Calcul d'écoulements par méthode Vortex

Jérémie Gressier

mars 2007

Équations de Navier-Stokes incompressible

Bilan de masse

$$\text{div}(\rho \mathbf{V}) = 0$$

Bilan de quantité de mouvement

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho}\overrightarrow{\text{grad}}p + \text{div}\left(\nu \overrightarrow{\text{grad}}\mathbf{V}\right)$$

- si la viscosité est constante, l'équation d'énergie est découplé de ce système
- 3+1 inconnues $(\mathbf{V}, p)$ et 1+3 équations
- équations **elliptiques** : contraintes sévères de stabilité sur l'intégration en temps

Formulation non conservative

Bilan de masse

$$\mathrm{div}\mathbf{V} = 0$$

Bilan de quantité de mouvement

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\mathbf{V} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho}\overrightarrow{\mathrm{grad}}p + \nu \Delta \mathbf{V}$$

Définition de la vorticité : $\omega = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\mathbf{V}$

$\overrightarrow{\mathrm{rot}}$(qté mouvement) $\Longrightarrow$ $\displaystyle\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\omega = \omega \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\mathbf{V} + \nu \Delta \omega$

Équation de Helmoltz

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\omega = \omega \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\mathbf{V} + \nu \Delta \omega$$

- terme de transport par convection : couplage vorticité/vitesse
- terme de pression simplifié grâce à la relation barotropique
- terme source : variation par étirement (effet 3D)
- terme source : atténuation par amortissement visqueux

Cas de l'écoulement de fluide parfait 2D

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\omega = 0$$

Décomposition vorticité/potentiel de la vitesse

div$\mathbf{V} = 0 \Longrightarrow$ décomposition écoulement rotationnel/irrotationnel

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_\omega + \mathbf{V}_\varphi$$

$\mathbf{V}_\omega = \overrightarrow{\text{rot}}\psi$

- vitesse d'origine rotationnelle
- ψ fonction de courant
- satisfait automatiquement

$$\text{div}\mathbf{V} = 0$$

- représentation par *sources*

$\mathbf{V}_\varphi = \overrightarrow{\text{grad}}\varphi$

- vitesse d'origine potentielle
- rotationnel nul
- Équation de Laplace

$$\Delta\varphi = 0$$

$+$ conditions limites

Écoulement irrotationnel

$$\Delta\varphi = 0$$

Technique de résolution :

- méthode volumique basé sur maillage (EDP elliptique)
- méthode de singularités (distribuée sur les frontières)

Caractérise :

- écoulements de champ lointain (vent amont)
- permet de satisfaire de conditions limites de paroi
- écoulement irrotationnel donc non portant
- circulation concentrée aux parois

Écoulement rotationnel

$$\mathbf{V}_\omega = \overrightarrow{\text{rot}}\psi$$

- vitesse uniquement d'origine rotationnelle
- satisfait automatiquement

$$\text{div}\mathbf{V} = 0$$

- représentation à partir de *sources* : champ rotationnel
- $\omega(\mathbf{x}) \Longleftrightarrow \mathbf{V}_\omega(\mathbf{x})$

Tout champ de rotationnel $\omega(\mathbf{x})$ induit un champ de vitesse qui est solution de l'équation de continuité

Modèles de fluide incompressible
Méthodes de discrétisation
Méthodes Euler/Lagrange
Méthodes Vortex
Bureau d'Études
Équations de Navier-Stokes
Formulation potentiel
Formulation en rotationnel
Aspects numériques

Couplage vorticité/vitesse

Loi de Biot et Savart

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi}\iiint \frac{\omega(\mathbf{x}') \wedge (\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} d\mathbf{x}'$$

1. champ de rotationnel $\Longrightarrow$ calcul du champ de vitesse induit
2. Superposition du champ potentiel éventuel (champ lointain, effets parois)
3. Intégration de l'évolution du champ de rotationnel

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\omega = \omega\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\mathbf{V} + \nu\Delta\omega$$

Aspects numériques : couplage vorticité/vitesse

Calcul du champ de vitesse induit

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\omega(\mathbf{x}') \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d\mathbf{x}'$$

- chaque point dépend du champ de vorticité complet : couplage fort et coûteux
- solution : réduire le support non nul de $\omega(\mathbf{x})$
  $\Longrightarrow$ singularités ponctuelles, filaments, nappes

Aspects numériques : évolution

Intégration de l'équation d'évolution

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \omega = \omega \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \mathbf{V} + \nu \Delta \omega$$

- équation de convection/diffusion
- calcul de la vitesse sur le même support que $\omega\mathbf{x})$
- les termes étirement/diffusion peuvent nécessiter un maillage volumique
  (calculs d'opérateurs différentiels)

Cas 2D fluide parfait

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\omega = 0$$

- le terme d'étirement s'annule en 2D
- le terme de diffusion est nul en fluide parfait

L'équation de Helmholtz devient une simple équation de transport.

De plus, le champ de rotationnel est uniquement un scalaire.

Propriétés des méthode numériques 1/2

1. PRÉCISION :
   - le modèle continu est approché avec une erreur d'ordre connu
   - cette erreur dépend des pas caractéristiques de discrétisation
   - l'ordre de précision quantifie la variation de cette erreur
2. CONSISTANCE :
   - le modèle continu est représenté avec une erreur plus petite que l'ordre voulu
   - la consistance n'est vrai que jusqu'à un certain ordre de précision
3. STABILITÉ
4. CONVERGENCE

Propriétés des méthode numériques 2/2

1. PRÉCISION
2. CONSISTANCE
3. STABILITÉ :
   - un schéma est stable si la solution du calcul est effectivement la solution du problème discret
   - toute perturbation numérique est amortie
4. CONVERGENCE :
   - la solution discrète converge vers la solution continue lorsque les pas tendent vers 0

Théorème de Lax

un schéma consistant et stable est convergent

Calcul de dérivées

Définition :

$$\frac{du}{dx}(x_i) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_i + \Delta x) - u(x_i)}{\Delta x}$$

Différences finies :

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_i \simeq \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

erreur ?

Développement de Taylor : (de $u_{i\pm1}$ en x_i)

$$u_{i\pm1} = u_i \pm \left(\frac{du}{dx}\right)_i \Delta x + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_i \Delta x^2 + \mathcal{O}(\Delta x^3)$$

Dérivées du premier ordre

$$u_{i\pm1} = u_i \pm \left(\frac{du}{dx}\right)_i \Delta x + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_i \Delta x^2 + \mathcal{O}(\Delta x^3)$$

Différence décentrée aval (ordre 1)

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)$$

Différence centrée (ordre 2)

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

Interprétation géométrique

Convergence de la méthode

Soit

- $m(\ell)$ mesure de la solution discrète associé au pas caractéristique ℓ,
- p l'ordre de précision du schéma de discrétisation
- m_0 la solution exacte de cette mesure pour le problème continu

On a

- $m(\ell) = m_0 + \varepsilon(\ell)$
- $\varepsilon(\ell) = \mathcal{O}(\ell^p)$

On effectue 3 calculs (m_1, m_2, m_3) de pas (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) de ratios r.
On calcule l'ordre de la méthode selon

$$p = \frac{1}{\ln r} \ln \frac{m_3 - m_2}{m_2 - m_1}$$

Modèles de fluide incompressible
Méthodes de discrétisation
Méthodes Euler/Lagrange
Méthodes Vortex
Bureau d'Études
Principes de discrétisation
Équations différentielles ordinaires (ODE)
Intégration temporelle et précision

Extrapolation de Richardson

À partir de

- $m(\ell_1) = m_0 + k\,\ell_1^p + \mathcal{O}(\ell_1^{p+1})$
- $m(\ell_2) = m_0 + k\,(r\ell_1)^p + \mathcal{O}(\ell_1^{p+1})$

On peut calculer

$$m^\star = \frac{r^p m_1 - m_2}{r^p - 1} = m_1 + \frac{m_1 - m_2}{r^p - 1}$$

qui est une estimation d'ordre $p+1$ de m_0

Euler explicite

$$\frac{d\mathcal{U}}{dt} = F(\mathcal{U}, t)$$

Au premier ordre (développée en t_n),

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) = F(U^n, t_n)$$

Euler explicite

$$U^{n+1} \simeq U^n + \Delta t F(U^n, t_n)$$

Euler implicite

$$\frac{d\mathcal{U}}{dt} = F(\mathcal{U}, t)$$

Au premier ordre (développée en t_{n+1}),

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) = F(U^{n+1}, t_{n+1})$$

Euler implicite

$$U^{n+1} - \Delta t F(U^{n+1}, t_{n+1}) \simeq U^n$$

Forme linéarisée

$$U^{n+1} = \left[\mathbb{I} - \Delta t \left(\frac{\partial F}{\partial \mathcal{U}}\right)\right]^{-1} \cdot U^n$$

Prédicteur/correcteur

$$\frac{d\mathcal{U}}{dt} = F(\mathcal{U}, t)$$

$$\overline{U} = U^n + \frac{\Delta t}{2} F(U^n, t_n)$$

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t F\left(\overline{U}, t_n + \frac{\Delta t}{2}\right)$$

- 2 pas, 2 évaluations de F
- méthode d'ordre 2
- rapport coût O1/O2 à précision égale : $n^2/2n$

Méthodes de Runge et Kutta

Généralisation des méthodes p multi-pas

$$\overline{U}_i = U^n + \Delta t \sum_{j=0}^{i-1} \alpha_{ij} F(\overline{U}_j)$$

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t \sum_{i=1}^{p} \beta_i F(\overline{U}_i)$$

Tableau de Butcher associé

$$\begin{array}{r|ccc}
\gamma_0 = 0 & & & \\
\gamma_1 & \alpha_{1,0} & & \\
\gamma_i & \alpha_{i,0} & \alpha_{i,i-1} & \\
\gamma_p & \alpha_{p,0} & \alpha_{p,j} & \alpha_{p,p-1} \\
\hline
 & \beta_1 & \dots & \beta_p
\end{array}$$

Tableau de Butcher

$$\begin{array}{c|ccc}
\gamma_0 = 0 & & & \\
\gamma_1 & \alpha_{1,0} & & \\
\gamma_i & \alpha_{i,0} & \alpha_{i,i-1} & \\
\gamma_p & \alpha_{p,0} & \alpha_{p,j} & \alpha_{p,p-1} \\
\hline
 & \beta_1 & \dots & \beta_p
\end{array}$$

- consistance $\gamma_i = \sum_{j=0}^{i-1} \alpha_{i,j}$ et $\sum_{i=1}^{p} \beta_i = 1$
- minimisation des évaluations de F : maximum de $\alpha_{i,j} = 0$

Tableaux de Butcher : exemples

Euler explicite
$$\begin{array}{c|c}
0 & \\
\hline
 & 1
\end{array}$$

RK ordre 2
$$\begin{array}{c|cc}
0 & & \\
1/2 & 1/2 & \\
\hline
 & 0 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|cc}
0 & & \\
1 & 1 & \\
\hline
 & 1/2 & 1/2
\end{array}$$

RK ordre 4
$$\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
1/2 & 1/2 & & & \\
1/2 & 0 & 1/2 & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6
\end{array}$$

Euler/Lagrange : présentation

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}} \omega = \omega \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}} \mathbf{V} + \nu \Delta \omega$$

- **Approche Eulerienne**
  - les équations sont discrétisées localement (repère arbitraire)
  - discrétisation des opérateurs différentiels (repère)
  - discrétisation définie par un maillage (données localisées)
- **Approche Lagrangienne**
  - données associées à des "particules" (sens physique)
  - position donnée par intégration d'une équation de transport (LHS)
  - évolution des propriétés régie par le second membre (RHS)
  - support de calcul réduit à l'existence des "particules"

Méthodes Lagrangiennes : exemples

- capture de fronts et suivi d'interfaces
- injection et suivi de gouttes en diphasique
  (souvent couplé à un calcul Eulerien du champ de vitesse)
- méthodes à support de singularités libres
  (vortex, filaments, nappes)

Euler/Lagrange : avantages et défauts

- Représentation discrète du modèle
  ✓Lagrange : proche de la physique (prop. particule)
- Précision
  ✓Lagrange : très précise (pas de diffusion numérique pour le transport)
  X Euler : tend à diffuser les discontinuités ou phénomènes raides
- Stabilité
  ✓Lagrange : pas véritablement concernée par la stabilité
  X Euler : contrainte de stabilité (dépend beaucoup de la méthode)
- Robustesse
  X Lagrange : implémentation pour cas géom. complexes (parois)
  ✓Euler : souvent plus robuste (si stable)
- Coût
  X Lagrange : peuvent très efficace mais très coûteuse (nombre de particules, complexité N^2)
  ✓Euler : simple à implémenter/optimiser, coût raisonnable

Formulation Vorticité/Vitesse

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{\partial\omega}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\omega = 0$$

- transport de vorticité par convection : couplage vorticité/vitesse
- calcul de vitesse induite à partir du support de la vorticité
- calcul de vitesse induite par la loi de Biot & Savart
- effets 3D nécessitent le calcul de gradient de vitesse
- effet dissipatif nécessite le calcul du laplacien de la vitesse

? discrétisation et représentation de la vorticité

? discrétisation et représentation de la vitesse

Vortex ponctuels

- singularité tourbillonnaire ponctuelle (intensité, position, *orientation*)
- vitesse induite singulière à la position du vortex
  $\Longrightarrow$ peut nécessiter des régularisations (vortex blob)
- consistance et convergence sont prouvées
- coût : N^2 ! (approche multipôle, ou hybride sur maillage)
- 3D : le vortex n'est pas solution élémentaire (autres représentations ?)
  termes correctifs aux équations pour assurer la divergence nulle
- effets visqueux : création de vorticité donc de vortex supplémentaires
- redistribution des singularités ?

Modèles de fluide incompressible
Méthodes de discrétisation
Méthodes Euler/Lagrange
Méthodes Vortex
Bureau d'Études
Modèle Vorticité/Vitesse
Modèles de vorticité

Vortex en filaments

- représentation canonique en 3D
- divergence nulle assurée
- interactions topologiques plus complexes (emissions, parois)
- terme d'étirement naturellement représenté
- même problèmatique de coût que les singularités ponctuelles

Conditions limites

- paroi, champ lointain : calcul d'un champ potentiel associé
- symétrie, périodicité : éléments image

Algorithme

1. Initialisation des vortex (position, intensité)
2. Intégration temporelle sur n pas Δt
    - Mise à jour des positions et des intensités (si visqueux)
    - Post-traitement éventuel (historiques)
    - Affichage

Mise à jour des positions : boucle sur p prédicteurs

1. Calcul des vitesses induites
2. Calcul d'une position estimée

Validation de l'implémentation

1. calcul sur 1 vortex
2. calcul sur 2 vortex
   - même intensité : rotation autour du centre des 2 vortex
   - intensités opposées : translation orthogonale à l'axe des vortex
3. d'autres cas à solutions connues ?

Contrôle de l'erreur

Cas à 2 tourbillons

- Calcul à temps total fixé
- Variation du nombre de pas/itérations
- Analyse de l'évolution de l'erreur d'un critère
- Comparaison entre méthodes

? Convergence vers la solution théorique

Efficacité et coût

- Étude de temps passé dans les routines
- Optimisation du calcul ?

Simulation d'un coeur tourbillonaire

- Rotationnel constant dans le coeur
- Circulation monotone croissante puis constante à l'extérieur
- ? Répartition cohérente des vortex dans le coeur
- Intégration temporelle
- ? Évolution de la solution numérique

Simulation de 2 coeurs tourbillonaires

- Tourbillons co-rotatifs
- Échelle caractéristique d/r
- Intégration temporelle

? Dépendance numérique de l'appariement