

Stage de recherche pour les élèves de première année
des Écoles normales supérieures de Lyon et de Paris

Titre : Etude du modèle d'auto-organisation de Jain–Krishna
Thématique : Graphe aléatoire ; auto-organisation ; complexité
Encadrement : Florian Simatos
Professeur en probabilités et statistique
<http://personnel.isae.fr/florian-simatos/>
florian.simatos@isae.fr
Localisation : ISAE–Supaero, Toulouse

Problématique générale

Comment, à partir d'une soupe primitive de molécules, la vie est-elle apparue ? Afin de répondre à cette question et de comprendre comment des systèmes peuvent s'auto-organiser sous la pression de la sélection naturelle, et donc sans intervention extérieure, Jain et Krishna [1] ont proposé à la fin des années 90 un modèle de graphe aléatoire qui évolue dans le temps.

Objectif du stage

Dans ce modèle, on considère un nombre fixe n de nœuds. Chaque nœud représente une espèce/molécule, et les arêtes (orientées) leurs interactions. Au début, les arêtes sont tirées de manière indépendante et identiquement distribuée selon un modèle d'Erdős–Rényi orienté avec une probabilité p de présence d'une arête.

Les espèces interagissent sur le graphe via des équations catalytiques et, à intervalles réguliers, l'espèce la plus vulnérable est remplacée par une nouvelle espèce connectée de manière aléatoire aux espèces déjà présentes. Jain et Krishna ont obtenu des résultats de simulation étudiant l'auto-organisation de ce système : le graphe de départ est un graphe d'Erdős–Rényi, mais les équilibres des équations catalytiques favorisent au cours du temps des structures particulières, appelées ensembles auto-catalytiques (ACS, pour Auto-Catalytic Sets). Formellement, il s'agit de sous-graphes dont chaque élément possède au moins une arête entrante depuis un autre élément du sous-graphe considéré.

Ce modèle a été étudié par simulation, et de nombreuses questions restent en suspens. Par exemple, quelle est la loi du graphe limite ? la distribution des degrés suit-elle une loi de puissance, comme c'est souvent le cas pour les systèmes auto-organisés ? Quelle est l'influence du paramètre p , et des phénomènes de transition de phase ont-ils lieu ? Le but du stage sera d'étudier ces questions, principalement par simulation et, si possible, à l'aide d'arguments théoriques.

RÉFÉRENCES

- [1] Sanjay Jain and Sandeep Krishna. Emergence and growth of complex networks in adaptive systems. *Computer Physics Communications*, 121–122:116–121, 1999.