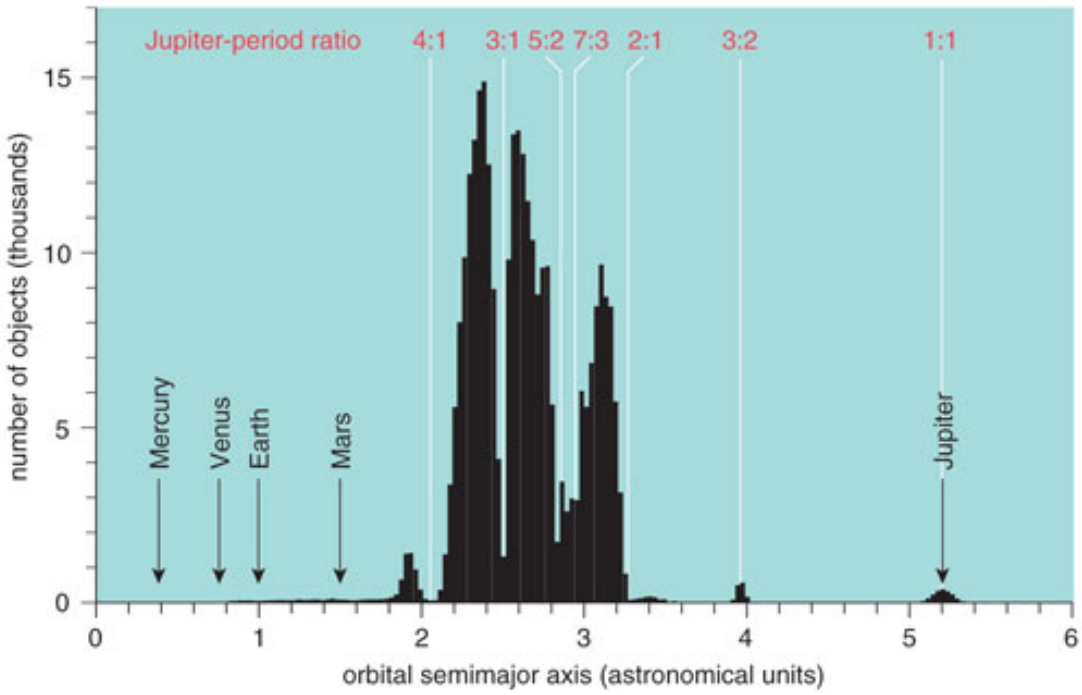


FIGURE 7.3 – Les lacunes de Kirkwood : nombre d'astéroïdes en fonction du demi-grand axe (données du Minor Planet Center, graphique Gareth Williams / MPC, Barbara Aulicino).

c) Résonances à plus de deux corps. On peut avoir également des résonances orbite-orbite entre plus de deux objets célestes, comme la résonance de Laplace évoquée ci-dessus : Io est en résonance 2:1 avec Europe, elle-même en résonance 2:1 avec Ganymède, et la relation à trois corps $n_1 - 3n_2 + 2n_3 = 0$ est vérifiée à mieux que 10^{-9} près.

Complément : chaînes de résonances exoplanétaires

Les résonances de moyen mouvement se révèlent fréquentes parmi les systèmes d'exoplanètes compactes découverts par les missions Kepler, TESS et par la vélocimétrie. Gliese 876 possède trois planètes dans une chaîne 1:2:4 de type Laplace ; Kepler-223 quatre planètes en chaîne 3:4:6:8 ; et TRAPPIST-1, naine rouge à 40 années-lumière, sept planètes de taille terrestre dont les périodes (1,51 ; 2,42 ; 4,05 ; 6,10 ; 9,21 ; 12,35 et 18,77 jours) forment une chaîne de résonances 8:5, 5:3, 3:2, 3:2, 4:3 et 3:2, avec trois angles de Laplace en libration [28]. Ces configurations sont la signature d'une *migration* des planètes dans le disque protoplanétaire : en se rapprochant de l'étoile à des vitesses différentes, les planètes sont capturées les unes après les autres dans des résonances, comme l'ont peut-être été les satellites galiléens, par migration dans le disque circumjovien ou sous l'effet des marées. La mesure des variations des instants de transit (TTV) dues à ces résonances permet de peser les planètes.

La modélisation des résonances orbite-orbite, si elle est très intéressante, utilise des développements assez fastidieux (le développement de la fonction perturbatrice en éléments orbitaux, [6] chapitre 6). Dans le cadre de ce cours, nous nous attacherons plutôt à comprendre l'autre type de couplage, le *couplage spin-orbite*, qui permet de répondre à des questions du type :

- pourquoi la Lune présente-t-elle toujours la même face à la Terre ?
- pourquoi la durée de révolution de Mercure est-elle phasée avec sa durée de rotation, la planète effectuant exactement 1,5 rotation par révolution ?
- comment décrire le mouvement de rotation du satellite de Saturne Hypérion ?

7.2 Le paradigme pendulaire en mécanique céleste

Dans cette section, nous traiterons un exemple simplifié et élémentaire de résonateur, qui est bien entendu le pendule simple. Comme nous le verrons, il sert de matrice pour la compréhension de nombreux problèmes. On reprend les notations de la section 3.8.1. On a déjà vu l'expression du lagrangien,

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1-\cos\theta). \tag{7.1}$$

Dans le formalisme hamiltonien, l'impulsion généralisée s'écrit, par définition, $p_\theta = \partial L/\partial\dot{\theta} = ml^2\dot{\theta}$. On peut réécrire l'énergie cinétique en fonction de p_θ, $T = p_\theta^2/(2ml^2)$, l'énergie potentielle étant inchangée, et on en déduit le hamiltonien classique du pendule

$$H(\theta, p_\theta) = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} + mgl(1-\cos\theta). \tag{7.2}$$

Les équations canoniques du système sont

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2}, \qquad \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta. \tag{7.3}$$

H ne dépendant pas du temps, il est conservé, et les trajectoires dans le plan de phase (θ, p_θ) sont les courbes de niveau de H. On retrouve ainsi le portrait de phase « classique » avec trois régimes (figure 7.4) :

- pour $H < 2mgl$, le pendule oscille autour de la position d'équilibre stable $\theta = 0$ (point *elliptique*) : régime de *libration*, quasi harmonique aux petites amplitudes, de plus en plus anharmonique quand l'amplitude croît ;
- pour $H > 2mgl$, le pendule tourne indéfiniment dans le même sens : régime de *circulation* ;
- pour $H = 2mgl$ exactement, la trajectoire est la *séparatrice*, qui joint les positions d'équilibre instables $\theta = \pm\pi$ (points *hyperboliques*) en un temps infini.

La largeur de la zone de libration, mesurée en p_θ au niveau du point elliptique, vaut $2\sqrt{2ml^2 \cdot 2mgl} = 4ml^2\omega$ avec $\omega = \sqrt{g/l}$: elle est proportionnelle à la racine carrée de l'amplitude du potentiel. Nous retrouverons cette propriété pour toutes les résonances.

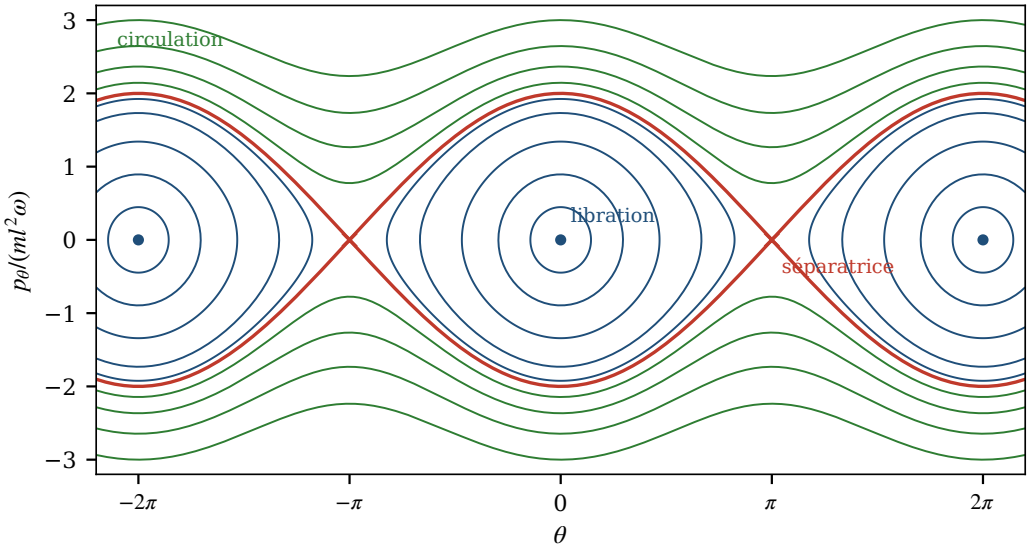


FIGURE 7.4 – Portrait de phase du pendule simple : libration (bleu), séparatrice (rouge) et circulation (vert).

On verra dans les sections suivantes que ce modèle est très utile pour comprendre le comportement de systèmes dynamiques célestes : au voisinage d'une résonance isolée, la dynamique se ramène, au premier ordre, à celle d'un pendule.

7.3 Le couplage spin-orbite : un problème de Kepler perturbé

On considère le système formé par une planète et son satellite, ou par une étoile et une de ses planètes. *Nous commencerons par exprimer l'énergie potentielle du satellite grâce au moment quadrupolaire. Puis nous établirons l'expression générale du hamiltonien du système associé, dans ce cas égal à l'énergie mécanique totale. Afin de déterminer la dynamique du système, nous utiliserons les théorèmes de simplification du hamiltonien pour montrer que la dynamique du système est aussi solution d'un hamiltonien simplifié. Enfin, le découplage des différentes parties du hamiltonien nous permettra de déterminer les différents cas possibles. Nous en déduirons la chaoticité de la rotation d'Hypérion d'une manière similaire à celle qui a été utilisée par Wisdom, Peale et Mignard dans leur article de 1984 [15]. Cet exemple permettra de montrer un des intérêts majeurs du formalisme hamiltonien : c'est un formalisme très bien adapté au traitement des problèmes intégrables perturbés.*

7.4 Mise en équation du problème

Considérons un système formé d'un corps central et d'un de ses satellites (figure 7.5). On fait l'approximation que le corps central est fixe dans un repère inertiel (sa masse m_S est très supérieure à celle du satellite, m_H) et l'on fait également l'approximation que le satellite est solide (pas de dissipation visqueuse, ce qui n'est qu'une approximation, surtout lorsque le « satellite » est une planète en partie fluide en orbite autour d'une étoile). On supposera enfin que la taille du satellite est très petite devant sa distance au corps central. Le mouvement du centre de masse G du satellite autour du corps central est appelé mouvement de *révolution* ; le mouvement du satellite autour de G est appelé mouvement de *rotation*. Il s'agit donc a priori d'un problème à six degrés de liberté (trois coordonnées et trois angles), c'est-à-dire d'espace des phases de dimension 12. Calculons les équations de ce mouvement.

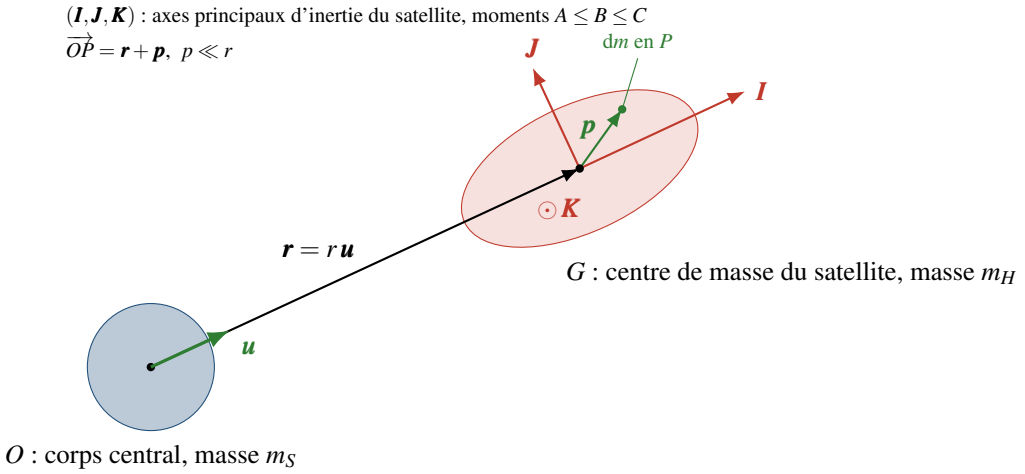


FIGURE 7.5 – Conventions de notation du couplage spin-orbite : O est le centre de masse du corps central (masse m_S), G celui du satellite (masse m_H), P un point courant du satellite de masse dm, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OG}$, $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{GP}$ et $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r}/r$.

7.5 Calcul du moment quadrupolaire

Dans ce paragraphe, nous établissons l'expression du potentiel créé par le satellite, développé à l'ordre quadrupolaire. Si l'on suppose que le satellite est un corps solide, on peut écrire que son énergie potentielle dans le champ de gravité créé par le corps central est

$$E_p = -Gm_S \int \frac{\mathrm{d}m}{OP} = m_S V, \qquad V = -G \int \frac{\mathrm{d}m}{OP}, \tag{7.4}$$

où G est la constante gravitationnelle (à ne pas confondre avec le centre de masse G du satellite, ni avec la variable de Delaunay G utilisée plus loin) et dm un élément de masse infinitésimale du satellite situé en P ; V est le potentiel créé par le satellite en O. Calculons tout d'abord la distance OP, avec $\overrightarrow{OP} = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{r} = r\,\boldsymbol{u}$:

$$OP^2 = (\boldsymbol{r}+\boldsymbol{p})^2 = r^2 + p^2 + 2\,\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p} \qquad \text{soit} \qquad \frac{1}{OP} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{p^2}{r^2} + 2\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{p}}{r}\right)^{-1/2}. \tag{7.5}$$

Développons maintenant cette expression en p/r avec la formule de Taylor, ce qui utilise l'hypothèse que la taille du satellite est très petite vis-à-vis de sa distance au corps central. Le développement à l'ordre 2 donne, avec $(1+\eta)^{-1/2} \simeq 1 - \eta/2 + 3\eta^2/8$:

$$\frac{1}{OP} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{p}}{r} - \frac{1}{2}\left(\frac{p}{r}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{p}}{r}\right)^2 + O\left(\frac{p}{r}\right)^3\right). \tag{7.6}$$

Ceci nous donne l'expression approchée du potentiel V :

$$V = -\frac{G}{r}\int \left(1 - \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{p}}{r} - \frac{1}{2}\left(\frac{p}{r}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{p}}{r}\right)^2\right)\mathrm{d}m. \tag{7.7}$$

Il reste à calculer l'intégrale. Il est évident que pour le premier et le deuxième terme sous l'intégrale nous avons

$$\int \mathrm{d}m = m_H, \qquad \int \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{p}}{r}\,\mathrm{d}m = \frac{\boldsymbol{u}}{r}\cdot\int \boldsymbol{p}\,\mathrm{d}m = 0, \tag{7.8}$$

puisque $\boldsymbol{p}$ prend son origine au centre de masse du satellite. Pour calculer les deux autres termes, on se place dans le repère des axes principaux d'inertie du satellite, que l'on note $(\boldsymbol{I},\boldsymbol{J},\boldsymbol{K})$. La matrice d'inertie du satellite dans ce repère est diagonale, $I_H = \mathrm{diag}(A,B,C)$, avec $A = \int (y^2+z^2)\,\mathrm{d}m$, $B = \int (x^2+z^2)\,\mathrm{d}m$ et

$C = \int (x^2+y^2)\,\mathrm{d}m$, en écrivant $\boldsymbol{p} = x\boldsymbol{I}+y\boldsymbol{J}+z\boldsymbol{K}$. On en déduit $\int x^2\,\mathrm{d}m = (B+C-A)/2$ et ses permutations circulaires, puis

$$\begin{aligned}\int p^2\,\mathrm{d}m &= \frac{A+B+C}{2},\\ \int (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{p})^2\,\mathrm{d}m &= \int (x\,\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{I}+y\,\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{J}+z\,\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{K})^2\,\mathrm{d}m\\ &= \frac{B+C-A}{2}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{I})^2+\frac{A+C-B}{2}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{J})^2+\frac{A+B-C}{2}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{K})^2,\end{aligned} \tag{7.9}$$

car les termes croisés en xy, xz et yz (produits d'inertie) sont nuls dans les axes principaux. En utilisant $(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{I})^2 = 1-(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{J})^2-(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{K})^2$, on obtient au final l'expression du potentiel quadrupolaire du satellite :

$$V = -\frac{Gm_H}{r}+\frac{G}{2r^3}\left[2A-B-C-3(A-B)(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{J})^2-3(A-C)(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{K})^2\right]. \tag{7.10}$$

Ce résultat est vrai pour un corps solide quelconque, quelle que soit sa forme, dès lors que $p \ll r$. Si l'on note $I = \int p^2\sin^2\psi\,\mathrm{d}m$ le moment d'inertie du satellite par rapport à la droite OG (ψ étant l'angle entre $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{p}$), il vient aussi l'expression plus symétrique, connue sous le nom de *formule de MacCullagh* (1844) :

$$V = -\frac{Gm_H}{r}-\frac{G(A+B+C-3I)}{2r^3}. \tag{7.11}$$

C'est aussi cette formule qui donne le terme J_2 du potentiel d'une planète aplatie : pour un corps de révolution $A = B$, on retrouve $J_2 = (C-A)/(m_H R^2)$.

Une fois obtenu le potentiel, on peut en déduire les composantes de la force gravitationnelle exercée par le corps central sur le satellite, $\boldsymbol{F} = -m_S\boldsymbol{\nabla}V$, ainsi que le *couple* exercé sur le satellite, dont les composantes dans les axes principaux sont

$$\boldsymbol{N} = \frac{3Gm_S}{r^3}\begin{pmatrix}(C-B)\,u_J u_K\\ (A-C)\,u_K u_I\\ (B-A)\,u_I u_J\end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad \boldsymbol{u} = u_I\boldsymbol{I}+u_J\boldsymbol{J}+u_K\boldsymbol{K}. \tag{7.12}$$

C'est le *couple de gradient de gravité*, qui tend à aligner l'axe de plus petit moment d'inertie ($\boldsymbol{I}$, le grand axe du satellite) sur la direction du corps central. Il est utilisé pour stabiliser passivement l'attitude de certains satellites artificiels (mâts de gradient de gravité).

7.6 Calcul du hamiltonien

De l'expression du potentiel quadrupolaire, on déduit immédiatement l'énergie potentielle du satellite,

$$E_p = -\frac{Gm_S m_H}{r}+\frac{Gm_S}{2r^3}\left[2A-B-C-3(A-B)(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{J})^2-3(A-C)(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{K})^2\right]. \tag{7.13}$$

L'énergie cinétique quant à elle s'écrit, d'après le théorème de König,

$$T = \frac{1}{2}m_H\dot{\boldsymbol{r}}^2+\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T I_H\boldsymbol{\omega}, \tag{7.14}$$

où $\boldsymbol{\omega}$ est la vitesse angulaire de rotation du satellite. On en tire le lagrangien du problème $L = T-E_p$ et, le système étant conservatif, le hamiltonien correspondant $H = T+E_p$:

$$H = \frac{1}{2}m_H\dot{\boldsymbol{r}}^2+\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T I_H\boldsymbol{\omega}-\frac{Gm_S m_H}{r}+\frac{Gm_S}{2r^3}\left[2A-B-C-3(A-B)(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{J})^2-3(A-C)(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{K})^2\right]. \tag{7.15}$$

7.7 Simplification du problème : le cas plan

Simplifions le problème pour nous concentrer sur les caractéristiques du mouvement du satellite qui nous intéressent. Considérons en première approximation que le satellite est un ellipsoïde qui tourne autour de son axe d'inertie maximal $\boldsymbol{K}$ (c'est l'état de rotation d'énergie minimale à moment cinétique donné, vers lequel la dissipation interne conduit tout corps solide). Considérons aussi que ce satellite a un mouvement plan autour du corps central, et enfin que ces deux mouvements de rotation et de révolution se font dans le même plan, l'axe $\boldsymbol{K}$ étant perpendiculaire au plan orbital (figure 7.6). On repère la rotation par l'angle x entre le grand axe $\boldsymbol{I}$ et une direction fixe du plan orbital, choisie suivant la direction initiale du périastre, et la révolution par l'anomalie vraie v.

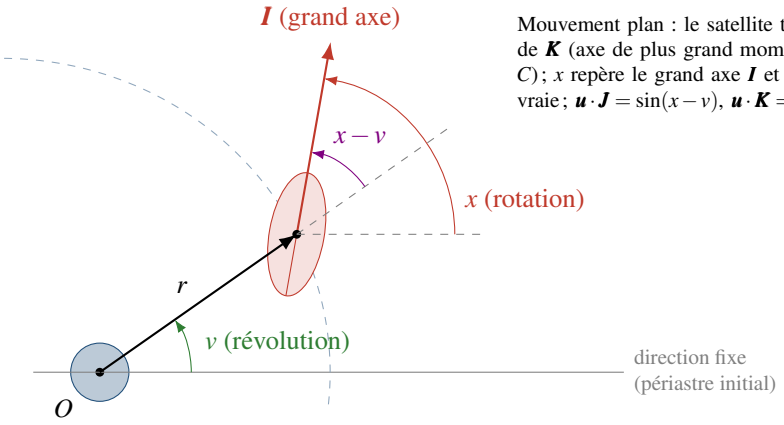


FIGURE 7.6 – Le modèle simplifié de couplage spin-orbite (mouvement plan) : v est l'angle de révolution (anomalie vraie), x l'angle de rotation du grand axe $\boldsymbol{I}$ du satellite, comptés depuis la direction fixe du périastre initial ; $x-v$ est l'angle entre le grand axe et la direction du corps central.

Appliquons ces simplifications aux résultats précédents. Puisque $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{K}=0$ et $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{J}=\sin(x-v)$, l'énergie potentielle est maintenant donnée par

$$E_p = -\frac{Gm_S m_H}{r} + \frac{Gm_S}{2r^3}\left[2A-B-C-3(A-B)\sin^2(x-v)\right], \tag{7.16}$$

et l'énergie cinétique se simplifie en $T=\frac{1}{2}m_H\dot{\boldsymbol{r}}^2+\frac{C}{2}\dot{x}^2$. Ceci nous donne un nouveau hamiltonien :

$$H = \frac{1}{2}m_H\dot{\boldsymbol{r}}^2 + \frac{C}{2}\dot{x}^2 - \frac{Gm_S m_H}{r} + \frac{Gm_S}{2r^3}\left[2A-B-C-3(A-B)\sin^2(x-v)\right]. \tag{7.17}$$

Ce nouveau problème est plus simple car il n'a plus que trois degrés de liberté : deux degrés de liberté pour le mouvement de révolution dans le plan, en (r,p_r,ϕ,p_ϕ) avec $p_r=m_H\dot{r}$ et $p_\phi=m_H r^2\dot{\phi}$ (moments P_r et P_ϕ de la section B.2, multipliés par la masse m_H), et un degré de liberté pour le mouvement de rotation en (x,p_x) avec $p_x=C\dot{x}$, sur le cercle. C'est maintenant un problème d'espace des phases de dimension 6.

7.8 Un problème de Kepler perturbé

En réordonnant les termes du hamiltonien de la manière suivante,

$$H = \underbrace{\frac{1}{2}m_H\dot{\boldsymbol{r}}^2 - \frac{Gm_S m_H}{r}}_{H_K} + \underbrace{\frac{C}{2}\dot{x}^2}_{H_R} + \underbrace{\frac{Gm_S}{2r^3}\left[2A-B-C-3(A-B)\sin^2(x-v)\right]}_{H_p}, \tag{7.18}$$

on identifie dans cette expression H_K, le hamiltonien képlérien (décrit à la section B.2), H_R, le hamiltonien de la rotation libre du satellite, et H_p, un hamiltonien perturbateur qui couple les deux. On note bien entendu que si $A=B=C$ (ellipsoïde d'inertie sphérique, ce qui est le cas d'un satellite à symétrie

sphérique), alors $H_p = 0$ et $H = H_K + H_R$: les deux mouvements sont découplés, la révolution est képlérienne et la rotation uniforme. Dans le cas contraire, il y a couplage des équations : non seulement les mouvements de révolution et de rotation du satellite deviennent couplés, mais son mouvement autour du corps central ne sera plus képlérien, tandis que sa rotation autour de son centre de gravité ne sera plus uniforme. En particulier, les caractéristiques du mouvement képlérien, à savoir une trajectoire conique de demi-grand axe et d'excentricité constants (cf. les calculs en annexe B.2), ne seront plus valables, et la vitesse de rotation ne sera plus constante. En effet, le demi-grand axe et l'excentricité se mettront à varier, ainsi que la vitesse de rotation, puisque les variables de Delaunay (annexe B.2.4) vont vérifier

$$\dot{L} = -\frac{\partial H}{\partial l} = -\frac{\partial H_p}{\partial l} \neq 0, \qquad \dot{G} = -\frac{\partial H}{\partial g} = -\frac{\partial H_p}{\partial g} \neq 0, \qquad \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial H_p}{\partial x} \neq 0. \tag{7.19}$$

En toute rigueur, l'angle $x - v$ qui figure dans H_p est $x - v - g$, où g est l'argument du périastre, compté depuis la direction fixe et nul à l'instant initial : c'est par lui que H_p dépend de g. Dans le cas général d'un corps réel, les termes qui perturbent ici le mouvement képlérien et la rotation uniforme sont non nuls. Les mouvements de rotation et de révolution sont donc couplés. Ceci est particulièrement vrai pour des satellites aux formes exotiques, tels que le satellite de Saturne Hypérion ($360 \times 266 \times 205$ km, figure 7.12).

Néanmoins, si on regarde le terme de couplage H_p, on remarquera que c'est un terme en $1/r^3$, de l'ordre de $Gm_S(B-A)/r^3$, alors que H_K est en $1/r$ et de l'ordre de $Gm_S m_H/r$: leur rapport est de l'ordre de $(B-A)/(m_H r^2) \sim (p/r)^2$, extrêmement petit. La variation des variables L et G (c'est-à-dire a et e) sera donc lente. À court terme, nous pourrons donc considérer le mouvement du satellite autour du corps central comme képlérien, et ainsi négliger l'influence du mouvement de rotation sur le mouvement de révolution.

Par contre nous ne pouvons pas négliger a priori H_p devant H_R, dont le rapport est de l'ordre de $(B-A)/C \times (n/\dot{x})^2$, qui n'est pas petit pour un corps allongé en rotation lente. Nous ne pouvons donc pas supprimer l'influence du mouvement de révolution sur le mouvement de rotation. Nous garderons donc dans l'étude de la rotation le hamiltonien complet $H_R + H_p$, mais en considérant que le mouvement de révolution du satellite est képlérien, et nous étudierons dans la suite le mouvement de rotation du satellite autour de lui-même, donné par le hamiltonien restant

$$\widetilde{H} = \frac{C}{2}\dot{x}^2 + \frac{3Gm_S}{2r^3(t)}(B-A)\sin^2(x - v(t))\,, \tag{7.20}$$

avec $r(t)$ et $v(t)$ les solutions du problème képlérien H_K (on a supprimé les termes indépendants de x, sans effet sur la dynamique de rotation). On a écrit ce terme avec $B - A \geq 0$, en supposant comme il est naturel que $\boldsymbol{I}$ est l'axe de plus petit moment d'inertie, c'est-à-dire le grand axe du satellite : l'énergie potentielle est minimale pour $x = v$, quand le grand axe pointe vers le corps central.

7.9 Étude de la rotation du satellite dans le couplage spin-orbite (modèle simplifié)

Désormais, nous pouvons considérer d'une part le mouvement de révolution du satellite comme résolu à court terme, puisqu'il s'agit alors d'un mouvement képlérien (voir la section B.2 pour sa résolution). D'autre part nous pouvons considérer le mouvement de rotation du satellite à court terme comme donné par le hamiltonien de rotation uniforme perturbé $\widetilde{H}$.

Ce nouveau problème est maintenant beaucoup plus simple puisqu'il est à un seul degré de liberté $(x, \dot{x})$. Il est cependant non autonome, c'est-à-dire dépendant du temps, à travers les variables périodiques $r(t)$ et $v(t)$. Simplifions maintenant au maximum ce nouveau hamiltonien et cherchons à résoudre le mouvement en $(x, \dot{x})$. En développant le terme en $\sin^2(x - v)$, $\widetilde{H}$ se réécrit, à un terme indépendant de x près,

$$\widetilde{H} = \frac{C}{2}\dot{x}^2 - \frac{3Gm_S}{4r^3(t)}(B-A)\cos 2(x - v(t))\,. \tag{7.21}$$

Pour obtenir une expression simple en fonction du temps t, nous allons développer $r(t)$ et $v(t)$ en séries de l'anomalie moyenne M (ces calculs sont un peu fastidieux, cf. l'annexe C.3). De plus, si l'on suppose que l'orbite du satellite a une excentricité faible (ce qui est vrai dans le cas général), nous pouvons encore simplifier cette écriture en développant les séries obtenues en puissances de l'excentricité. Avant tout calcul, remarquons d'abord que

$$\frac{\cos 2(x-v(t))}{r^3(t)} = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\,\frac{\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}v(t)}}{r^3(t)}\right). \tag{7.22}$$

Maintenant, par le moyen d'un calcul long et fastidieux à la main, ou rapide et facile avec un manipulateur algébrique (comme TRIP par exemple, développé par l'IMCCE de l'Observatoire de Paris [5], ou tout logiciel de calcul formel), on obtient au premier ordre en e, en prenant le moyen mouvement pour unité de fréquence de sorte que $M = t$ (une révolution dure 2π) :

$$\frac{a^3}{r^3(t)}\cos 2(x-v(t)) = \cos 2(x-t) - \frac{e}{2}\cos(2x-t) + \frac{7e}{2}\cos(2x-3t) + O(e^2). \tag{7.23}$$

On obtient ainsi l'expression approchée du hamiltonien $\widetilde{H}$:

$$\widetilde{H} \simeq \frac{C}{2}\dot{x}^2 - \frac{3Gm_S}{4a^3}(B-A)\left[\cos 2(x-t) + e\left(-\frac{1}{2}\cos(2x-t) + \frac{7}{2}\cos(2x-3t)\right)\right]. \tag{7.24}$$

Ce qui donne finalement, quand on pose $\varepsilon = \frac{3Gm_S}{4a^3}\,\frac{B-A}{C} = \frac{3}{4}n^2\,\frac{B-A}{C}$ et que l'on divise le hamiltonien par C (ce qui revient à prendre $C = 1$; on note alors $p_x = \dot{x}$ le moment conjugué de x), le hamiltonien approché de la rotation du satellite :

$$\boxed{\widetilde{H} \simeq \frac{p_x^2}{2} - \varepsilon\cos 2(x-t) - \varepsilon e\left(-\frac{1}{2}\cos(2x-t) + \frac{7}{2}\cos(2x-3t)\right)} \tag{7.25}$$

Le paramètre $\varepsilon = \omega_0^2/4$, où $\omega_0 = n\sqrt{3(B-A)/C}$ est la pulsation des petites oscillations de libration, mesure l'asymétrie du satellite : il vaut $\varepsilon \simeq 1{,}7\cdot 10^{-4}$ pour la Lune, $7\cdot 10^{-5}$ pour Mercure et environ 0,2 pour Hypérion.

7.10 Intégration du mouvement de rotation

Intégrons maintenant, quand c'est possible, le mouvement de rotation du satellite dans différents cas. Les figures qui suivent sont des *sections stroboscopiques* (ou sections de Poincaré) : on intègre numériquement les équations de Hamilton associées à (7.25) pour de nombreuses conditions initiales, et l'on reporte dans le plan $(x-t, \dot{x})$ l'état du système à chaque passage au périastre, $t = 2\pi k$. Une trajectoire régulière (quasi périodique) dessine une courbe, une trajectoire chaotique remplit une surface.

Premier cas : $\varepsilon = 0$. Dans ce cas l'ellipsoïde d'inertie du satellite est de révolution autour de $\boldsymbol{K}$ ($A = B$, ce qui est le cas d'un corps de révolution), et on retrouve une dynamique de rotation uniforme. En effet le hamiltonien devient $\widetilde{H} = p_x^2/2$, donc

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial x} = 0, \qquad \dot{x} = \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial p_x} = p_x = \text{cste}. \tag{7.26}$$

La rotation du satellite est uniforme, de vitesse angulaire constante p_x : $x = p_x t + x_0$, et toutes les vitesses de rotation sont possibles. Ces trajectoires sont des droites horizontales dans l'espace des phases (figure 7.7).

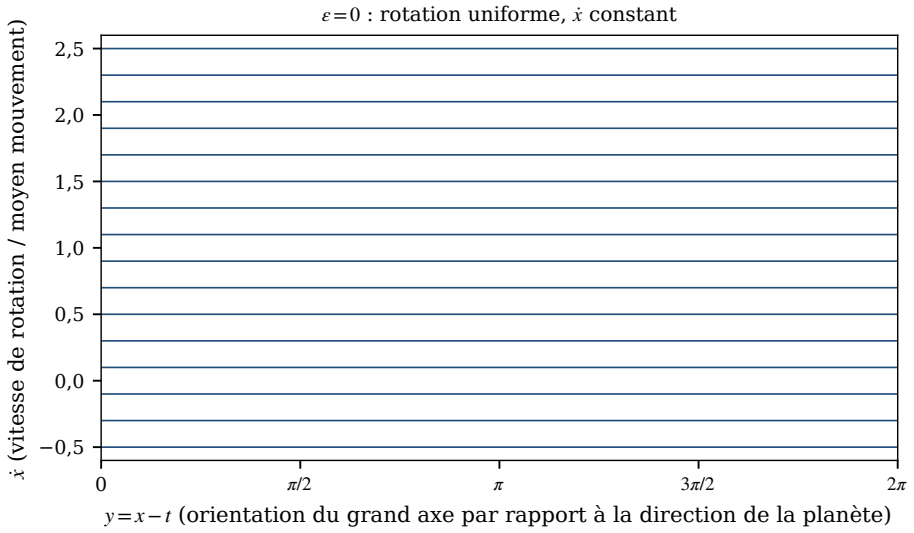


FIGURE 7.7 – Espace des phases de la rotation du satellite, $\varepsilon = 0$.

Deuxième cas : $e = 0$. Dans ce cas, le satellite a un mouvement de révolution circulaire autour du corps central. Le hamiltonien devient quasiment le hamiltonien d'un pendule :

$$\widetilde{H} = \frac{p_x^2}{2} - \varepsilon \cos 2(x-t). \tag{7.27}$$

Pour se rapprocher du hamiltonien d'un pendule, on a envie de faire le changement de variable $y = x - t$. Ici on peut utiliser la méthode habituelle des fonctions génératrices en introduisant une fonction $G_2(x, p_y, t)$ par exemple, qui transforme $\widetilde{H}$ en le hamiltonien d'un pendule classique, et on en déduit le changement de variable par la méthode d'Hamilton-Jacobi (annexe A).

Cependant une astuce bien connue dans ces situations simples peut nous épargner ces longs calculs. Il suffit de remarquer que chercher un couple (x, p_x) solution du système non autonome $\widetilde{H} = p_x^2/2 - \varepsilon \cos 2(x-t)$ est équivalent à chercher deux couples de variables (x, p_x) et (t, K) solutions du système autonome à deux degrés de liberté $H' = p_x^2/2 - \varepsilon \cos 2(x-t) + K$. En effet dans les deux cas, les trois variables communes x, p_x et t vérifient les mêmes équations. Pour x et p_x c'est évident (dans les deux cas $\dot{x} = p_x$ et $\dot{p}_x = -2\varepsilon \sin 2(x-t)$). Pour t c'est aussi vrai puisque dans le premier cas $\dot{t} = 1$, tout comme dans le deuxième cas $\dot{t} = \partial H'/\partial K = 1$.

Cherchons donc le changement de variable qui réalise $y = x - t$ dans ce nouveau système autonome. Quitte à choisir un changement de variable, autant en choisir un simple : prenons un changement de variable linéaire. D'après le deuxième exemple de la section A.1, il suffit de trouver deux constantes c et d telles que

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ c & d \end{pmatrix}}_{\mathscr{A}} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \left(\mathscr{A}^{\mathsf{T}}\right)^{-1} \begin{pmatrix} p_x \\ K \end{pmatrix}. \tag{7.28}$$

Par souci de simplicité, on choisit $c = 0$ et $d = 1$, d'où $z = t$, $p_y = p_x$ et $p_z = p_x + K$. On obtient donc dans le nouveau jeu de variables (y, z, p_y, p_z) le hamiltonien $H' = p_y^2/2 - \varepsilon \cos 2y + p_z - p_y$, soit, en complétant le carré,

$$H' = \frac{(p_y - 1)^2}{2} - \varepsilon \cos 2y + p_z - \frac{1}{2}. \tag{7.29}$$

Ici p_z est constant (z n'apparaît pas dans H'), il ne change donc pas la dynamique et on peut l'absorber dans H' sans changer les équations. Enfin, en faisant le changement de variable canonique $I = p_y - 1$ (une translation), on obtient bien le hamiltonien du pendule, à « double fréquence » :

$$\boxed{H = \frac{I^2}{2} - \varepsilon \cos 2y} \qquad y = x - t, \quad I = \dot{x} - 1. \tag{7.30}$$

La variable y est l'angle entre le grand axe du satellite et la direction du corps central, et I l'écart entre la vitesse de rotation et le moyen mouvement. Intégrons ses trajectoires numériquement et traçons-les dans l'espace des phases $(y, \dot{x})$ (figure 7.8).

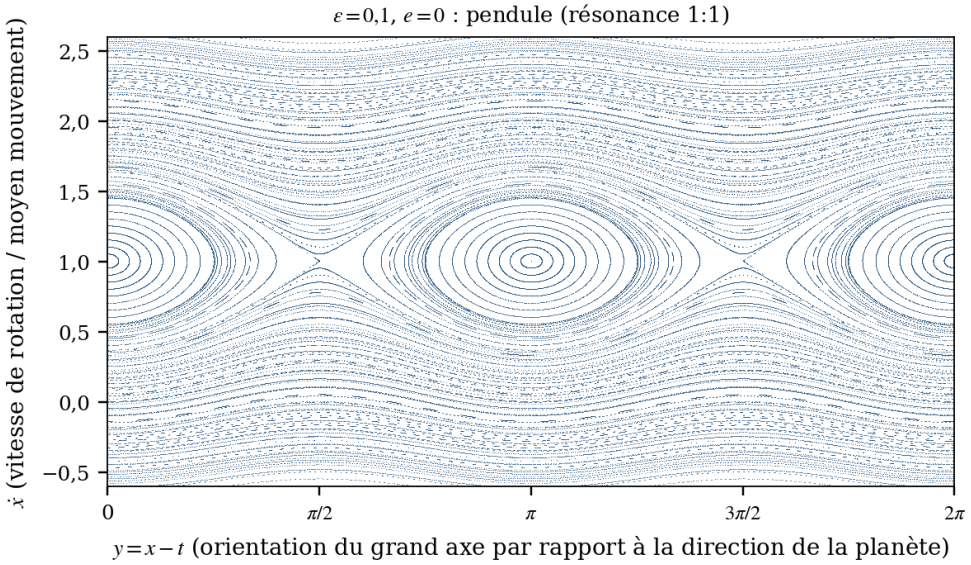


FIGURE 7.8 – Espace des phases de la rotation d'un satellite en couplage spin-orbite, $\varepsilon = 0{,}1$ et $e = 0$.

On retrouve ici bien sûr l'espace des phases du pendule (double, puisque le potentiel $-\varepsilon \cos 2y$ a deux minima sur un tour, $y = 0$ et $y = \pi$: les deux extrémités du grand axe sont équivalentes). On parle alors de *résonance*. On dira que le mouvement de rotation du satellite est en résonance avec son mouvement de révolution lorsque les conditions initiales du mouvement du satellite sont telles que son mouvement de rotation est compris dans l'une des deux zones centrales (peuplées de courbes fermées) de l'espace des phases : les *zones de libration*. Dans ce cas, la vitesse angulaire de rotation du satellite est quasi égale à sa vitesse angulaire de révolution, et le grand axe oscille autour de la direction du corps central : c'est la *rotation synchrone*, celle de la Lune.

On conclut de cette première analyse que, chaque fois qu'on a $A \neq B$, il existera des zones de résonance : les zones de libration. Si les conditions initiales du mouvement du satellite sont telles que le mouvement de rotation se trouve dans une de ces zones, alors la rotation sera en résonance avec la révolution et les deux mouvements auront des vitesses angulaires quasi identiques.

Remarque 1. Ceci peut arriver souvent, car la taille de la zone de libration n'est pas nulle. En effet, l'énergie de la trajectoire séparatrice, qui passe par les points hyperboliques $(y = \pm\pi/2, I = 0)$, est $H = \varepsilon$. Or $H = I^2/2 - \varepsilon \cos 2y$, donc pour $y = 0$ la séparatrice passe par $I = \pm 2\sqrt{\varepsilon}$. La largeur totale de la zone de résonance, en vitesse de rotation, est donc $4\sqrt{\varepsilon} = 2\omega_0/n$: elle croît comme la racine carrée de l'asymétrie du satellite. On vérifie bien sur la figure 7.9 que la taille de la zone de libration augmente avec ε (de $\pm 0{,}63$ à $\pm 0{,}89$ autour de $\dot{x} = 1$ entre $\varepsilon = 0{,}1$ et $0{,}2$).

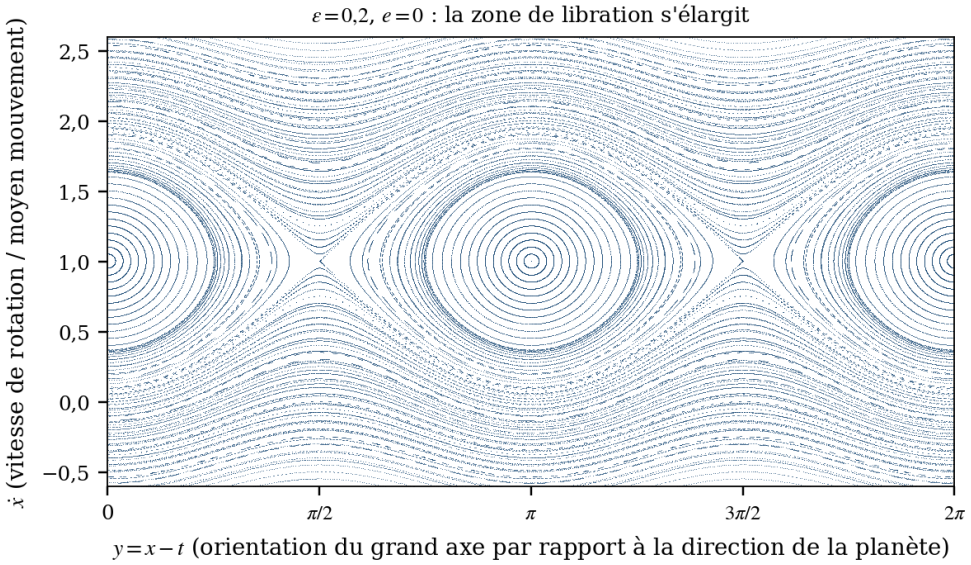


FIGURE 7.9 – Espace des phases de la rotation d'un satellite en couplage spin-orbite, $\varepsilon = 0{,}2$ et $e = 0$.

Remarque 2. Le pendule est le modèle générique des résonances : il représente localement toutes les résonances, sauf celles qui existent dans les systèmes à plus de deux degrés de liberté où entrent en résonance plus de deux fréquences.

Remarque 3. L'état final couplé (où la période de rotation et la période de révolution du satellite sont dans un rapport rationnel simple) représente en fait l'état final résonant pour les couples planète-satellite décrits dans l'introduction de ce paragraphe. Pour le couple Terre-Lune, il s'agit d'un couplage 1:1 ; c'est aussi le cas de presque tous les satellites réguliers des planètes géantes (Hypérion, étudié plus loin, fait exception), de Pluton et Charon (chacun présentant toujours la même face à l'autre) et probablement de la plupart des exoplanètes proches de leur étoile. Mais en fonction des paramètres ε et e, ainsi que des caractéristiques liées à la dissipation interne de l'énergie que nous avons négligée, l'état final peut être différent, comme par exemple le couplage 3:2 de Mercure autour du Soleil : l'excentricité élevée de Mercure ($e = 0{,}206$) rend la résonance 3:2 (le terme en $\cos(2x-3t)$ du hamiltonien (7.25)) plus attractive que la résonance synchrone pour le freinage de marée.

Troisième cas : le cas général, $\varepsilon \neq 0$ et $e \neq 0$. Dans ce cas général, le problème est réellement à deux degrés de liberté (ou un degré et demi, comme on dit parfois pour un système à un degré de liberté forcé périodiquement). Il n'est plus intégrable. Les termes en $\cos(2x-t)$ et $\cos(2x-3t)$ du hamiltonien (7.25) créent deux nouvelles résonances, de vitesses de rotation moyennes $\dot{x} = 1/2$ et $\dot{x} = 3/2$ (résonances 1:2 et 3:2). Tant qu'elles restent séparées de la résonance synchrone, c'est-à-dire pour $2\sqrt{\varepsilon} \ll 1/2$, leurs largeurs valent $4\sqrt{\varepsilon e/2}$ et $4\sqrt{7\varepsilon e/2}$; pour $\varepsilon = 0{,}2$, la zone de libration synchrone s'étend déjà de $\dot{x} \simeq 0{,}1$ à 1,9 et ces deux résonances n'apparaissent sur les sections qu'en bordure de cette zone. Les trajectoires séparatrices ne joignent plus les points hyperboliques, et il y a apparition de chaos au voisinage de ces points, comme on le voit sur la figure 7.10.

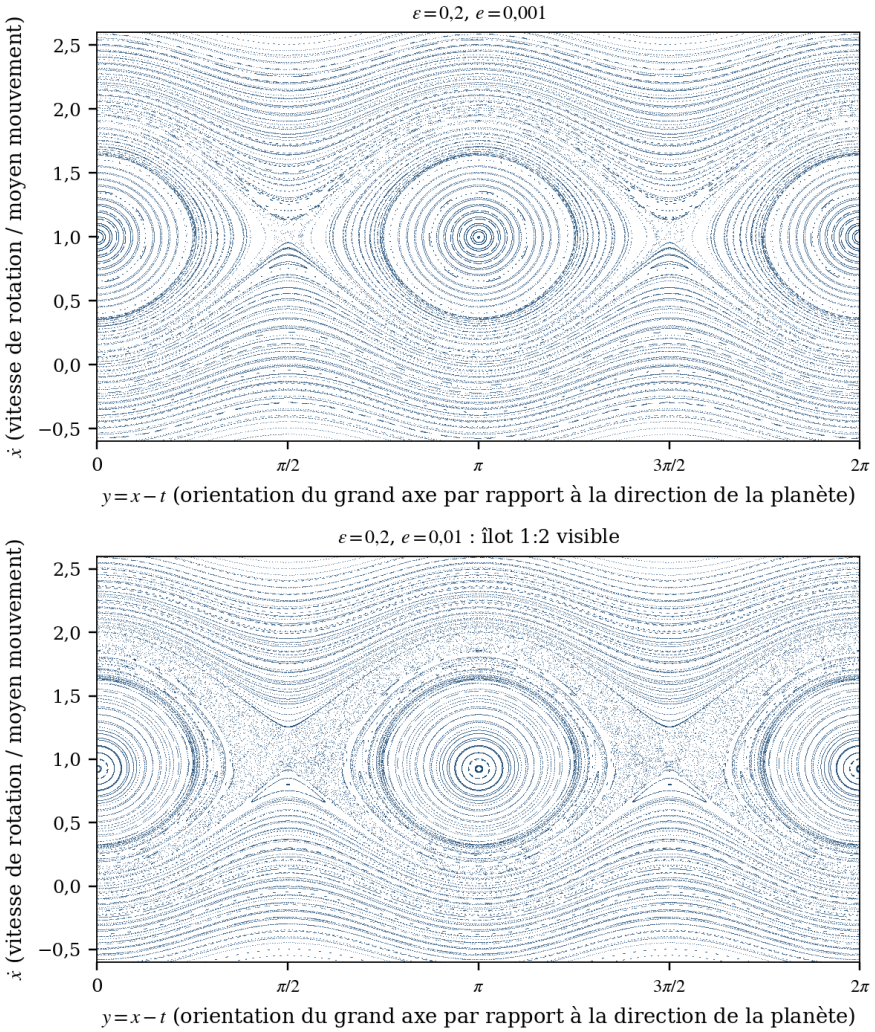


FIGURE 7.10 – Sections stroboscopiques de la rotation d'un satellite en couplage spin-orbite, $\varepsilon = 0{,}2$ et $e = 0{,}001$ (en haut), $e = 0{,}01$ (en bas). Un petit îlot de résonance 1:2 apparaît sous les points hyperboliques ($y = \pi/2$ et $3\pi/2$, $\dot{x} \simeq 0{,}8$) et une fine couche chaotique entoure les séparatrices ; l'îlot de la résonance 3:2, minuscule et collé à la zone synchrone (vers $\dot{x} \simeq 1{,}9$ en $y = 0$), n'est pas visible à cette échelle.

De plus, même avec une faible perturbation, il ne subsiste plus d'ensemble continu de trajectoires régulières, pas même dans la zone de circulation, bien que ce ne soit pas évident à l'œil nu. Les trajectoires régulières deviennent isolées et il apparaît, au milieu des anciens domaines de trajectoires régulières, d'autres résonances plus petites (c'est le contenu du théorème KAM, de Kolmogorov, Arnold et Moser, et du théorème de Poincaré-Birkhoff). On peut noter néanmoins que pour des perturbations faibles, les trajectoires régulières subsistantes limitent le chaos, qui reste confiné dans de fines couches autour des séparatrices. Ceci apparaît nettement sur la figure 7.10.

En revanche, pour de fortes perturbations, les couches chaotiques des différentes résonances se recouvrent (critère de Chirikov) et le chaos se généralise : il ne reste des trajectoires régulières qu'au voisinage très proche des centres des résonances ou aux frontières de la zone de circulation (figure 7.11). *Le mouvement de rotation du satellite n'est plus prévisible, même à court terme. On parle de rotation chaotique.* Ce phénomène, loin d'être exceptionnel, existe dans le Système solaire. La figure 7.11 applique les paramètres dynamiques du couple Saturne-Hypérion ($\varepsilon = 0{,}2$ et $e = 0{,}1$) au modèle que nous avons décrit. Pour une excentricité aussi forte, ce modèle, tronqué au premier ordre en e, n'est qu'indicatif : le terme d'ordre 2 négligé en $\cos(2x - 4t)$ (résonance 2:1), d'amplitude $\frac{17}{2}\varepsilon e^2 = 0{,}085\,\varepsilon$, dépasse le terme conservé de la résonance 1:2, d'amplitude $\frac{1}{2}\varepsilon e = 0{,}05\,\varepsilon$.

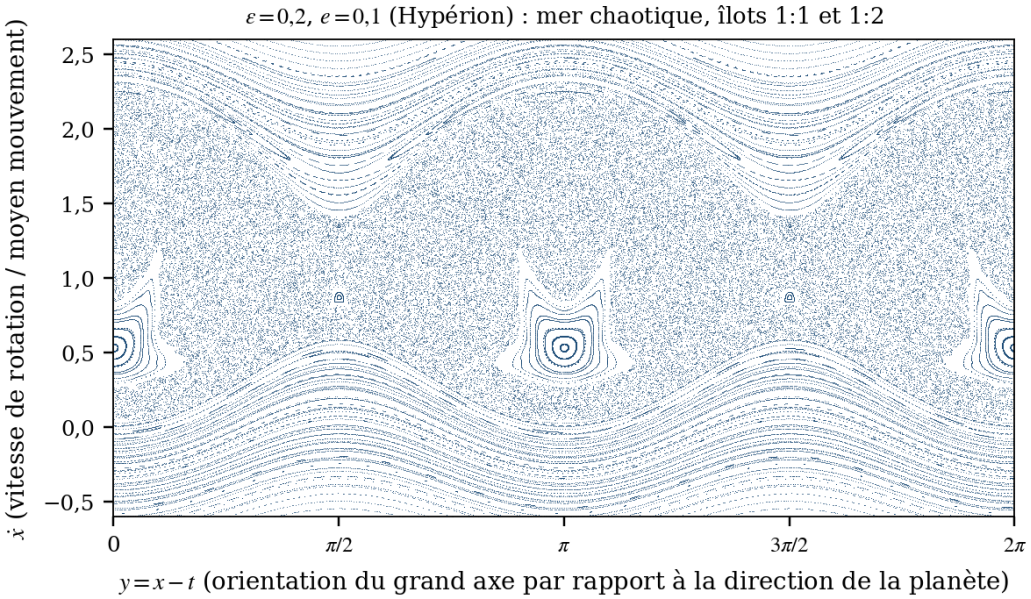


FIGURE 7.11 – Section stroboscopique de la rotation d'Hypérion, $\varepsilon = 0{,}2$ et $e = 0{,}1$: une vaste zone chaotique entoure l'îlot de la rotation synchrone (en $y = 0$ et $y = \pi$, centré vers $\dot{x} \simeq 0{,}55$ et non 1, car la libration forcée est grande et la section est prise au périastre) et un petit îlot 1:2 (en $y = \pi/2$ et $3\pi/2$, $\dot{x} \simeq 0{,}87$) ; l'îlot 3:2 a disparu.

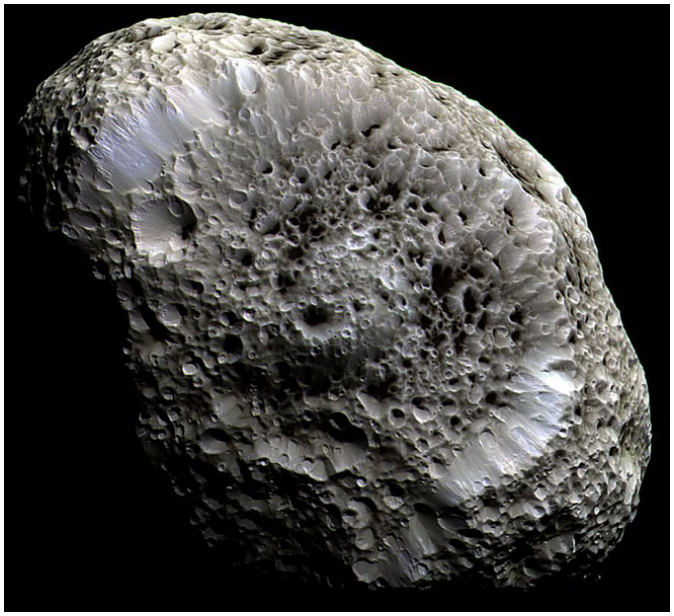


FIGURE 7.12 – Hypérion, satellite de Saturne ($360 \times 266 \times 205$ km), photographié par la sonde Cassini en 2005 : sa forme très irrégulière, donc son moment quadrupolaire $(B-A)/C \simeq 0{,}26$, et l'excentricité de son orbite ($e = 0{,}1$) en font le cas d'école de la rotation chaotique (crédit : NASA/JPL/Space Science Institute).

Nous venons de voir que le mouvement de rotation d'Hypérion est un mouvement chaotique, qui se trouve dans la région chaotique voisine des points instables de sa résonance 1:1 spin-orbite. Wisdom, Peale et Mignard ont de plus montré [15] que dans cette zone la rotation synchrone est également instable vis-à-vis des basculements de l'axe de rotation : Hypérion culbute de façon imprévisible, ce que les observations de Voyager 2, puis de Cassini et des courbes de lumière depuis le sol ont confirmé (le temps de Liapounov est de l'ordre de quelques dizaines de jours). Ceci nous a permis de comprendre l'intérêt du modèle générique de pendule. Ceci nous a permis aussi de montrer l'apparition du chaos dans un problème de mécanique céleste. L'apparition de régions chaotiques au voisinage de résonances est un phénomène extrêmement répandu, et le même mécanisme de recouvrement de résonances explique les

lacunes de Kirkwood, la diffusion chaotique des comètes et, comme on va le voir, le chaos des orbites planétaires elles-mêmes.

8 Perspectives : le chaos dans le Système solaire

De la même manière, les couplages orbite-orbite font apparaître des comportements similaires, mais à des échelles de temps beaucoup plus longues. Dans le cas des planètes, les résonances qui importent ne sont pas des résonances de moyen mouvement (les périodes des planètes ne sont pas commensurables, à l'exception de la quasi-résonance 5:2 entre Jupiter et Saturne, la « grande inégalité » déjà étudiée par Laplace) mais des *résonances séculaires* entre les fréquences de précession des périhélies (g_i) et des nœuds (s_i) des orbites, dont les périodes sont de quelques dizaines de milliers à quelques millions d'années. La figure 8.1 présente par exemple l'argument critique $\theta = 2(\varpi_4 - \varpi_3) - (\Omega_4 - \Omega_3)$ de la résonance séculaire $2(g_4 - g_3) - (s_4 - s_3) \simeq 0$ entre la Terre (indice 3) et Mars (indice 4), où ϖ_i et Ω_i désignent les phases des termes de fréquences g_i (périhélies) et s_i (nœuds) de la solution séculaire. Calculé par Laskar sur 200 millions d'années, cet argument passe alternativement de la libration à la circulation, signature de la traversée chaotique d'une résonance séculaire.

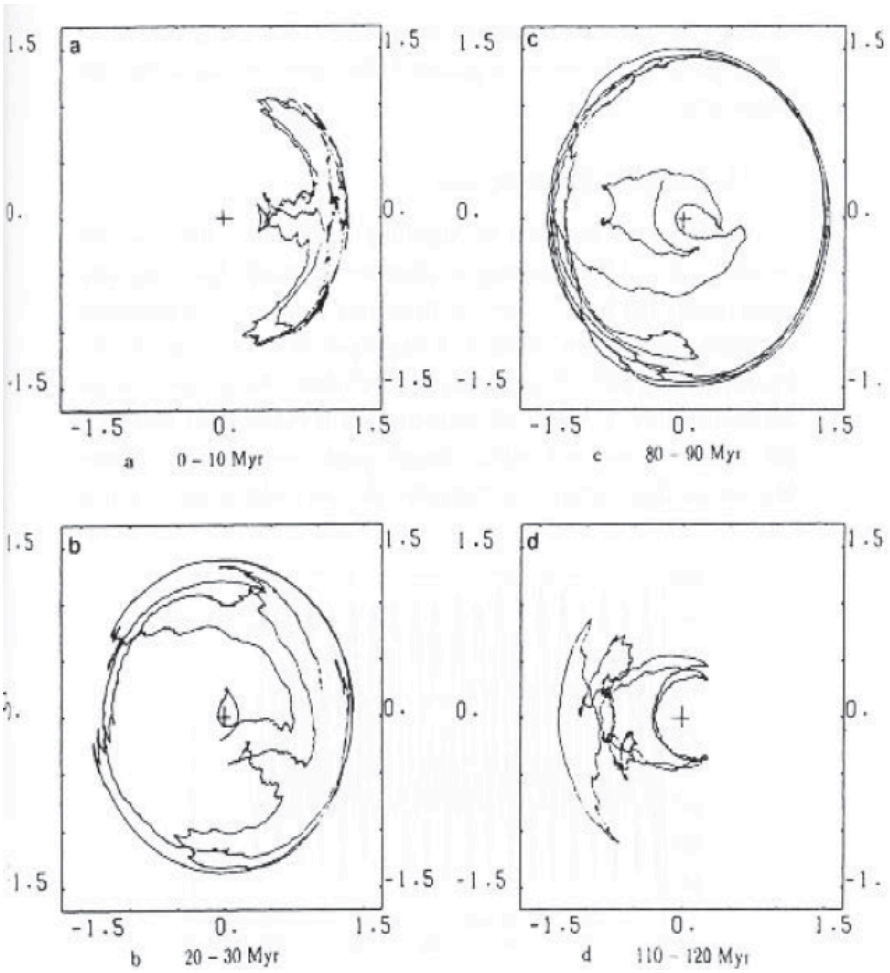


FIGURE 8.1 – Argument critique $\theta = 2(\varpi_4 - \varpi_3) - (\Omega_4 - \Omega_3)$ de la résonance séculaire Terre-Mars, représenté en coordonnées polaires (angle polaire θ) sur quatre intervalles de 10 millions d'années : libration (a, d : la courbe n'entoure pas l'origine) ou circulation (b, c) selon l'époque. D'après Laskar (1990, *Icarus* 88, 266).

Le terme perturbateur est dans ce cas bien inférieur, aussi les phénomènes de chaos se manifestent-ils à des horizons temporels bien supérieurs. Toutefois, ces phénomènes deviennent dominants passé

100 millions d'années, au point qu'il est impossible de déterminer la position des planètes au-delà de cet horizon temporel. Non que l'on soit incapable de faire les calculs ou que l'on se heurte à des problèmes numériques, mais le système dynamique amplifie de façon exponentielle toute incertitude sur les conditions initiales : $|\delta Z(t)| \simeq |\delta Z_0| \, e^{\lambda t}$, avec un temps de Liapounov $1/\lambda$ de l'ordre de 4 à 5 millions d'années (figure 8.2). Une erreur de 15 m sur la position initiale de la Terre devient 150 m au bout de 10 millions d'années, 1 500 km au bout de 50 millions d'années et 150 millions de kilomètres, une unité astronomique, au bout de 100 millions d'années. Les positions (phases orbitales) des planètes ne sont plus déterminables au-delà de 100 millions d'années : on a perdu le déterminisme pratique, on parle alors de *chaos déterministe*.

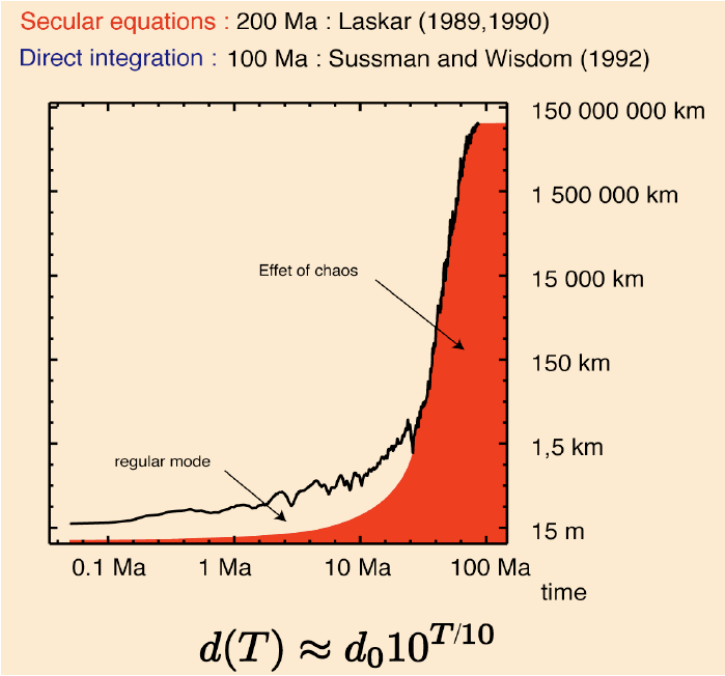


FIGURE 8.2 – Croissance de l'erreur sur la position de la Terre en fonction du temps, d'après l'intégration des équations séculaires par Laskar (1989, 1990) sur 200 millions d'années et l'intégration directe de Sussman et Wisdom (1992) sur 100 millions d'années : dans le régime chaotique, l'erreur est multipliée par 10 tous les 10 millions d'années, $d(T) \simeq d_0 \, 10^{T/10\,\mathrm{Ma}}$.

Ce résultat, obtenu par Laskar en 1989 [16] par l'intégration numérique de son système séculaire moyenné (150 000 termes polynomiaux, obtenus avec le manipulateur algébrique TRIP), puis confirmé par l'intégration directe des équations du mouvement par Sussman et Wisdom [19], a profondément changé notre vision du Système solaire. Il a depuis été précisé de plusieurs manières.

- Le chaos est essentiellement porté par les planètes intérieures. Les orbites des planètes géantes, elles, restent très régulières : leurs *fréquences* séculaires sont stables sur des milliards d'années, même si leurs *phases* finissent par être perdues elles aussi.
- L'obliquité des planètes est également sujette au chaos : Laskar et Robutel (1993) ont montré que l'obliquité de Mars varie de façon chaotique entre 0° et 60° sur des dizaines de millions d'années, ce qui a des conséquences majeures sur son climat passé (dépôts glaciaires aux basses latitudes), tandis que l'obliquité de la Terre, stabilisée par la présence de la Lune, ne varie que d'environ $\pm 1{,}3°$.
- Laskar et Gastineau ont montré en 2009 [18], par 2501 intégrations directes sur 5 milliards d'années, que l'excentricité de Mercure peut être pompée par une résonance séculaire avec Jupiter ($g_1 - g_5$) jusqu'à des valeurs proches de 1 dans environ 1 % des cas, conduisant à une collision avec Vénus ou le Soleil, ou à une déstabilisation de l'ensemble du Système solaire interne pouvant aller jusqu'à

une collision entre Mars ou Vénus et la Terre. Le Système solaire est donc *marginalement stable* : la probabilité d'un événement catastrophique avant la fin de vie du Soleil est faible mais non nulle.

- En sens inverse, le caractère quasi périodique des mouvements des planètes sur quelques dizaines de millions d'années permet de calibrer les échelles de temps géologiques (cyclostratigraphie) à partir des cycles climatiques de Milankovitch qu'elles impriment dans les sédiments ; la limite de 50 à 60 millions d'années au-delà de laquelle la solution orbitale n'est plus valide (Laskar *et al.* 2004, 2011) est aujourd'hui une contrainte bien connue des géologues.

Ainsi, en moins de quarante ans, la mécanique céleste est passée d'une science de la régularité, presque achevée aux yeux de ses propres praticiens, à l'une des sciences les plus vivantes de la dynamique non linéaire, dont les outils (théorie KAM, cartes de fréquence, variétés invariantes, intégrateurs symplectiques) irriguent en retour la conception des missions spatiales, l'étude des systèmes exoplanétaires et la physique des accélérateurs de particules. C'est cette continuité entre les problèmes les plus classiques et les questions les plus ouvertes que ce cours a voulu suggérer.

Annexe A : Changements de coordonnées canoniques

A.1 Coordonnées canoniques et transformations canoniques

L'objet de cette annexe est de déterminer quelles sont les transformations que l'on peut faire sur les variables p et q tout en laissant au système hamiltonien sa forme simple et pratique. On appelle cette classe de transformations les transformations canoniques.

Le choix des coordonnées généralisées q n'est limité par aucune condition si ce n'est qu'elles doivent définir de façon univoque la position du système dans l'espace. L'aspect formel des équations de Lagrange (3.53) ne dépend pas de ce choix, et dans ce sens on peut dire que les équations de Lagrange sont invariantes par rapport à la transformation qui fait passer des coordonnées généralisées $q = (q_1, \dots, q_m)$ à d'autres coordonnées généralisées indépendantes $Q = (Q_1, \dots, Q_m)$. Les nouvelles coordonnées Q sont fonctions des anciennes q ; il est facile de voir qu'elles peuvent dépendre aussi de la variable t de manière explicite. Ainsi ces transformations, dites *ponctuelles*, qui laissent invariant le lagrangien sont des transformations du type $Q_i = Q_i(q,t)$. Outre les équations de Lagrange, ces transformations laissent évidemment invariante la forme (3.59) des équations de Hamilton.

Cependant les équations de Hamilton admettent en réalité une classe beaucoup plus grande de transformations qui les laissent invariantes. Cette circonstance découle du fait que dans la méthode de Hamilton, les impulsions généralisées $p = (p_1, \dots, p_m)$ jouent le rôle de variables indépendantes au même titre que les coordonnées q. C'est pourquoi la notion de transformation peut être élargie de façon à englober la transformation des $2m$ variables indépendantes q et p en les nouvelles variables Q et P suivant les formules

$$Q_i = Q_i(q,p,t), \qquad P_i = P_i(q,p,t). \tag{A.1}$$

Cet élargissement de la classe des transformations qui laissent le système d'équations invariant constitue un des avantages essentiels de la méthode de Hamilton en mécanique. Cependant, attention : il serait complètement faux d'en déduire que les équations hamiltoniennes du mouvement conservent leur forme canonique pour toute transformation du type (A.1). Déterminons donc, parmi les transformations de ce type, quelles sont les transformations permises sur les variables p et q qui laissent au système (3.59) sa forme hamiltonienne. Introduisons tout d'abord la définition suivante.

Définition

Considérons un système hamiltonien défini par la fonction de Hamilton $H(q,p,t)$ dans le jeu de variables canoniques (q,p), c'est-à-dire tel que $\dot{q} = \partial H/\partial p$ et $\dot{p} = -\partial H/\partial q$. Soit une application $\Phi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ qui définit un changement de variables du jeu de coordonnées (q,p) dans le jeu de coordonnées $(Q,P) = (Q(q,p,t), P(q,p,t))$. On dira que Φ est *canonique* si, quel que soit le hamiltonien H, les équations du mouvement se mettent encore dans les nouvelles variables Q et P sous la forme hamiltonienne

$$\dot{Q} = \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial P}, \qquad \dot{P} = -\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial Q}, \tag{A.2}$$

avec $\widetilde{H}$ une application de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, fonction de (Q,P,t), dont la différence avec H exprimé dans les variables (Q,P,t) ne dépend que de la transformation et non de H [a].

a. Il existe en fait une autre définition des transformations canoniques comme étant celles qui conservent, à t fixé, la 2-forme différentielle $\mathrm{d}q \wedge \mathrm{d}p$ (transformations symplectiques). Avec la condition imposée ici à $\widetilde{H}$, les deux définitions coïncident. Sans cette condition, la définition serait plus large : elle admettrait par exemple le changement d'échelle $Q = q$, $P = 2p$, qui conserve la forme hamiltonienne avec pour nouveau hamiltonien le double de H, alors que $[Q,P] = 1/2$. La définition symplectique est plus généralement admise, mais elle est plus compliquée en ce qu'elle nécessite tout l'appareil des formes différentielles pour sa définition. La définition donnée ici sera largement suffisante pour les besoins de ce cours. Voir [1] pour plus de détails.

Cherchons maintenant à quelle condition un changement de variables est canonique. Considérons le système hamiltonien $H(q,p,t)$ dans le jeu de variables (q,p). Supposons donné un changement de

variables entre les anciennes variables (q,p) et des nouvelles variables (Q,P), explicité par $2m$ fonctions f_i et g_i de $\mathbb{R}^{2m+1}$ dans $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

$$q_i = f_i(Q,P,t), \qquad p_i = g_i(Q,P,t). \tag{A.3}$$

Ce système de $2m$ fonctions à $2m$ variables est supposé bijectif, au moins localement, puisque ce sont des changements de variables ; le système inverse donne alors les (Q,P) en fonction des (q,p). Pour déterminer à quelle condition ce changement de variables est canonique, nous allons calculer les dérivées partielles de la fonction $H(q(Q,P,t),p(Q,P,t),t)$ par rapport à chacune des variables P_i et Q_i. Nous en déduirons les expressions des $\dot{Q}_i$ et des $\dot{P}_i$, et nous en tirerons ensuite facilement des conditions de canonicité. On appelle H^* la fonction de Hamilton H écrite dans les variables (Q,P,t) :

$$H^*(Q,P,t) = H(q(Q,P,t),p(Q,P,t),t). \tag{A.4}$$

Donc pour toute variable x parmi l'ensemble des variables (Q_i,P_i), on a

$$\frac{\partial H^*}{\partial x} = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial x} \right) = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial f_i}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial g_i}{\partial x} \right). \tag{A.5}$$

Or d'après les équations de Hamilton et l'expression (A.3), on a

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i = \frac{\mathrm{d}f_i}{\mathrm{d}t} = \sum_j \left(\frac{\partial f_i}{\partial Q_j}\dot{Q}_j + \frac{\partial f_i}{\partial P_j}\dot{P}_j \right) + \frac{\partial f_i}{\partial t}, \tag{A.6}$$

$$-\frac{\partial H}{\partial q_i} = \dot{p}_i = \frac{\mathrm{d}g_i}{\mathrm{d}t} = \sum_j \left(\frac{\partial g_i}{\partial Q_j}\dot{Q}_j + \frac{\partial g_i}{\partial P_j}\dot{P}_j \right) + \frac{\partial g_i}{\partial t}. \tag{A.7}$$

On obtient donc l'expression générale de la dérivée partielle de H^* en fonction des Q_i et P_i :

$$\begin{aligned}\frac{\partial H^*}{\partial x} = &\sum_j \sum_i \left(\frac{\partial f_i}{\partial Q_j}\frac{\partial g_i}{\partial x} - \frac{\partial f_i}{\partial x}\frac{\partial g_i}{\partial Q_j} \right) \dot{Q}_j + \sum_j \sum_i \left(\frac{\partial f_i}{\partial P_j}\frac{\partial g_i}{\partial x} - \frac{\partial f_i}{\partial x}\frac{\partial g_i}{\partial P_j} \right) \dot{P}_j \\ &+ \sum_i \left(\frac{\partial f_i}{\partial t}\frac{\partial g_i}{\partial x} - \frac{\partial f_i}{\partial x}\frac{\partial g_i}{\partial t} \right).\end{aligned} \tag{A.8}$$

Pour simplifier les notations, on introduit le *crochet de Lagrange* de deux variables u et v associé au changement de variables défini par les f_i et les g_i :

$$[u,v] = \sum_i \left(\frac{\partial f_i}{\partial u}\frac{\partial g_i}{\partial v} - \frac{\partial f_i}{\partial v}\frac{\partial g_i}{\partial u} \right) = \sum_i \left(\frac{\partial q_i}{\partial u}\frac{\partial p_i}{\partial v} - \frac{\partial q_i}{\partial v}\frac{\partial p_i}{\partial u} \right). \tag{A.9}$$

Ainsi l'équation générale se réécrit simplement de la manière suivante :

$$\frac{\partial H^*}{\partial x} = \sum_j \left([Q_j,x]\,\dot{Q}_j + [P_j,x]\,\dot{P}_j \right) + [t,x]. \tag{A.10}$$

Il suffit maintenant d'identifier cette équation aux équations canoniques en (Q,P) pour déterminer les conditions de canonicité. On obtient le théorème suivant.

Théorème 1

Soient $2m$ fonctions $Q(q,p,t)$, $P(q,p,t)$ définissant un changement de variables $\Phi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. Ce changement de variables est canonique si et seulement si les conditions suivantes sont respectées :

- pour tout i et tout j on a $[Q_i,P_j] = \delta_{ij}$, $[Q_i,Q_j] = 0$ et $[P_i,P_j] = 0$;
- il existe une application $F : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\partial F/\partial x = [t,x]$ pour x pris dans l'ensemble des variables (Q_i,P_i).

Le nouveau hamiltonien est alors $\widetilde{H} = H^* - F$.

Si le changement de variables ne dépend pas explicitement du temps t, on a $\partial f_i/\partial t = \partial g_i/\partial t = 0$ pour tout i. Les crochets $[t, Q_j]$ et $[t, P_j]$ sont alors nuls quel que soit j et l'on peut prendre $F = 0$. Dans ce cas le hamiltonien conserve sa valeur : $\widetilde{H} = H^*$.

En résumé, on a donc avec ce théorème une méthode simple de vérification qu'un changement de variables est canonique. Dans le cas général où le changement de variables dépend du temps, et si l'on veut générer un changement de variables particulier, il reste cependant à trouver la fonction F. Le théorème suivant, qui donne une autre condition nécessaire et suffisante de canonicité, plus concise et plus facile à utiliser, peut aider à trouver cette fonction comme on le verra dans le paragraphe suivant.

Théorème 2

Pour qu'une transformation $(q,p) \to (Q,P)$ soit canonique, il faut et il suffit qu'il existe une fonction $\widetilde{F}$ telle que la forme différentielle

$$\sum_j (p_j \,\mathrm{d}q_j - P_j \,\mathrm{d}Q_j) + \widetilde{F}\,\mathrm{d}t \tag{A.11}$$

soit une différentielle totale. On a alors $\widetilde{F} = \widetilde{H} - H^* = -F$.

Ce théorème découle directement du théorème précédent. On pourra consulter [3] pour plus de détails sur la démonstration. Si le changement de variables ne dépend pas du temps, une condition nécessaire et suffisante pour que le changement de variables $(q,p) \to (Q,P)$ soit canonique est que $\sum_j (p_j \,\mathrm{d}q_j - P_j \,\mathrm{d}Q_j)$ soit une différentielle totale.

Du théorème 2 on déduit immédiatement quatre conditions équivalentes pour qu'un changement de variables soit canonique. Il s'agit simplement de la condition (A.11) du théorème écrite dans quatre jeux de variables différents, (q,Q), (q,P), (p,Q) et (p,P) :

$$\sum_j (p_j \,\mathrm{d}q_j - P_j \,\mathrm{d}Q_j) + (\widetilde{H} - H^*)\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}G_1, \tag{A.12}$$

$$\sum_j (p_j \,\mathrm{d}q_j + Q_j \,\mathrm{d}P_j) + (\widetilde{H} - H^*)\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}G_2, \tag{A.13}$$

$$\sum_j (-q_j \,\mathrm{d}p_j - P_j \,\mathrm{d}Q_j) + (\widetilde{H} - H^*)\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}G_3, \tag{A.14}$$

$$\sum_j (-q_j \,\mathrm{d}p_j + Q_j \,\mathrm{d}P_j) + (\widetilde{H} - H^*)\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}G_4, \tag{A.15}$$

où les seconds membres sont les différentielles totales de fonctions différentes notées $G_1(q,Q,t)$, $G_2(q,P,t)$, $G_3(p,Q,t)$ et $G_4(p,P,t)$. La relation (A.12) n'est autre que la condition nécessaire et suffisante du théorème 2, tandis que les relations suivantes s'en déduisent immédiatement par transformation de Legendre, par exemple $G_2 = G_1 + \sum_j P_j Q_j$ (cf. [3] pour les détails).

Dans la pratique ce sont ces quatre conditions que l'on utilisera, car elles sont faciles à manier. Cependant on fera attention à choisir une fonction G parmi G_1, G_2, G_3 ou G_4 adaptée au problème. En effet on ne peut pas prendre n'importe quel jeu de variables pour n'importe quel changement de variables : il faut naturellement que le jeu de $2m$ variables dont dépend G soit indépendant. Par exemple pour la transformation canonique *identité*, le choix de $G_1(q,Q)$ ne peut fonctionner car le jeu de variables $(q,Q) = (q,q)$ n'est pas indépendant : le premier membre de (A.12) est alors identiquement nul, donc trivialement une différentielle totale, mais aucune fonction $G_1(q,Q)$ ne permet de retrouver p et P par les relations $p = \partial G_1/\partial q$ et $P = -\partial G_1/\partial Q$, qui supposent q et Q indépendants. Il en va de même pour G_4. Par contre, bien sûr, pour la transformation identité le théorème s'applique parfaitement avec G_2 et G_3.

En conclusion, les théorèmes 1 et 2 nous donnent deux caractérisations simples de l'ensemble des changements de variables canoniques. Naturellement, on utilisera préférentiellement le théorème 1 lorsque l'on voudra vérifier qu'un changement de variables donné est canonique, puisque dans ce cas la

vérification est quasi immédiate. Par contre on utilisera plutôt le théorème 2 lorsque l'on voudra *générer* un changement de variables canonique, puisque dans ce cas cela est simple : il suffit de choisir une fonction $G_1(q,Q)$, $G_2(q,P)$, $G_3(p,Q)$ ou $G_4(p,P)$ dont la matrice des dérivées secondes croisées (par exemple $\partial^2 G_2/\partial q\,\partial P$) est inversible, et il en découle immédiatement le changement de variables et le nouveau hamiltonien associé. Pour cette raison, on appelle les fonctions de ce type des *fonctions génératrices*.

Exemples de changements de variables canoniques.

- On peut vérifier facilement, avec le théorème 1, que le changement de variables qui envoie les coordonnées « polaires » (r,ϕ) dans les coordonnées cartésiennes (x,y), défini par $x=\sqrt{2r}\cos\phi$ et $y=\sqrt{2r}\sin\phi$, est canonique si l'on considère ϕ comme la coordonnée et r comme le moment conjugué, à condition de prendre y comme nouvelle coordonnée et x comme nouveau moment : $[y,x]=1$, alors que $[x,y]=-1$. C'est exactement la transformation qui fait passer des variables de Poincaré (γ,Γ) aux variables cartésiennes (ξ,η) de la section 5.6, où η est la coordonnée et ξ le moment conjugué.
- On peut vérifier facilement que le changement de variables linéaire $(Q,P)=(\mathscr{A}q,\mathscr{B}p)$, avec $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ deux matrices constantes inversibles, est canonique si et seulement si $\mathscr{B}=(\mathscr{A}^t)^{-1}$. Ceci est particulièrement utile lorsqu'on veut (et cela arrive souvent !) un changement de variables qui soit linéaire et qui vérifie $Q=\mathscr{A}q$ par exemple. Si l'on impose de plus que P ne dépende que de p, il n'y a alors qu'une seule solution, c'est la transformation indiquée ci-dessus ; nous l'avons utilisée à la section 7.10. Sans cette restriction, les transformations linéaires canoniques vérifiant $Q=\mathscr{A}q$ sont les $P=(\mathscr{A}^t)^{-1}(p+\mathscr{S}q)$, avec $\mathscr{S}$ matrice symétrique quelconque.

Exemples de fonctions génératrices.

- La fonction $G_2=\sum_i q_i P_i$ engendre la transformation identique, puisqu'on a $p_i=\partial G_2/\partial q_i=P_i$, $Q_i=\partial G_2/\partial P_i=q_i$ et $\widetilde{H}=H^*$.
- La fonction $G_1=\sum_i q_i Q_i$ inverse le rôle des variables et de leurs conjuguées, puisqu'on a $p_i=\partial G_1/\partial q_i=Q_i$, $P_i=-\partial G_1/\partial Q_i=-q_i$ et $\widetilde{H}=H^*$. Attention cependant au changement de signe, qui ne peut être supprimé si l'on veut un changement de variables canonique.

A.2 Fonctions génératrices

Dans cette section, on montre comment utiliser le théorème 2 pour trouver des changements de variables canoniques qui aboutissent à une simplification du hamiltonien.

On vient de voir plus haut qu'il est facile de générer un changement de variables canonique. Cependant, en pratique, il est difficile de prévoir quelle sera la modification que ce changement de variables va induire sur le hamiltonien au moment où l'on choisit les fonctions G_1, G_2, G_3 ou G_4. Pourtant, pour que la modification du hamiltonien aille dans le sens d'une simplification, il faudrait pouvoir la déterminer dès le choix des fonctions G_i et ainsi aboutir à la simplification voulue à l'avance. On peut arriver à ce résultat en utilisant le théorème 2.

Prenons par exemple un changement de variables canonique qui vérifie la condition (A.13) du théorème 2. D'après sa définition, la fonction G_2 est une fonction des variables (q,P,t). On peut donc naturellement écrire sa différentielle totale sous sa forme classique :

$$\mathrm{d}G_2=\sum_j\left(\frac{\partial G_2}{\partial q_j}\,\mathrm{d}q_j+\frac{\partial G_2}{\partial P_j}\,\mathrm{d}P_j\right)+\frac{\partial G_2}{\partial t}\,\mathrm{d}t. \tag{A.16}$$

En égalisant les termes de cette différentielle totale avec la condition de canonicité (A.13), on déduit

immédiatement le système d'équations suivant :

$$\forall i, \quad p_i = \frac{\partial G_2(q,P,t)}{\partial q_i}, \tag{A.17}$$

$$\forall i, \quad Q_i = \frac{\partial G_2(q,P,t)}{\partial P_i}, \tag{A.18}$$

$$\widetilde{H}(Q,P,t) - H(q,p,t) = \frac{\partial G_2(q,P,t)}{\partial t}. \tag{A.19}$$

Le choix de la fonction G_2 détermine donc entièrement, non seulement le changement de variables au travers des $2m$ équations (A.17) et (A.18) comme on l'a vu plus haut, mais aussi la simplification induite sur le hamiltonien comme le montre l'équation (A.19). Jusque-là il n'y a rien d'étonnant puisque la fonction G_2 est une fonction génératrice. Maintenant, si l'on cherche à ramener le hamiltonien à une fonction simple donnée $\widetilde{H}$, il suffit de prendre comme fonction génératrice la fonction G_2 qui vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial G_2(q,P,t)}{\partial t} = \widetilde{H}\left(\frac{\partial G_2(q,P,t)}{\partial P_j}, P_j, t\right) - H\left(q_j, \frac{\partial G_2(q,P,t)}{\partial q_j}, t\right). \tag{A.20}$$

Ceci constitue donc une méthode pour déterminer a priori la fonction génératrice G_2 du changement de variables qui donnera les simplifications attendues sur le hamiltonien. Notez que tout ce qui vient d'être montré avec G_2 pourrait être fait de la même manière avec G_1, G_3 ou G_4. Dans la pratique on choisira une fonction génératrice des variables les plus adaptées à la transformation souhaitée.

A.3 Résolution par la méthode de Hamilton-Jacobi

Dans cette section, on montre que l'utilisation des changements de variables canoniques peut dans certains cas s'avérer être une méthode d'intégration des équations du mouvement extrêmement efficace.

Remarquons tout d'abord que les équations canoniques dans lesquelles le hamiltonien H dépend uniquement des moments P s'intègrent facilement. En effet, si $\widetilde{H} = K(P)$, les équations canoniques s'écrivent

$$\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0, \qquad \dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P}, \tag{A.21}$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$P(t) = P(0), \qquad Q(t) = Q(0) + t \left.\frac{\partial K}{\partial P}\right|_{P(0)} : \tag{A.22}$$

les moments sont des constantes et les coordonnées des fonctions linéaires du temps (ce sont les *variables d'action-angle* lorsque les Q sont des angles). Cherchons maintenant les transformations canoniques qui ramènent le hamiltonien $H(q,p)$ à une forme $K(P)$. Cherchons pour cela une fonction génératrice $G_2(q,P)$ d'une telle transformation. De la relation (A.13) nous obtenons $p = \partial G_2/\partial q$, ce qui nous donne la condition suivante sur G_2 :

$$H\left(q, \frac{\partial G_2(q,P)}{\partial q}\right) = K(P), \tag{A.23}$$

où, après dérivation, il faut exprimer q en fonction de (Q,P). L'équation (A.23), équation aux dérivées partielles du premier ordre pour la fonction G_2 des m variables q, dans laquelle les P jouent le rôle de paramètres, s'appelle *l'équation de Hamilton-Jacobi*. On vient de montrer ici la condition nécessaire du théorème de Jacobi.

Théorème de Jacobi

Si l'on a trouvé une solution $G_2(q,P)$ de l'équation de Hamilton-Jacobi (A.23) dépendant de m paramètres P_i (une *intégrale complète*) et telle que $\det\left(\partial^2 G_2/\partial P\partial q\right) \neq 0$ [a], alors les équations canoniques

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \tag{A.24}$$

s'intègrent explicitement par quadrature (cf. (A.22)). Les fonctions $P(q,p)$ définies par les équations $\partial G_2(q,P)/\partial q = p$ sont m intégrales premières des équations (A.24), et les $Q = \partial G_2/\partial P$ sont linéaires en temps.

a. Cette condition sur le déterminant de la hessienne mixte de G_2 n'est autre qu'une condition nécessaire et suffisante pour assurer que le jeu de variables (q,P) est indépendant et qu'on peut utiliser la fonction G_2 comme génératrice (cf. la remarque sur le théorème 2 à la section A.1).

Montrons rapidement la condition suffisante du théorème. Considérons la transformation canonique de génératrice $G_2(q,P)$. D'après (A.13), $p = \partial G_2(q,P)/\partial q$, d'où l'on déduit $P(q,p)$ (au moins localement) puisque $\det(\partial^2 G_2/\partial P\partial q) \neq 0$. Calculons alors la fonction $H(q,p)$ dans les nouvelles coordonnées (Q,P). On a $H(q,p) = H(q,\partial G_2(q,P)/\partial q)$. Pour trouver le hamiltonien il suffit alors de remplacer dans cette relation (après dérivation) q par son expression en fonction de P et Q. Or, puisque par hypothèse $G_2(q,P)$ est solution de l'équation de Hamilton-Jacobi, l'expression $H(q,\partial G_2(q,P)/\partial q)$ ne dépend pas de q, de sorte que l'on a tout simplement $\widetilde{H}(Q,P) = K(P)$. Il en résulte le théorème de Jacobi.

La méthode de Hamilton-Jacobi s'étend facilement au cas où la fonction génératrice G_2 dépend du temps. Dans ce cas, seule l'équation de Hamilton-Jacobi est modifiée tandis que le théorème reste le même. Elle devient

$$H\left(q, \frac{\partial G_2(q,P,t)}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial G_2(q,P,t)}{\partial t} = K(P). \tag{A.25}$$

En particulier, le choix $K = 0$ rend toutes les nouvelles variables constantes : c'est ce que l'on fait à l'annexe B pour l'oscillateur harmonique.

En résumé, on vient de montrer que si l'on trouve une solution G_2 à l'équation de Hamilton-Jacobi (A.23), le problème de l'intégration des équations canoniques est résolu et le changement de variables qui permet de passer dans le jeu de variables qui intègre le problème se formule simplement. Notez que ce qui vient d'être montré pour G_2 est encore vrai pour G_1, G_3 ou G_4 telles qu'elles sont définies dans les relations (A.12) à (A.15), pour peu que l'on adapte les hypothèses du théorème de Jacobi au jeu de variables correspondant à chaque G_i.

La méthode de Hamilton-Jacobi que l'on vient de voir ramène donc la résolution d'un système d'équations différentielles ordinaires (3.59) à la recherche de l'intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles (A.23). Il paraît étonnant que cette réduction d'un problème simple à un problème plus compliqué constitue une méthode efficace de résolution. Et pourtant, dans la pratique, c'est une méthode puissante d'intégration analytique, en particulier lorsque les variables se séparent, comme dans le problème de Kepler. Elle constitue d'ailleurs un des atouts majeurs de l'utilisation du formalisme hamiltonien, et le point de départ des théories de perturbation canoniques (transformations de Lie, méthode de von Zeipel) qui sont l'outil de base de la mécanique céleste analytique moderne.

Annexe B : Le pendule harmonique et le problème de Kepler : approche hamiltonienne

B.1 Cas du pendule harmonique

B.1.1 Écriture du hamiltonien

Le problème du pendule harmonique est le problème du pendule aux petites oscillations. Il s'agit du problème du pendule simple défini à la section 3.8, dans lequel on limite l'étude au domaine $\theta \ll 1$. Dans la pratique, l'énergie cinétique reste la même et l'énergie potentielle devient $U = mgl\theta^2/2$. On appelle encore ce problème *le problème de l'oscillateur harmonique* : il dépasse le cadre du pendule et concerne tous les problèmes d'attraction d'un point par un centre fixe selon une force proportionnelle à la distance. On retrouve ce problème fondamental dans toutes les dynamiques au voisinage d'équilibres linéairement stables, en physique. Sous sa forme fondamentale, on introduit en général la variable *élongation* $q = l\theta$ et le *coefficient de rappel* $k = mg/l$, de sorte que l'énergie cinétique et l'énergie potentielle s'écrivent

$$T = \frac{1}{2}m\dot{q}^2, \qquad U = \frac{1}{2}kq^2. \tag{B.1}$$

Le lagrangien du problème prend donc la forme $L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2$. La variable conjuguée de q est alors $p = \partial L/\partial\dot{q} = m\dot{q}$. Ceci nous donne le hamiltonien de l'oscillateur harmonique :

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2. \tag{B.2}$$

B.1.2 Recherche d'une fonction génératrice

Intégrons ce système par la méthode de Hamilton-Jacobi. Pour cela, cherchons, si elle existe, une fonction génératrice $G_2(q,P,t)$ de la transformation $(q,p) \to (Q,P)$ telle que le jeu de variables (q,P) soit indépendant (c'est-à-dire $\partial^2 G_2/\partial P\partial q \neq 0$) et qui soit solution de l'équation de Hamilton-Jacobi

$$H\left(q, \frac{\partial G_2}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial G_2}{\partial t} = K(P). \tag{B.3}$$

On suppose dans un premier temps que G_2 génère les variables (Q,P) de telle sorte que le jeu (q,P) soit indépendant, et on résout l'équation de Hamilton-Jacobi. Nous vérifierons par la suite que la solution trouvée pour G_2 vérifie bien cette condition. L'équation de Hamilton-Jacobi se traduit ici par

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial G_2}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2}kq^2 + \frac{\partial G_2}{\partial t} = K(P). \tag{B.4}$$

Étant donnée la forme de cette équation aux dérivées partielles qui contraint G_2, on cherche G_2 sous la forme séparée $G_2 = F_1(q,P) + F_2(t,P)$. Ceci transforme l'équation aux dérivées partielles en l'équation suivante en F_1 et F_2 :

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial F_1}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2}kq^2 = -\frac{\partial F_2}{\partial t} + K(P). \tag{B.5}$$

Le membre de gauche de cette équation est une fonction de q et de P, tandis que le membre de droite est une fonction de t et P. Comme les variables q, P et t sont trois variables indépendantes, d'une part le membre de gauche est indépendant de q, puisque c'est une fonction qui ne dépend que de P et t d'après l'égalité, et d'autre part le membre de droite est indépendant de t, puisque c'est une fonction qui ne dépend que de q et P d'après l'égalité. Ainsi chacun des deux membres est égal à une même fonction de P uniquement, qu'on note $f(P)$:

$$f(P) = -\frac{\partial F_2}{\partial t} + K(P), \qquad f(P) = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial F_1}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2}kq^2. \tag{B.6}$$

Ce système s'intègre facilement en introduisant deux fonctions arbitraires g_1 et g_2 :

$$F_2 = (K(P) - f(P))\,t + g_2(P), \qquad F_1 = \pm \int \sqrt{m\,(2f(P) - kq^2)}\,\mathrm{d}q + g_1(P), \tag{B.7}$$

c'est-à-dire

$$G_2 = (K(P) - f(P))\,t \pm \int \sqrt{m\,(2f(P) - kq^2)}\,\mathrm{d}q + g_0(P) \qquad \text{avec} \quad g_0 = g_1 + g_2. \tag{B.8}$$

Ce G_2 ne sera solution que si, comme nous l'avons indiqué plus haut, $\partial^2 G_2/\partial P \partial q \neq 0$, c'est-à-dire si

$$\frac{f'(P)}{\sqrt{2f(P) - kq^2}} \neq 0.$$

On vient donc de trouver ici, grâce à la méthode de Hamilton-Jacobi, toute une famille (paramétrée par f, g_0 et K) de fonctions génératrices G_2 qui envoient (q,p) dans un jeu de variables (Q,P) dans lequel le système hamiltonien est facile à intégrer (c'est-à-dire $\widetilde{H} = K(P)$). Exhibons parmi ces solutions la génératrice G_2 la plus simple à écrire, en choisissant $f(P) = P$ (de sorte que $f' = 1 \neq 0$) et $g_0 = 0$.

B.1.3 Intégration du système

Quitte à chercher un $\widetilde{H}$ facilement intégrable, cherchons carrément un $\widetilde{H}$ nul, si c'est possible, et le problème sera tout intégré. Si G_2 génère une transformation de (q,p) dans un jeu de variables (Q,P) qui annule $\widetilde{H}$ ($K = 0$), alors Q et P seront des constantes. Nous les appellerons α et β. Alors G_2 s'écrit

$$G_2 = -\beta t \pm \int \sqrt{m\,(2\beta - kq^2)}\,\mathrm{d}q. \tag{B.9}$$

Ce changement de variables est bien possible tant que $\beta \neq kq^2/2$, puisque

$$\frac{\partial^2 G_2}{\partial P\,\partial q} = \pm \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2\beta - kq^2}} \neq 0. \tag{B.10}$$

C'est gagné ! On a un jeu de variables dans lequel le système hamiltonien s'intègre immédiatement puisqu'il y est nul à toutes dates. Ce jeu est le suivant :

$$Q = \alpha = \frac{\partial G_2}{\partial \beta} = -t \pm \int \frac{m\,\mathrm{d}q}{\sqrt{m(2\beta - kq^2)}}, \qquad P = \beta, \tag{B.11}$$

c'est-à-dire

$$Q = -t \pm \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2\beta}}\,q\right), \qquad P = \beta. \tag{B.12}$$

Si l'on préfère l'écrire dans les variables initiales, cela donne

$$q = \pm\sqrt{\frac{2\beta}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,(t+\alpha)\right), \qquad p = \frac{\partial G_2}{\partial q} = \pm\sqrt{2m\beta} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,(t+\alpha)\right). \tag{B.13}$$

On reconnaît ici en α et β les deux constantes d'intégration. Quant au signe $\pm$, il est choisi selon les conditions initiales, par exemple suivant le signe de la vitesse à l'instant $t = -\alpha$. Ces trajectoires sont des ellipses dans l'espace des phases (q,p) (figure B.1), toutes parcourues avec la même période $2\pi\sqrt{m/k}$: c'est l'*isochronisme* des petites oscillations, qui distingue l'oscillateur harmonique du pendule complet.

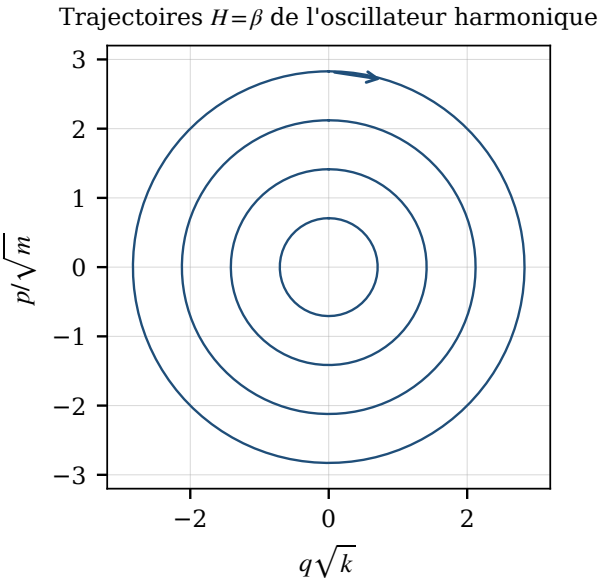


FIGURE B.1 – Espace des phases de l'oscillateur harmonique ; on retrouve la partie centrale de la figure 7.4.

Dans cet exemple, β représente l'énergie totale du système car on a en fait $H = -\partial G_2/\partial t = \beta$. Cette énergie est bien constante, comme on pouvait s'y attendre puisque le système est conservatif. Sachant cela à l'avance, on aurait pu chercher des variables canoniques (x,y) qui vérifient $H(q(x,y),p(x,y)) = K(y)$ et qui conservent en même temps la valeur du hamiltonien (c'est-à-dire $H(q,p) \equiv K(y)$). Pour obtenir un tel hamiltonien il suffit de considérer la fonction génératrice G_2 indépendante du temps qui vérifie l'équation de Hamilton-Jacobi $H(q,\partial G_2/\partial q) = y$. On a alors en effet y constante puisque $\dot{y} = -\partial K(y)/\partial x = 0$; H est bien constant, égal à $K(y)$, puisque $K(y) - H(q,p) = \partial G_2/\partial t = 0$. On a alors $y = \beta$ l'énergie, et x, sa variable conjuguée, est le temps puisque $\dot{x} = \partial K(y)/\partial y = 1$. Cette méthode, qui consiste à rechercher un jeu de variables dont l'une est constante et égale au nouveau hamiltonien, convient à tous les systèmes conservatifs. Ceci n'est pas pour nous étonner puisque dans les systèmes conservatifs le hamiltonien se conserve, c'est donc une intégrale première du mouvement, et si on l'utilise comme variable dans le nouveau jeu de variables, elle sera constante et égale au nouveau hamiltonien. La variable conjuguée du hamiltonien est alors toujours le temps.

B.2 Cas du problème de Kepler

B.2.1 Écriture du hamiltonien

Reprenons le problème de Kepler tel que nous l'avions posé à la section 3.8.2. On a montré dans ce paragraphe que le lagrangien du problème s'écrivait dans les coordonnées polaires (r,ϕ)

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) + \frac{m\mu}{r}. \tag{B.14}$$

Pour simplifier les écritures, on s'affranchit de la masse en introduisant un nouveau lagrangien $L' = L/m$. Ce lagrangien n'est autre que l'ancien lagrangien L dans lequel on a pris pour unité de masse la masse m. Ceci définit des impulsions généralisées par unité de masse, notées (P_r, P_ϕ) (ce sont ici les *anciens* moments, conjugués de r et ϕ, et non de nouveaux moments au sens de l'annexe A ; les nouvelles variables seront notées (x_1,x_2,y_1,y_2)) :

$$P_r = \dot{r}, \qquad P_\phi = r^2\dot{\phi}. \tag{B.15}$$

On en déduit le hamiltonien du problème, affranchi du paramètre m :

$$H(r,\phi,P_r,P_\phi) = \frac{1}{2}\left(P_r^2 + \frac{P_\phi^2}{r^2}\right) - \frac{\mu}{r}. \tag{B.16}$$

B.2.2 Recherche d'une fonction génératrice

Intégrons ce système par la méthode de Hamilton-Jacobi. Pour cela cherchons, si elle existe, une fonction génératrice $G_2(r,\phi,y_1,y_2,t)$ de la transformation $(r,\phi,P_r,P_\phi)\to(x_1,x_2,y_1,y_2)$ telle que le jeu de variables (r,ϕ,y_1,y_2,t) soit indépendant, et telle qu'elle soit solution de l'équation de Hamilton-Jacobi

$$H\left(r,\phi,\frac{\partial G_2}{\partial r},\frac{\partial G_2}{\partial \phi},t\right)+\frac{\partial G_2}{\partial t}=K(y_1,y_2). \tag{B.17}$$

Dans le problème de Kepler, le système représenté par le hamiltonien est conservatif. H est donc constant et vaut une valeur que l'on note h. Sachant cela, on cherche un changement de variables qui fasse apparaître cette intégrale première dans les nouvelles variables sous la forme $y_1=h$. D'après la remarque du paragraphe précédent, il suffit de chercher une fonction génératrice G_2 indépendante de t telle que $K(y_1,y_2)=y_1$. Cela revient donc à rechercher une fonction $G_2(r,\phi,y_1,y_2)$ telle que (r,ϕ,y_1,y_2) soit indépendant et que G_2 soit solution de l'équation de Hamilton-Jacobi

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial G_2}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial G_2}{\partial \phi}\right)^2\right]-\frac{\mu}{r}=y_1. \tag{B.18}$$

Notons, avant de se lancer dans les calculs, que la variable ϕ n'apparaît pas explicitement dans l'expression de H : c'est une variable cyclique, dont la variable conjuguée P_ϕ est constante, c'est une autre intégrale première du mouvement, indépendante de h. Afin de faire apparaître cette intégrale première dans les nouvelles variables, nous allons choisir G_2 telle qu'elle engendre l'identité selon la variable ϕ. Il suffit pour cela de choisir G_2 de la forme

$$G_2(r,\phi,y_1,y_2)=\phi\, y_2+S(r,y_1,y_2), \tag{B.19}$$

où S est une fonction quelconque. En effet dans ce cas $P_\phi=\partial G_2/\partial\phi=y_2$ (cf. l'exemple de la section A.1). Ainsi désormais, le changement de variables que l'on cherche peut être réduit à la transformation $(r,\phi,P_r,P_\phi)\to(x_1,x_2,h,P_\phi)$, avec la génératrice $G_2=\phi P_\phi+S(r,h,P_\phi)$ dans laquelle S est maintenant solution de l'équation de Hamilton-Jacobi *séparée*

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2-\frac{\mu}{r}+\frac{P_\phi^2}{2r^2}=h,\qquad \text{c'est-à-dire}\qquad \frac{\partial S}{\partial r}=\pm\sqrt{2h+\frac{2\mu}{r}-\frac{P_\phi^2}{r^2}}. \tag{B.20}$$

Cette équation s'intègre de la manière suivante :

$$S(r,h,P_\phi)=\pm\int_{r_0}^{r}\sqrt{2h+\frac{2\mu}{r}-\frac{P_\phi^2}{r^2}}\,\mathrm{d}r,\qquad \text{avec}\quad r_0=r_0(h,P_\phi). \tag{B.21}$$

Ceci nous donne immédiatement les quatre équations qui définissent le changement de variables de (r,ϕ,P_r,P_ϕ) en (x_1,x_2,h,P_ϕ) :

$$P_r=\frac{\partial S}{\partial r}=\pm\sqrt{2h+\frac{2\mu}{r}-\frac{P_\phi^2}{r^2}}, \tag{B.22}$$

$$P_\phi=\frac{\partial G_2}{\partial \phi}=y_2, \tag{B.23}$$

$$x_1=\frac{\partial G_2}{\partial y_1}=\frac{\partial S}{\partial h}=\pm\int_{r_0}^{r}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{2h+\frac{2\mu}{r}-\frac{P_\phi^2}{r^2}}}\mp\frac{\partial r_0}{\partial h}\sqrt{2h+\frac{2\mu}{r_0}-\frac{P_\phi^2}{r_0^2}}, \tag{B.24}$$

$$x_2=\frac{\partial G_2}{\partial P_\phi}=\phi\mp\int_{r_0}^{r}\frac{P_\phi\,\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{2h+\frac{2\mu}{r}-\frac{P_\phi^2}{r^2}}}\mp\frac{\partial r_0}{\partial P_\phi}\sqrt{2h+\frac{2\mu}{r_0}-\frac{P_\phi^2}{r_0^2}}. \tag{B.25}$$

On peut vérifier à ce stade que le jeu de variables (r,ϕ,h,P_ϕ) est bien indépendant en calculant la hessienne mixte de G_2.

B.2.3 Intégration du système

Le changement de variables que l'on vient de trouver transforme $H(r,\phi,P_r,P_\phi)$ en $K(x_1,x_2,y_1,y_2) = y_1 = h$, qui est constant. Donc en particulier il contient l'intégration du système. Exhibons cette intégration et écrivons-la dans les variables initiales (r,ϕ,P_r,P_ϕ) : ainsi on obtiendra les trajectoires du système dans ce jeu de variables qui a un sens physique plus naturel. Tout d'abord, en ce qui concerne l'intégration, elle est évidente dans le nouveau jeu de variables (x_1,x_2,y_1,y_2). Elle est donnée par les quatre équations suivantes, dans lesquelles on introduit une nouvelle constante ω :

$$x_1 = x_1(t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial K}{\partial y_1}\,\mathrm{d}t = t - t_0 \quad \text{en choisissant } t_0 \text{ tel que } x_1(t_0) = 0, \tag{B.26}$$

$$x_2 = x_2(t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial K}{\partial y_2}\,\mathrm{d}t = x_2(t_0) = \omega \quad \text{constante}, \tag{B.27}$$

$$y_1 = y_1(t_0) - \int_{t_0}^{t} \frac{\partial K}{\partial x_1}\,\mathrm{d}t = h \quad \text{constante}, \tag{B.28}$$

$$y_2 = y_2(t_0) - \int_{t_0}^{t} \frac{\partial K}{\partial x_2}\,\mathrm{d}t = P_\phi \quad \text{constante}. \tag{B.29}$$

Écrivons maintenant ces équations intégrées dans l'ancien jeu de variables.

- On égalise tout d'abord l'équation (B.24) à l'équation (B.26) :

$$\pm\int_{r_0}^{r} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{2h + \frac{2\mu}{r} - \frac{P_\phi^2}{r^2}}} \mp \frac{\partial r_0}{\partial h}\sqrt{2h + \frac{2\mu}{r_0} - \frac{P_\phi^2}{r_0^2}} = t - t_0. \tag{B.30}$$

  Selon cette équation, t_0 sera l'instant pour lequel r vaut r_0 si r_0 est l'une des racines de l'équation $2h + 2\mu/r_0 - P_\phi^2/r_0^2 = 0$ (car cela annule le terme en $\partial r_0/\partial h$). Mais d'autre part, si r_0 est racine de cette équation, alors r_0 annule $\dot{r}$, puisque $\dot{r} = P_r$ d'après l'équation (B.22). En d'autres termes, pour que t_0 soit l'instant pour lequel r vaut r_0, il suffit de choisir r_0 comme étant un extremum de r. Prenons par exemple r_0 comme étant le péricentre. Alors $t_0 = t_p$ est la date de passage au péricentre et r_0 est donné par la plus petite racine :

$$r_0 = \frac{P_\phi^2/\mu}{1 + \sqrt{1 + 2hP_\phi^2/\mu^2}}. \tag{B.31}$$

- Ayant choisi r_0 de cette manière, on égalise maintenant l'équation (B.25) à l'équation (B.27) :

$$\phi \mp \int_{r_0}^{r} \frac{P_\phi\,\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{2h + \frac{2\mu}{r} - \frac{P_\phi^2}{r^2}}} = \omega. \tag{B.32}$$

  ω s'interprète donc comme la valeur de l'angle ϕ lors du passage au péricentre : c'est l'argument du péricentre.

- On peut maintenant intégrer l'équation du mouvement. En posant $u = 1/r$, l'équation (B.32) s'intègre facilement (c'est une intégrale en arccos) pour donner

$$u = \frac{1 + \sqrt{1 + 2hP_\phi^2/\mu^2}\cos(\phi - \omega)}{P_\phi^2/\mu}. \tag{B.33}$$

  Cette équation correspond à l'équation polaire d'une conique de foyer le centre attracteur, d'excentricité $e = \sqrt{1 + 2hP_\phi^2/\mu^2}$ et de paramètre $p = P_\phi^2/\mu$. L'angle $\phi - \omega$ s'interprète comme étant l'anomalie vraie v :

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v}. \tag{B.34}$$

On retrouve bien le résultat de la section 3.3.1 (figure B.2), mais avec en prime l'expression des constantes en fonction des intégrales premières h et P_ϕ.

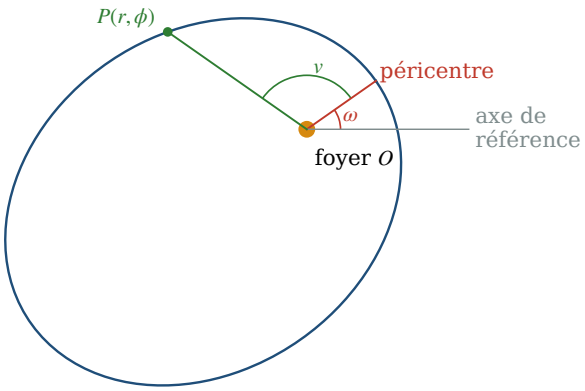


FIGURE B.2 – Exemple de trajectoire képlérienne : ω est l'argument du péricentre, $v = \phi - \omega$ l'anomalie vraie.

Finalement le problème de Kepler admet donc le nouveau jeu de variables canoniques

$$(t - t_0,\ \omega,\ h,\ P_\phi), \tag{B.35}$$

dont les trois dernières, étant des constantes, sont *des éléments d'orbite canoniques*. L'énergie h est la variable conjuguée du temps et le moment cinétique P_ϕ est conjugué de l'argument du péricentre. Le hamiltonien dans ces variables vaut $K(t - t_0, \omega, h, P_\phi) = h$.

> Si on avait considéré le problème de Kepler dans un espace euclidien de dimension 3 (pour espace de configuration) au lieu de le regarder dans le plan, nous aurions alors, bien sûr, un couple de variables supplémentaire. Ce couple de variables aurait donné deux éléments d'orbite canoniques supplémentaires, qui se seraient interprétés comme $\Theta = P_\phi \cos i$, la projection du moment cinétique sur l'axe polaire, et Ω, la longitude du nœud ascendant. Le hamiltonien aurait valu, dans ces variables, $K(t - t_0, \omega, \Omega, h, P_\phi, \Theta) = h$.

B.2.4 Écriture en variables de Delaunay

Pour plus de clarté, on peut exprimer le mouvement en écrivant r comme une fonction de t. Nous le faisons dans cette section en introduisant les éléments de Delaunay. Dans le cas du mouvement elliptique ($h < 0$), posons $a = -\mu/(2h)$ et utilisons la relation $P_\phi = \sqrt{\mu a(1-e^2)}$ issue de l'expression de l'excentricité dans (B.33). Ceci nous permet d'introduire le changement de variable régularisant $r \to E$ défini par $r = a(1 - e\cos E)$. Ce changement de variable, associé à la définition faite plus haut de r_0, permet d'intégrer l'équation (B.30) et donne *l'équation de Kepler* :

$$t - t_p = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\,(E - e\sin E)\,. \tag{B.36}$$

Il apparaît maintenant une nouvelle variable naturelle, qui est l'anomalie moyenne $M = \sqrt{\mu/a^3}\,(t - t_p)$. C'est une variable pratique car d'une part elle est plus facile à manipuler que E puisque son mouvement est uniforme, et d'autre part elle est physiquement plus adaptée aux problèmes liés aux orbites que $t - t_p$ puisqu'elle est périodique, de même période que l'orbite.

On peut faire en sorte que M soit une des variables canoniques et garder l'expression très simple de K. Il faut alors définir une transformation canonique entre $(t - t_p, h)$ et (M, L) (L étant la variable conjuguée de M) qui ne modifie ni le hamiltonien ni les autres variables. Il suffit pour cela d'avoir $(t - t_p)\,\mathrm{d}h = M\,\mathrm{d}L$,

car alors le remplacement des variables $(t-t_p, h)$ par les variables (M, L) n'a aucun impact sur $\mathrm{d}G_2$ et donc ni sur les autres variables ni sur K. Ceci se traduit, avec $\mathrm{d}h = \frac{\mu}{2a^2}\mathrm{d}a$, par un choix de L tel que

$$(t-t_p)\frac{\mu}{2a^2}\,\mathrm{d}a - \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\,(t-t_p)\,\mathrm{d}L = 0 \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}a} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{a}}. \tag{B.37}$$

On en déduit $L = \sqrt{\mu a}$ et $h = -\mu^2/(2L^2)$. C'est ainsi qu'on obtient ce qu'on appelle *les éléments canoniques de Delaunay* (l, g, L, G), définis avec les notations de Poincaré par

$$\begin{aligned} l &= M, \quad L = \sqrt{\mu a}, \\ g &= \omega, \quad G = L\sqrt{1-e^2} = P_\phi. \end{aligned} \tag{B.38}$$

Le hamiltonien correspondant conserve sa valeur :

$$H(l, g, L, G) = -\frac{\mu^2}{2L^2}, \tag{B.39}$$

et l'on en déduit immédiatement les équations de Hamilton dans le jeu de variables de Delaunay :

$$\dot{l} = \frac{\partial H}{\partial L} = \frac{\mu^2}{L^3} = n, \qquad \dot{L} = 0, \qquad \dot{g} = 0, \qquad \dot{G} = 0. \tag{B.40}$$

Attention aux notations : dans cette annexe, h désigne l'énergie et H le hamiltonien, alors qu'à la section 5.5, où ce jeu est complété par le couple de variables du problème tridimensionnel, h désigne la longitude du nœud Ω et $H = G\cos i$ sa variable conjuguée, notée Θ plus haut.

Naturellement, tout cet appareil de fonctions génératrices et de systèmes hamiltoniens peut sembler lourd pour la résolution d'un problème aussi simple que l'oscillateur harmonique, ou même pour la résolution du problème de Kepler, qui est plus simple avec le formalisme vectoriel habituel. Notez cependant que dans chaque cas, il nous a permis de mettre en évidence non pas une seule solution mais toute une famille. Néanmoins l'avantage majeur de ce formalisme n'est pas là : il est dans le fait que ce formalisme se généralise immédiatement aux systèmes à plusieurs degrés de liberté (ici la résolution aurait été la même avec six variables au lieu de deux ou quatre) et surtout aux systèmes perturbés, pour lesquels les variables de Delaunay sont le point de départ naturel (section 5.5).

Annexe C : Développements en série

Très souvent, la complexité des calculs en mécanique céleste ne laisse pas d'autre choix que de développer les diverses expressions en séries infinies, qui sont ensuite tronquées pour simplifier les calculs. Même si souvent l'approximation des restes est très grossière, cette approche donne de nombreux résultats pertinents. Dans cette annexe, nous présentons quelques développements en série des équations du problème de Kepler, qui sont extrêmement utiles pour traiter de nombreux problèmes de mécanique céleste.

C.1 Éviter les séries

Avant de présenter quelques développements en série très utiles, notons qu'il existe quelques exemples de grandeurs dans le problème de Kepler qui se calculent de manière exacte. Dans ce cas il ne faut pas s'en priver ! Pour cela, les relations suivantes entre les différentes anomalies $v = \phi - \omega$, E et M sont extrêmement utiles :

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}M} = \frac{a}{r}, \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}M} = \frac{a^2}{r^2}\sqrt{1-e^2}, \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}E} = \frac{a}{r}\sqrt{1-e^2}. \tag{C.1}$$

La première relation découle de l'équation de Kepler (B.36). La deuxième est obtenue en égalisant $P_\phi = \sqrt{\mu a(1-e^2)}$, issue de l'expression de l'excentricité dans (B.33), et l'équation de Hamilton $r^2\dot\phi = P_\phi$, puis en divisant par $\dot M = n = \sqrt{\mu/a^3}$ (avec $\dot v = \dot\phi$) : ce n'est autre que la loi des aires. Et la troisième est le quotient des deux premières.

On en déduit l'expression exacte de la valeur moyenne, sur une période, de a^n/r^n pour $n \in \mathbb{Z}$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a}{r}\,\mathrm{d}M = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}E = 1, \tag{C.2}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a^2}{r^2}\,\mathrm{d}M = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}. \tag{C.3}$$

Et pour $n \geq 1$, cela donne

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a^{n+2}}{r^{n+2}}\,\mathrm{d}M = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(1+e\cos v)^n}{(1-e^2)^{n+1/2}}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{(1-e^2)^{n+1/2}}\sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{n!}{2^{2k}(n-2k)!\,(k!)^2}\,e^{2k}, \tag{C.4}$$

où $[n/2]$ est la partie entière de $n/2$. De la même manière on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r^{n-1}}{a^{n-1}}\,\mathrm{d}M = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (1-e\cos E)^n\,\mathrm{d}E = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{n!}{2^{2k}(n-2k)!\,(k!)^2}\,e^{2k}. \tag{C.5}$$

Par exemple $\langle a^3/r^3\rangle = (1-e^2)^{-3/2}$ et $\langle r^2/a^2\rangle = 1+3e^2/2$: ces moyennes interviennent dans le calcul des effets séculaires (chapitre 5).

C.2 Rappel : les fonctions de Bessel

Les fonctions de Bessel de première espèce $J_n(x)$, $n \in \mathbb{Z}$, peuvent être définies comme les coefficients de Fourier de la fonction génératrice

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\sin E} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nE} \qquad \text{soit} \qquad J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x\sin E - nE)}\,\mathrm{d}E = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(nE - x\sin E)\,\mathrm{d}E, \tag{C.6}$$

ce qui est précisément la forme sous laquelle Bessel les a utilisées vers 1817 pour résoudre l'équation de Kepler, avant d'en faire l'étude systématique en 1824. On a le développement en série entière

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} \quad (n \geq 0), \qquad J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \tag{C.7}$$

de sorte que $J_n(x) \simeq (x/2)^n/n!$ pour x petit, et les relations de récurrence

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x), \qquad J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J_n'(x). \tag{C.8}$$

C.3 Équation de Kepler et développements en série

Le calcul des coordonnées du mobile en orbite nécessite le calcul de l'anomalie vraie v ou de l'anomalie excentrique E, qui s'obtient à partir de l'anomalie moyenne M grâce à l'équation de Kepler $M = E - e\sin E$. On a, comme on l'a vu précédemment, $\mathrm{d}M/\mathrm{d}E = 1 - e\cos E = r/a$. Si $e < 1$, alors $\mathrm{d}M/\mathrm{d}E > 0$ et M est une fonction strictement croissante de E : cette équation possède dans ce cas une solution unique. Elle se résout de manière numérique, et il existe d'ailleurs un grand nombre de façons différentes de le faire (section 3.3.8). Cependant, lorsqu'on désire une approche analytique pour expliquer les phénomènes, il faut obtenir l'inversion de cette formule analytiquement. Dans la pratique on la réalise à l'aide de développements en série, avec des séries de Fourier quand les grandeurs sont périodiques, ou à l'aide de séries de Taylor lorsque l'excentricité est petite par exemple.

Prenons le cas de a/r par exemple. C'est une fonction périodique de M, on peut donc effectuer son développement en série de Fourier de la manière suivante :

$$\frac{a}{r} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kM} \tag{C.9}$$

avec

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a}{r}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kM}\,\mathrm{d}M = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(E-e\sin E)}\,\mathrm{d}E = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}ke\sin E}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kE}\,\mathrm{d}E. \tag{C.10}$$

D'après l'égalité précédente, c_k est aussi le k-ième coefficient de Fourier du développement en série de Fourier de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}ke\sin E}$. Or on reconnaît la fonction génératrice des fonctions de Bessel avec $x = ke$:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}ke\sin E} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(ke)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nE}. \tag{C.11}$$

On a donc

$$\frac{a}{r} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kM} \qquad \text{avec} \quad c_k = J_k(ke). \tag{C.12}$$

C.4 Développements en anomalie moyenne M

Développement de a/r. D'après les propriétés des fonctions de Bessel, $J_{-k}(-x) = J_k(x)$. En introduisant ce résultat dans le développement (C.9) de a/r, on a

$$\frac{a}{r} = 1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} J_k(ke)\cos kM. \tag{C.13}$$

Développement de $\sin mE$ et $\cos mE$. En intégrant $\mathrm{d}E/\mathrm{d}M = a/r$ par rapport à M, on a

$$E = M + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{J_k(ke)}{k}\sin kM, \tag{C.14}$$

qui est la solution de l'équation de Kepler donnée par Bessel, convergente pour tout $e < 1$ (contrairement à la série en puissances de e, limitée à $e < 0{,}6627$). On aura plus généralement

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}mE} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{m,k}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kM} \tag{C.15}$$

où les coefficients $c_{m,k}$ vérifient

$$c_{m,k} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}mE}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kM}\,\mathrm{d}M = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}mE}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kM}\,(1-e\cos E)\,\mathrm{d}E. \tag{C.16}$$

Ce qui donne, quand on intègre par parties, pour $k \neq 0$:

$$c_{m,k} = \frac{m}{2k\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}mE}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kM}\,\mathrm{d}E = \frac{m}{2k\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}((m-k)E+ke\sin E)}\,\mathrm{d}E = \frac{m}{k}J_{k-m}(ke). \tag{C.17}$$

Pour $k = 0$, on aura

$$c_{m,0} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}mE}\,\mathrm{d}M = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}mE} - \frac{e}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m+1)E} - \frac{e}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-1)E}\right)\mathrm{d}E, \tag{C.18}$$

soit $c_{0,0} = 1$, $c_{1,0} = c_{-1,0} = -e/2$ et $c_{m,0} = 0$ pour $m \notin \{-1,0,1\}$. On a donc finalement

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}mE} = c_{m,0} + \sum_{k\neq 0} \frac{m}{k} J_{k-m}(ke)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kM}, \tag{C.19}$$

$$\cos mE = c_{m,0} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{m}{k}\left(J_{k-m}(ke) - J_{k+m}(ke)\right)\cos kM, \tag{C.20}$$

$$\sin mE = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{m}{k}\left(J_{k-m}(ke) + J_{k+m}(ke)\right)\sin kM. \tag{C.21}$$

En particulier, on aura pour $m = 1$, en utilisant les relations de récurrence des fonctions de Bessel :

$$\cos E = -\frac{e}{2} + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{J'_k(ke)}{k}\cos kM, \tag{C.22}$$

$$\sin E = 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{J_k(ke)}{ke}\sin kM. \tag{C.23}$$

Développement de r^n/a^n. Les développements de $\cos E$ et $\sin E$ précédents permettent d'obtenir directement les trois développements suivants :

$$\frac{r}{a} = 1 - e\cos E = 1 + \frac{e^2}{2} - 2e\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{J'_k(ke)}{k}\cos kM, \tag{C.24}$$

$$\frac{r}{a}\cos v = \cos E - e = -\frac{3e}{2} + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{J'_k(ke)}{k}\cos kM, \tag{C.25}$$

$$\frac{r}{a}\sin v = \sqrt{1-e^2}\sin E = 2\sqrt{1-e^2}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{J_k(ke)}{ke}\sin kM. \tag{C.26}$$

Ces relations, combinées avec le développement (C.9) de a/r, permettent, par développement des produits, d'obtenir tous les développements de la forme

$$\frac{a^n}{r^n}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}mv}, \qquad n, m \in \mathbb{Z}, \tag{C.27}$$

qui interviennent dans de nombreux problèmes (c'est de cette façon qu'on obtient le développement de $(a/r)^3\cos 2v$ utilisé à la section 7.9, ou le développement de la fonction perturbatrice des théories planétaires). Cependant, ils sont lourds à produire puisqu'il faut développer n produits de développements à l'ordre n. Dans la pratique, on les produit sur des manipulateurs algébriques en faisant des opérations formelles tronquées à l'ordre voulu. Il est beaucoup plus difficile, et souvent impossible, d'obtenir des expressions exactes utilisables.

On remarquera cependant que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $m \in \mathbb{Z}$ tels que $|m| \leq n$, on peut obtenir sans difficulté les expressions de la forme $(r^n/a^n)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}mv}$, puisque

$$\frac{r^n}{a^n}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}mv} = \left(\frac{r}{a}\right)^{n-|m|} \left(\cos E - e \pm \mathrm{i}\sqrt{1-e^2}\sin E\right)^{|m|}$$

(le signe $\pm$ étant celui de m) est un polynôme trigonométrique en E. Il suffit de faire un développement intermédiaire en anomalie excentrique E, que l'on linéarise, pour ensuite pouvoir utiliser les développements de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}mE}$, $\cos mE$ et $\sin mE$. Par exemple, en utilisant la relation $J_{k-2}(x) - J_{k+2}(x) = \frac{4k}{x}J'_k(x) - \frac{4k}{x^2}J_k(x)$, on aura

$$\frac{r^2}{a^2} = (1 - e\cos E)^2 = 1 + \frac{e^2}{2} - 2e\cos E + \frac{e^2}{2}\cos 2E \tag{C.28}$$

$$= 1 + \frac{3e^2}{2} - 4\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{J_k(ke)}{k^2}\cos kM. \tag{C.29}$$

Les développements en anomalie excentrique sont en général plus simples que les développements en anomalie moyenne. Certains sont même polynomiaux. À l'inverse, les développements en anomalie vraie sont les plus simples pour les puissances de a/r (puisque $a/r = (1 + e\cos v)/(1 - e^2)$), mais v n'est pas une fonction linéaire du temps.

Développements tronqués en puissances de l'excentricité. Pour les orbites peu excentriques, on utilise en pratique les développements limités suivants, obtenus en tronquant les séries de Bessel à l'ordre e^3 (à l'ordre e pour le dernier) :

$$E = M + e\sin M + \frac{e^2}{2}\sin 2M + \frac{e^3}{8}(3\sin 3M - \sin M) + O(e^4), \tag{C.30}$$

$$v = M + 2e\sin M + \frac{5}{4}e^2\sin 2M + \frac{e^3}{12}(13\sin 3M - 3\sin M) + O(e^4), \tag{C.31}$$

$$\frac{r}{a} = 1 - e\cos M + \frac{e^2}{2}(1 - \cos 2M) + \frac{3e^3}{8}(\cos M - \cos 3M) + O(e^4), \tag{C.32}$$

$$\frac{a^3}{r^3}\cos 2v = \cos 2M + \frac{e}{2}(7\cos 3M - \cos M) + O(e^2). \tag{C.33}$$

La différence $v - M$, dite *équation du centre*, atteint $2e$ radians au maximum au premier ordre, soit 1,9° pour la Terre et 23,6° pour Mercure (le maximum exact vaut 23,7°).

Annexe D : Principales formules pour les coniques et le mouvement képlérien

Dans tout ce formulaire, $\mu = GM$ est le paramètre gravitationnel du corps central, p le paramètre de la conique, e son excentricité, $h = \sqrt{\mu p}$ le moment cinétique par unité de masse et ν l'anomalie vraie, comptée depuis le périapse.

Équation polaire et relations communes à toutes les coniques

$$r = \frac{p}{1+e\cos\nu}, \qquad r_p = \frac{p}{1+e}, \qquad h = r^2\dot{\nu} = \sqrt{\mu p}, \qquad V^2 = \frac{\mu}{p}\left(1+2e\cos\nu+e^2\right), \tag{D.1}$$

$$V_r = \dot{r} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\,e\sin\nu, \qquad V_\theta = r\dot{\nu} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\,(1+e\cos\nu), \qquad \tan\gamma = \frac{V_r}{V_\theta} = \frac{e\sin\nu}{1+e\cos\nu} \tag{D.2}$$

(γ est l'angle de la vitesse avec l'horizontale locale, dit *pente*). Énergie par unité de masse : $\mathscr{E} = \dfrac{V^2}{2} - \dfrac{\mu}{r} = \dfrac{\mu}{2p}\left(e^2-1\right)$.

Tableau récapitulatif

	Cercle	Ellipse	Parabole	Hyperbole
Excentricité	$e=0$	$0<e<1$	$e=1$	$e>1$
Demi-grand axe	$a=r$	$a=\dfrac{p}{1-e^2}>0$	$a\to\infty$	$a=\dfrac{p}{1-e^2}<0$
Énergie $\mathscr{E}$	$-\dfrac{\mu}{2a}$	$-\dfrac{\mu}{2a}<0$	0	$-\dfrac{\mu}{2a}>0$
Vitesse	$\sqrt{\dfrac{\mu}{a}}$	$\sqrt{\mu\left(\dfrac{2}{r}-\dfrac{1}{a}\right)}$	$\sqrt{\dfrac{2\mu}{r}}$	$\sqrt{\mu\left(\dfrac{2}{r}-\dfrac{1}{a}\right)}$
Périapse r_p	a	$a(1-e)$	$p/2$	$a(1-e)=\lvert a\rvert(e-1)$
Apoapse r_a	a	$a(1+e)$	∞	—
Demi-petit axe	a	$b=a\sqrt{1-e^2}$	—	$b=\lvert a\rvert\sqrt{e^2-1}$
Vitesse à l'infini	—	—	0	$V_\infty=\sqrt{\mu/\lvert a\rvert}$
Anomalie vraie max.	—	—	$\pm180^\circ$	$\nu_\infty=\arccos(-1/e)$
Période	$2\pi\sqrt{a^3/\mu}$	$2\pi\sqrt{a^3/\mu}$	—	—
Anomalie auxiliaire	—	$r=a(1-e\cos E)$	$r=\frac{p}{2}(1+D^2)$	$r=a(1-e\cosh H)$
Éq. de Kepler	$M=E$	$M=E-e\sin E$	$M=D+D^3/3$ (Barker)	$M=e\sinh H-H$
Moyen mouvement	$\sqrt{\mu/a^3}$	$\sqrt{\mu/a^3}$	$2\sqrt{\mu/p^3}$	$\sqrt{\mu/\lvert a\rvert^3}$
Lien avec ν	—	$\tan\frac{\nu}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{E}{2}$	$D=\tan\frac{\nu}{2}$	$\tan\frac{\nu}{2}=\sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\tanh\frac{H}{2}$

TABLE D.1 – Principales formules du mouvement képlérien selon le type de conique.

Ellipse : relations géométriques

$$a^2 = b^2 + c^2, \quad e = \frac{c}{a}, \quad p = \frac{b^2}{a} = a(1-e^2), \quad r_p + r_a = 2a, \quad e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}, \quad \text{aire} = \pi ab \tag{D.3}$$

$$r = a(1 - e\cos E), \quad \cos\nu = \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E}, \quad \sin\nu = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin E}{1 - e\cos E}, \quad \cos E = \frac{e + \cos\nu}{1 + e\cos\nu} \tag{D.4}$$

Coordonnées dans le repère périfocal (origine au foyer) : $x = a(\cos E - e) = r\cos\nu$, $y = b\sin E = r\sin\nu$.
Vitesses aux apsides : $V_p = \sqrt{\frac{\mu}{a}\frac{1+e}{1-e}}$, $V_a = \sqrt{\frac{\mu}{a}\frac{1-e}{1+e}}$, $V_p r_p = V_a r_a = h$.

Hyperbole : relations utiles pour les survols

$$e = 1 + \frac{r_p V_\infty^2}{\mu}, \qquad b = \frac{\mu}{V_\infty^2}\sqrt{e^2-1} = r_p\sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \quad \text{(paramètre d'impact)}, \tag{D.5}$$

$$\sin\frac{\delta}{2} = \frac{1}{e} \quad \text{(angle de déviation)}, \qquad V_p = \sqrt{V_\infty^2 + \frac{2\mu}{r_p}}, \tag{D.6}$$

$$\Delta V_{\max} = 2V_\infty \sin\frac{\delta}{2} = \frac{2V_\infty}{1 + r_p V_\infty^2/\mu} \quad \text{(assistance gravitationnelle)}. \tag{D.7}$$

Éléments orbitaux à partir du vecteur d'état

Avec $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{v}$ connus dans un repère de référence $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$:

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{N} = \boldsymbol{Z} \wedge \boldsymbol{h}, \qquad \boldsymbol{e} = \frac{1}{\mu}\left[\left(v^2 - \frac{\mu}{r}\right)\boldsymbol{r} - (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{v}\right], \tag{D.8}$$

$$p = \frac{h^2}{\mu}, \qquad a = \left(\frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu}\right)^{-1}, \qquad e = \|\boldsymbol{e}\|, \tag{D.9}$$

$$\cos i = \frac{h_Z}{h}, \qquad \cos\Omega = \frac{N_X}{N} \quad (\Omega > \pi \text{ si } N_Y < 0), \tag{D.10}$$

$$\cos\omega = \frac{\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{e}}{Ne} \quad (\omega > \pi \text{ si } e_Z < 0), \qquad \cos\nu = \frac{\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}}{er} \quad (\nu > \pi \text{ si } \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v} < 0). \tag{D.11}$$

Vecteur d'état à partir des éléments orbitaux

Résoudre l'équation de Kepler pour E à partir de $M = n(t - t_p)$, puis calculer ν et r ; dans le repère périfocal $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{W})$:

$$\boldsymbol{r} = r(\cos\nu\,\boldsymbol{P} + \sin\nu\,\boldsymbol{Q}), \qquad \boldsymbol{v} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\left[-\sin\nu\,\boldsymbol{P} + (e + \cos\nu)\,\boldsymbol{Q}\right], \tag{D.12}$$

puis appliquer la matrice de passage $R_Z(\Omega)R_X(i)R_Z(\omega)$ de l'équation (4.6).

Perturbations séculaires dues au J_2

Avec $p = a(1-e^2)$ et R le rayon équatorial :

$$\dot{\Omega} = -\frac{3}{2} n J_2 \left(\frac{R}{p}\right)^2 \cos i, \qquad \dot{\omega} = \frac{3}{4} n J_2 \left(\frac{R}{p}\right)^2 \left(5\cos^2 i - 1\right), \tag{D.13}$$

$$\dot{M} = n\left[1 + \frac{3}{4} J_2 \left(\frac{R}{p}\right)^2 \sqrt{1-e^2}\left(3\cos^2 i - 1\right)\right]. \tag{D.14}$$

Orbite héliosynchrone : $\dot{\Omega} = 2\pi/\text{an} = 0{,}9856°/\text{jour}$. Inclinaison critique : $i = 63{,}43°$ ou $116{,}57°$.

Manœuvres impulsionnelles

$$\text{Hohmann} : \Delta V_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}}\left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1+r_2}} - 1\right), \quad \Delta V_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}}\left(1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1+r_2}}\right), \quad t_H = \pi\sqrt{\frac{(r_1+r_2)^3}{8\mu}} \tag{D.15}$$

$$\text{Changement de plan} : \Delta V = 2V_S \sin\frac{\Delta i}{2}; \qquad \text{rotation des apsides} : \Delta V = 2\sqrt{\frac{\mu}{p}}\, e \sin\frac{\Delta\omega}{2}; \tag{D.16}$$

avec $V_S = V_\theta$ la composante transverse de la vitesse au nœud ($V_S = V$ sur orbite circulaire ou aux apsides) ;

$$\text{Tsiolkovski} : \Delta V = g_0 I_{\text{sp}} \ln\frac{m_0}{m_f}, \qquad \text{phasage} : \Delta T = 3\pi\sqrt{\frac{a}{\mu}}\,\Delta a. \tag{D.17}$$

Annexe E : Constantes et données utiles

Les valeurs ci-dessous sont celles des résolutions de l'UAI (2009, 2012, 2015), de CODATA 2018 et des éphémérides DE440 du JPL. Le paramètre gravitationnel $\mu = GM$ est connu bien plus précisément que G et M séparément ; c'est lui qu'il faut utiliser dans les calculs.

Grandeur	Symbole	Valeur	Unité
Constante de la gravitation	G	$6{,}674\,30 \cdot 10^{-11}$	$\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$
Vitesse de la lumière	c	299 792 458 (exact)	m/s
Unité astronomique	UA	149 597 870,700 (exact)	km
Année-lumière	al	$63\,241{,}1$ UA $= 9{,}4607 \cdot 10^{12}$	km
Parsec	pc	$206\,264{,}8$ UA $= 3{,}2616$ al	
Année julienne		365,25 (exact)	jours de 86 400 s
Année sidérale		365,256 36	jours
Année tropique		365,242 19	jours
Jour sidéral		86 164,0905	s
Mois sidéral		27,321 66	jours
Mois synodique		29,530 59	jours
Obliquité de l'écliptique (J2000)	ε	$23°26'21{,}4'' = 23{,}439\,29°$	
Précession des équinoxes		$50{,}29''$/an (période 25 772 ans)	
Constante solaire (1 UA)	Φ	1361	$\mathrm{W/m^2}$
Pression de radiation (1 UA)	P	$4{,}54 \cdot 10^{-6}$	$\mathrm{N/m^2}$
Paramètre gravitationnel du Soleil	$\mu_\odot$	$1{,}327\,124\,400 \cdot 10^{11}$	$\mathrm{km^3/s^2}$
Masse du Soleil	$M_\odot$	$1{,}9884 \cdot 10^{30}$	kg
Rayon du Soleil	$R_\odot$	695 700	km
Luminosité du Soleil	$L_\odot$	$3{,}828 \cdot 10^{26}$	W
Paramètre gravitationnel de la Terre	$\mu_\oplus$	398 600,4418	$\mathrm{km^3/s^2}$
Masse de la Terre	$M_\oplus$	$5{,}9722 \cdot 10^{24}$	kg
Rayon équatorial (WGS 84)	$R_\oplus$	6 378,137	km
Aplatissement	f	$1/298{,}257\,223\,563$	
Rayon polaire		6 356,752	km
Harmonique J_2	J_2	$1{,}082\,63 \cdot 10^{-3}$	
Harmoniques J_3, J_4		$-2{,}53 \cdot 10^{-6}$, $-1{,}62 \cdot 10^{-6}$	
Harmoniques C_{22}, S_{22}		$1{,}57 \cdot 10^{-6}$, $-0{,}90 \cdot 10^{-6}$	
Vitesse de rotation	$\omega_\oplus$	$7{,}292\,115 \cdot 10^{-5}$	rad/s
Rapport de masses Soleil/Terre		332 946,0	
Rayon de la sphère d'influence	r_{SI}	$0{,}925 \cdot 10^{6}$	km
Rayon de Hill	r_H	$1{,}50 \cdot 10^{6}$	km
Rayon de l'orbite géostationnaire	r_{GEO}	42 164,2	km
Paramètre gravitationnel de la Lune	$\mu_\leftmoon$	4 902,800	$\mathrm{km^3/s^2}$
Rapport de masses Terre/Lune		81,3006	
Rayon de la Lune	$R_\leftmoon$	1 737,4	km
Demi-grand axe de l'orbite lunaire	$a_\leftmoon$	384 400	km
Excentricité, inclinaison sur l'écliptique		0,0549 ; 5,145°	
Régression des nœuds		période 18,61 ans	
Précession du périgée		période 8,85 ans	

TABLE E.1 – Constantes astronomiques et géodésiques usuelles.

Planète	a (UA)	e	i (°)	T (an)	$M_\odot/M$	μ (km^3/s^2)	$R_{\text{éq}}$ (km)	J_2
Mercure	0,3871	0,2056	7,005	0,2408	6 023 600	$2{,}2032 \cdot 10^4$	2439,7	$5{,}0 \cdot 10^{-5}$
Vénus	0,7233	0,0068	3,395	0,6152	408 524	$3{,}2486 \cdot 10^5$	6051,8	$4{,}5 \cdot 10^{-6}$
Terre	1,0000	0,0167	0,000	1,0000	332 946	$3{,}9860 \cdot 10^5$	6378,1	$1{,}083 \cdot 10^{-3}$
Mars	1,5237	0,0934	1,850	1,8808	3 098 704	$4{,}2828 \cdot 10^4$	3396,2	$1{,}956 \cdot 10^{-3}$
Jupiter	5,2029	0,0484	1,303	11,862	1047,35	$1{,}2669 \cdot 10^8$	71 492	$1{,}470 \cdot 10^{-2}$
Saturne	9,5370	0,0539	2,489	29,457	3497,9	$3{,}7931 \cdot 10^7$	60 268	$1{,}632 \cdot 10^{-2}$
Uranus	19,189	0,0473	0,773	84,02	22 903	$5{,}7940 \cdot 10^6$	25 559	$3{,}51 \cdot 10^{-3}$
Neptune	30,070	0,0086	1,770	164,8	19 412	$6{,}8351 \cdot 10^6$	24 764	$3{,}54 \cdot 10^{-3}$
Pluton (planète naine)	39,48	0,2488	17,16	247,9	$1{,}36 \cdot 10^8$	869,6	1188	—

TABLE E.2 – Éléments orbitaux moyens (époque J2000, repère écliptique) et paramètres physiques des planètes. Les périodes sont sidérales ; $M_\odot/M$ se rapporte au système planète et satellites (sauf pour la Terre, où la Lune est exclue), μ et J_2 à la planète seule, J_2 étant rapporté au rayon $R_{\text{éq}}$ indiqué.

Orbite terrestre	altitude (km)	V (km/s)	T	V_L (km/s)	remarque
Surface (fictif)	0	7,905	84,5 min	11,18	première vitesse cosmique
LEO	400	7,669	92,6 min	10,85	ISS
LEO	800	7,452	100,9 min	10,54	SPOT, héliosynchrone
MEO	20 200	3,873	11 h 59 min	5,48	GPS
GEO	35 786	3,075	23 h 56 min	4,35	géostationnaire
Lune	384 400 (rayon)	1,018	27,45 j	1,44	masse nulle (Lune : 27,32 j)

TABLE E.3 – Vitesses circulaires, périodes et vitesses de libération pour quelques altitudes autour de la Terre.

Annexe F : Exercices corrigés

Les valeurs numériques sont celles de l'annexe E. Les solutions sont données de façon condensée ; il est conseillé de refaire les calculs.

Exercice 1 : orbites circulaires terrestres

a) Calculer la vitesse et la période d'un satellite en orbite circulaire à 500 km d'altitude.

b) Calculer le rayon et la vitesse de l'orbite géostationnaire, dont la période est égale au jour sidéral.

c) Quelle vitesse supplémentaire faudrait-il donner au satellite de la question a) pour qu'il s'échappe de l'attraction terrestre ?

Solution. a) $r = 6878{,}1$ km ; $V = \sqrt{\mu/r} = \sqrt{398600/6878{,}1} = 7{,}61$ km/s ; $T = 2\pi\sqrt{r^3/\mu} = 5677$ s $= 94{,}6$ min. b) $a = (\mu T^2/4\pi^2)^{1/3}$ avec $T = 86\,164{,}1$ s : $a = 42\,164$ km, soit 35 786 km d'altitude ; $V = 3{,}075$ km/s. c) $V_L = \sqrt{2}V = 10{,}77$ km/s, soit un supplément de 3,15 km/s ; on remarquera que c'est moins que le ΔV total d'un transfert vers l'orbite géostationnaire (exercice 3).

Exercice 2 : équation de Kepler

Une orbite a une excentricité $e = 0{,}1$. Calculer l'anomalie excentrique, l'anomalie vraie et le rayon r/a lorsque l'anomalie moyenne vaut $M = 30°$, par la méthode de Newton en partant de $E_0 = M$.

Solution. $M = 0{,}523\,60$ rad. Itération de Newton $E_{k+1} = E_k - (E_k - e\sin E_k - M)/(1 - e\cos E_k)$: $E_1 = 0{,}523\,60 + 0{,}050\,00/0{,}913\,40 = 0{,}578\,34$; $E_2 = 0{,}578\,34 - 0{,}000\,077/0{,}916\,26 = 0{,}578\,26$; $E_3 = E_2$ à 10^{-8} près. Donc $E = 0{,}578\,26$ rad $= 33{,}13°$. Puis $\tan(\nu/2) = \sqrt{1{,}1/0{,}9}\tan(E/2) = 0{,}3289$, d'où $\nu = 36{,}41°$, et $r/a = 1 - e\cos E = 0{,}916$. On vérifie que $\nu > E > M$, comme toujours entre le périastre et l'apoastre.

Exercice 3 : transfert de Hohmann et mise à poste géostationnaire

Un satellite est injecté par son lanceur sur une orbite circulaire à 300 km d'altitude, inclinée de 5,2° (latitude de Kourou).

a) Calculer les deux impulsions du transfert de Hohmann vers l'orbite géostationnaire et la durée du transfert.

b) La correction d'inclinaison est combinée à la seconde impulsion. De combien augmente-t-elle le ΔV ? Que se passerait-il si on la faisait en orbite basse ?

c) Avec une impulsion spécifique de 320 s (propulsion biergol), quelle fraction de la masse initiale du satellite représentent les ergols nécessaires au transfert ?

Solution. a) $r_1 = 6678{,}1$ km, $r_2 = 42\,164$ km, $a_t = 24\,421$ km. $V_{c1} = 7{,}726$ km/s, $V_p = \sqrt{\mu(2/r_1 - 1/a_t)} = 10{,}152$ km/s, d'où $\Delta V_1 = 2{,}426$ km/s. $V_a = 1{,}608$ km/s, $V_{c2} = 3{,}075$ km/s, d'où $\Delta V_2 = 1{,}467$ km/s. Total 3,893 km/s ; durée $t_H = \pi\sqrt{a_t^3/\mu} = 18\,990$ s $= 5$ h 16 min. b) À l'apogée, la manœuvre combinée vaut $\Delta V_2' = \sqrt{V_a^2 + V_{c2}^2 - 2V_aV_{c2}\cos 5{,}2°} = 1{,}481$ km/s : le changement de plan ne coûte que 14 m/s de plus. En orbite basse, il coûterait $2V_{c1}\sin(2{,}6°) = 701$ m/s : c'est pourquoi on le fait toujours à l'apogée, et pourquoi les bases de lancement proches de l'équateur sont avantageuses. c) Tsiolkovski : $m_f/m_0 = \exp(-\Delta V/(g_0 I_{sp})) = \exp(-3907/3138) = 0{,}288$: les ergols représentent 71 % de la masse au lancement. C'est pourquoi les lanceurs injectent en pratique directement sur l'orbite de transfert (GTO), le satellite n'ayant plus que $\Delta V_2'$ à fournir (38 % d'ergols), et pourquoi la propulsion électrique ($I_{sp} \simeq 1500$ à 3000 s) séduit les opérateurs malgré des transferts de plusieurs mois.

Exercice 4 : orbite héliosynchrone et dérive du nœud

a) Calculer l'inclinaison d'une orbite héliosynchrone circulaire à 800 km d'altitude.

b) Calculer la dérive journalière du nœud ascendant de la Station spatiale internationale ($h = 420$ km, $i = 51{,}6°$). Combien de temps faut-il pour que le plan de l'orbite fasse un tour complet ?

Solution. a) $a = 7178{,}1$ km, $n = \sqrt{\mu/a^3} = 1{,}038 \cdot 10^{-3}$ rad/s, $(R/a)^2 = 0{,}7895$. La condition $\dot\Omega = -\frac{3}{2} n J_2 (R/a)^2 \cos i = +1{,}991 \cdot 10^{-7}$ rad/s donne $\cos i = -0{,}1496$, soit $i = 98{,}6°$. b) $a = 6798{,}1$ km, $n = 1{,}126 \cdot 10^{-3}$ rad/s, $(R/a)^2 = 0{,}8803$, $\cos i = 0{,}6211$: $\dot\Omega = -1{,}0\,\mu$rad/s $= -4{,}95°$/jour. Le plan de l'orbite fait un tour en 73 jours, vers l'ouest : c'est ce qui fait varier l'heure des passages de l'ISS et les conditions d'éclairement à bord (« saisons bêta »).

Exercice 5 : points de Lagrange du système Soleil-Terre

a) À l'aide des développements en α de la section 6.4, calculer les distances Terre-L_1 et Terre-L_2 ($\mu = 3{,}0035 \cdot 10^{-6}$).

b) Pourquoi un satellite placé exactement en L_2 ne peut-il pas y rester ? Quelle est l'échelle de temps de l'instabilité ?

c) Calculer la période de libration d'un objet autour de L_4 du système Soleil-Terre.

Solution. a) $\alpha = (\mu/3)^{1/3} = 0{,}010\,00$; $r_{L_1} \simeq \alpha - \alpha^2/3 = 0{,}009\,97$ et $r_{L_2} \simeq \alpha + \alpha^2/3 = 0{,}010\,04$, soit 1,492 et 1,502 millions de km. Le terme dominant, $\alpha\, d$, est le rayon de Hill de la Terre. b) L_2 est un col du potentiel effectif : le mouvement linéarisé possède une valeur propre réelle positive $\lambda \simeq 2{,}5\, n$, de sorte qu'un écart initial est multiplié par e en $1/\lambda \simeq 23$ jours. Le télescope James Webb décrit donc une orbite de halo autour de L_2, corrigée par de petites manœuvres de quelques cm/s, toutes les trois semaines au début de la mission, toutes les six semaines ensuite. c) $2\pi/|\lambda_{3,4}| = 2\pi/\sqrt{27\mu/4}$ en unités de $1/n$, soit $2\pi/(4{,}50 \cdot 10^{-3}) = 1396$ unités, c'est-à-dire $1396/(2\pi) = 222$ années. Les Troyens terrestres connus librent effectivement sur quelques siècles autour de L_4.

Exercice 6 : paramètre de Tisserand

Calculer le paramètre de Tisserand par rapport à Jupiter ($a_J = 5{,}203$ UA) de la comète 67P/Tchourioumov-Guérassimenko ($a = 3{,}463$ UA, $e = 0{,}641$, $i = 7{,}04°$) et de la comète de Halley ($a = 17{,}83$ UA, $e = 0{,}967$, $i = 162{,}3°$). Commenter.

Solution. $T_J = a_J/a + 2\sqrt{(a/a_J)(1-e^2)}\cos i$. Pour 67P : $a/a_J = 0{,}6656$, $T_J = 1{,}502 + 2\sqrt{0{,}6656 \times 0{,}5891} \times 0{,}9925 = 2{,}75$: comète de la famille de Jupiter, dont l'orbite est régulièrement remaniée par la planète (son périhélie est passé de 2,7 à 1,3 UA en 1959). Pour Halley : $a/a_J = 3{,}427$, $\cos i = -0{,}953$ (orbite rétrograde), $T_J = 0{,}292 - 0{,}899 = -0{,}61$: comète de type Halley, probablement issue du nuage d'Oort, dont l'orbite rétrograde n'est pas contrôlée par Jupiter, même si la planète en perturbe encore la période.

Exercice 7 : résonance spin-orbite de la Lune

Pour la Lune, $(B-A)/C = 2{,}28 \cdot 10^{-4}$ et $n = 2\pi/27{,}32$ j.

a) Calculer le paramètre ε du hamiltonien (7.25) et la largeur de la zone de libration en vitesse de rotation.

b) Calculer la période des petites oscillations de libration en longitude.

c) Le couple Pluton-Charon ($\mu_2 \simeq 0{,}109$) possède-t-il des points L_4 et L_5 stables ?

Solution. a) $\varepsilon = \frac{3}{4}(B-A)/C = 1{,}71 \cdot 10^{-4}$. La demi-largeur de la résonance est $2\sqrt{\varepsilon}\, n = 0{,}026\, n$: la Lune reste capturée en rotation synchrone tant que l'écart entre sa vitesse de rotation et le moyen mouvement reste inférieur à 2,6 %. b) La pulsation des petites oscillations est $\omega_0 = 2\sqrt{\varepsilon}\, n = 0{,}026\,15\, n$,

d'où une période $T_0 = 27{,}32/0{,}026\,15 = 1045$ jours $= 2{,}86$ ans. C'est bien la période de la libration physique libre en longitude de la Lune (2,9 ans), mesurée par télémétrie laser ; son amplitude, très faible (1,3″ d'après Rambaux et Williams, 2011), n'est pourtant pas nulle : la dissipation aurait dû l'amortir, ce qui suggère une excitation géologiquement récente. c) Non : $\mu_2 \simeq 0{,}109 > \mu_c = 0{,}0385$. Pluton-Charon n'est pas un cas isolé : le couple Orcus-Vanth, d'autres objets transneptuniens binaires et certains astéroïdes binaires ont eux aussi des points triangulaires instables.

Exercice 8 : assistance gravitationnelle

Une sonde arrive au voisinage de Jupiter ($\mu_J = 1{,}267 \cdot 10^8$ km^3/s^2, $R_J = 71\,492$ km, $V_J = 13{,}06$ km/s) avec une vitesse relative $V_\infty = 10$ km/s et survole la planète à $5R_J$ de son centre.

a) Calculer l'excentricité de l'hyperbole de survol et l'angle de déviation.

b) Quel gain maximal de vitesse héliocentrique la sonde peut-elle obtenir ? Comparer à la vitesse orbitale de Jupiter.

c) La sonde arrive avec une vitesse héliocentrique de 16 km/s ; quelle est sa vitesse après le survol dans le cas le plus favorable ? A-t-elle atteint la vitesse de libération du Système solaire au niveau de Jupiter ?

Solution. a) $e = 1 + r_p V_\infty^2/\mu_J = 1 + 357\,460 \times 100/1{,}267 \cdot 10^8 = 1{,}282$; $\sin(\delta/2) = 1/e = 0{,}780$, soit $\delta = 102{,}5°$. b) $\Delta V_{\max} = 2V_\infty \sin(\delta/2) = 15{,}6$ km/s, plus que la vitesse orbitale de Jupiter elle-même, et sans une goutte d'ergols. c) L'angle θ^- entre $\boldsymbol{V}_\infty^-$ et $\boldsymbol{V}_J$ est fixé par la vitesse d'arrivée : $(V^-)^2 = V_J^2 + V_\infty^2 + 2V_J V_\infty \cos\theta^-$ donne $\theta^- = 93{,}2°$. Le cas le plus favorable est celui où le survol fait tourner $\boldsymbol{V}_\infty$ de $\delta = 102{,}5°$ vers $\boldsymbol{V}_J$: $\boldsymbol{V}_\infty^+$ ne fait plus alors qu'un angle de 9,3° avec $\boldsymbol{V}_J$, et $V^+ = \sqrt{V_J^2 + V_\infty^2 + 2V_J V_\infty \cos 9{,}3°} = 23{,}0$ km/s, contre 16 km/s à l'arrivée. La borne $V_J + V_\infty = 23{,}1$ km/s, atteinte lorsque $\boldsymbol{V}_\infty^+$ ressort parallèle à $\boldsymbol{V}_J$, supposerait un angle d'arrivée $\theta^- = \delta$. La vitesse de libération à la distance de Jupiter vaut $\sqrt{2\mu_\odot/a_J} = 18{,}5$ km/s : la sonde est sur une hyperbole héliocentrique et quittera le Système solaire, comme les sondes Voyager, Pioneer et New Horizons.

Exercice 9 : trigonométrie sphérique et durée du jour

a) En appliquant la formule des cosinus au triangle sphérique (pôle, zénith, Soleil), exprimer la hauteur h du Soleil en fonction de la latitude φ, de sa déclinaison δ et de son angle horaire H (angle, compté depuis le méridien, dont la Terre a tourné depuis midi).

b) En déduire l'angle horaire du coucher du Soleil et la durée du jour à Toulouse ($\varphi = 43{,}6°$) aux solstices, sans tenir compte de la réfraction.

c) Quelle est la hauteur du Soleil à midi aux mêmes dates ?

Solution. a) Les côtés du triangle sont $90° - \varphi$ (pôle-zénith), $90° - \delta$ (pôle-Soleil) et $90° - h$ (zénith-Soleil), l'angle au pôle est H : $\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos H$. b) Au coucher, $h = 0$: $\cos H_0 = -\tan\varphi \tan\delta$. Solstice de juin ($\delta = +23{,}44°$) : $\cos H_0 = -0{,}9523 \times 0{,}4336 = -0{,}4129$, $H_0 = 114{,}4°$, durée du jour $2H_0/15° = 15{,}25$ h $= 15$ h 15 min (15 h 26 min avec la réfraction et le demi-diamètre solaire). Solstice de décembre ($\delta = -23{,}44°$) : $H_0 = 65{,}6°$, soit 8 h 45 min. c) À midi, $H = 0$ et $h = 90° - \varphi + \delta$: 69,8° en juin, 23,0° en décembre. Ces formules sont celles qu'utilise tout logiciel de calcul d'éclairement ou de conception de panneaux solaires.

Références

[1] Arnold V., *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Éditions Mir, Moscou, 1976.

[2] Coddington E. A., Levinson N., *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, New York, 1955.

[3] Landau L., Lifchitz E., *Physique théorique, tome 1 : Mécanique*, Éditions Mir, Moscou, 1964.

[4] Szebehely V., *Theory of Orbits: The Restricted Problem of Three Bodies*, Academic Press, 1967.

[5] Gastineau M., Laskar J., *TRIP, manuel de référence*, IMCCE, Observatoire de Paris, https://www.imcce.fr/trip.

[6] Murray C. D., Dermott S. F., *Solar System Dynamics*, Cambridge University Press, 1999.

[7] Danjon A., *Astronomie générale*, réédition Blanchard, Paris, 1980.

[8] Kovalevsky J., *Introduction à la mécanique céleste*, Armand Colin, 1963.

[9] Benest D., Froeschlé C. (éd.), *Les méthodes modernes de la mécanique céleste*, Éditions Frontières, 1990.

[10] Goldstein H., Poole C., Safko J., *Classical Mechanics*, 3e éd., Addison-Wesley, 2002.

[11] Stiefel E., Scheifele G., *Linear and Regular Celestial Mechanics*, Springer-Verlag, 1971.

[12] Brouwer D., Clemence G., *Methods of Celestial Mechanics*, Academic Press, 1961.

[13] Tisserand F., *Traité de mécanique céleste* (4 tomes), Gauthier-Villars, 1889–1896.

[14] Poincaré H., *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* (3 tomes), Gauthier-Villars, 1892–1899 ; réédition Dover, 1957.

[15] Wisdom J., Peale S. J., Mignard F., « The chaotic rotation of Hyperion », *Icarus* 58, 137–152, 1984.

[16] Laskar J., « A numerical experiment on the chaotic behaviour of the Solar System », *Nature* 338, 237–238, 1989.

[17] Laskar J., « Large-scale chaos in the Solar System », *Astronomy & Astrophysics* 287, L9–L12, 1994.

[18] Laskar J., Gastineau M., « Existence of collisional trajectories of Mercury, Mars and Venus with the Earth », *Nature* 459, 817–819, 2009.

[19] Sussman G. J., Wisdom J., « Chaotic evolution of the Solar System », *Science* 257, 56–62, 1992.

[20] Vallado D. A., *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*, 4e éd., Microcosm Press, 2013.

[21] Battin R. H., *An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics*, AIAA Education Series, 1999.

[22] Zarrouati O., *Trajectoires spatiales*, Cépaduès / CNES, 1987.

[23] CNES, *Mécanique spatiale*, tomes I et II, Cépaduès, 1995.

[24] Petit G., Luzum B. (éd.), *IERS Conventions (2010)*, IERS Technical Note 36, 2010.

[25] Capitaine N. *et al.*, « Expressions for IAU 2000 precession quantities », *Astronomy & Astrophysics* 412, 567–586, 2003.

[26] Gladman B. *et al.*, « Synchronous locking of tidally evolving satellites », *Icarus* 122, 166–192, 1996.

[27] Chenciner A., Montgomery R., « A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses », *Annals of Mathematics* 152, 881–901, 2000.

[28] Luger R. *et al.*, « A seven-planet resonant chain in TRAPPIST-1 », *Nature Astronomy* 1, 0129, 2017.