ELASTICITE

CONTRAINTES ET DÉFORMATIONS

1.1 Efforts et forces internes dans une section
1.2 Définition et composantes des contraintes
1.3 Définition et composantes des déformations
1.4 Loi de Hooke généralisée
1.5 Courbe contrainte – déformation
1.6 Facteur de sécurité
1.7 Références

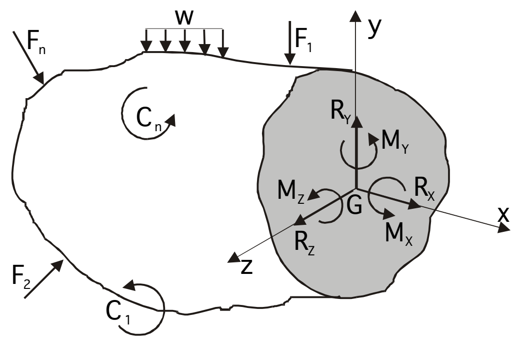
OBJECTIFS

- Comprendre le cheminement des efforts dans un élément structural : forces externes – efforts internes – forces internes – contraintes.
- Savoir calculer les efforts internes dans une section.
- Connaître les définitions des contraintes et des déformations et comprendre la représentation des contraintes et des déformations sur un cube élémentaire.
- Connaître les lois de comportement des matériaux de construction.
- Savoir utiliser les propriétés mécaniques du comportement linéaire élastique des matériaux : $\sigma_o, \tau_0, E, \nu, G$.
- Comprendre et savoir utiliser la loi de Hooke généralisée pour déterminer des variations de dimensions dans des éléments.
- Comprendre et savoir utiliser les notions de facteur de sécurité et de contrainte admissible.

1.1 EFFORTS ET FORCES INTERNES DANS UNE SECTION

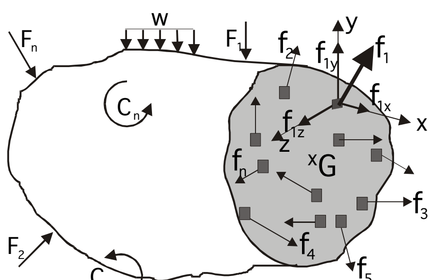
Les efforts internes dans une section équilibrent les forces externes appliquées sur le corps et sont déterminés en appliquant les équations d'équilibre au centroïde de la section :

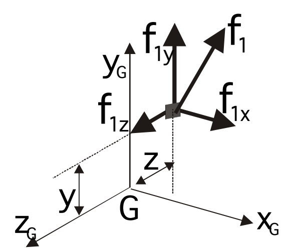
- $R_X = N$: effort normal perpendiculaire à la section, appliqué au centroïde de la section,
- $R_Y = V_Y$: effort tranchant parallèle à l'axe y, tangentiel à la section,
- $R_Z = V_Z$: effort tranchant parallèle à l'axe z, tangentiel à la section,
- $M_X = T$: moment de torsion autour de l'axe normal à la section,
- $M_Y = M_{fy}$: moment de flexion autour de l'axe y,
- $M_Z = M_{fz}$: moment de flexion autour de l'axe z.



$$\vec{R}_G = R_X\vec{i} + R_Y\vec{j} + R_Z\vec{k} = -\left[\sum F_X\vec{i} + \sum F_Y\vec{j} + \sum F_Z\vec{k}\right]$$
$$\vec{M}_G = M_X\vec{i} + M_Y\vec{j} + M_Z\vec{k} = -\left\{\left(\sum \vec{r}\times\vec{F}\right)_X + \sum C_X\right]\vec{i} + [\ldots]\right\}$$

Les forces internes *f* en chaque point de la matière équilibrent physiquement les forces externes. Les efforts internes (N, V, T, M) sont une représentation schématisée de la somme des efforts décomposés selon des axes prédéterminés. Les efforts internes servent à déterminer les contraintes et les déformations en considérant la géométrie du système. Elles servent non seulement aux fins de calcul mais permettent de considérer la réponse et la résistance du matériau en fonction de l'anisotropie de ce dernier.





Noter que dans l'exemple ci-dessus, x = 0.

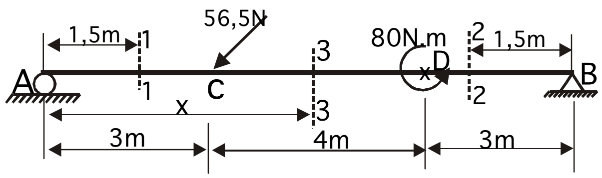
- $\int f_X = N = -\sum F_{X\,ext}$
- $\int f_Y = V_Y = -\sum F_{Y\,ext}$
- $\int f_Z = V_Z = -\sum F_{Z\,ext}$

- $\boxed{\int y\ f_Z + z\ f_Y = \int m_X = T = -\left[\left(\sum \vec{r}\times\vec{F}_{ext}\right)_X + \sum C_{X\,ext}\right]}$
- $\boxed{\int z\ f_X = \int m_Y = M_{fY} = -\left[\left(\sum \vec{r}\times\vec{F}_{ext}\right)_Y + \sum C_{Y\,ext}\right]}$
- $\boxed{\int y\ f_X = \int m_Z = M_{fZ} = -\left[\left(\sum \vec{r}\times\vec{F}_{ext}\right)_Z + \sum C_{Z\,ext}\right]}$

Le calcul des efforts internes se fait au moyen de la méthode des sections (équilibre d'un élément de structure). Les diagrammes des efforts normaux (DEN), des moments de torsion (DMT), des moments fléchissant (DMF), des efforts tranchants (DET) permettent d'obtenir les valeurs des efforts internes en toute section d'un élément structural.

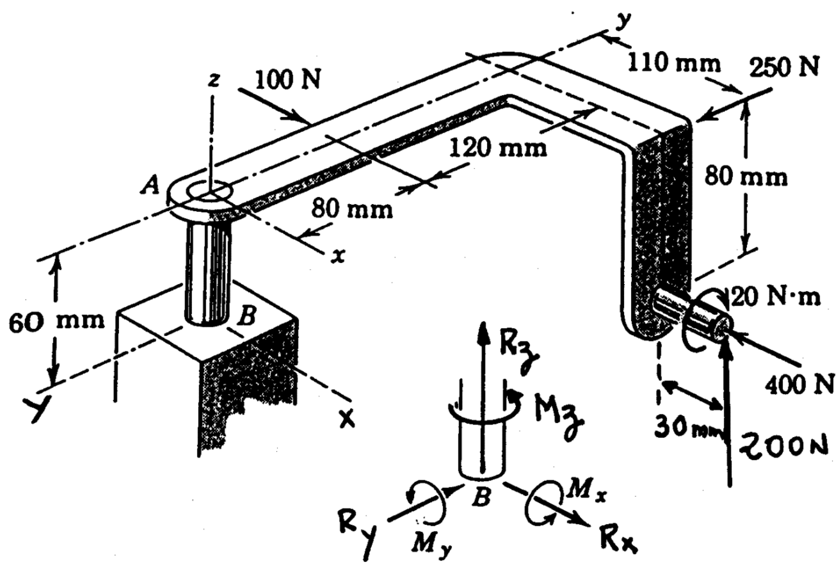
EXERCICE 1

Calculer les réactions aux appuis puis les efforts internes dans les sections 1-1, 2-2, 3-3



EXERCICE 2

Calculer les efforts internes dans la section prise à l'encastrement.

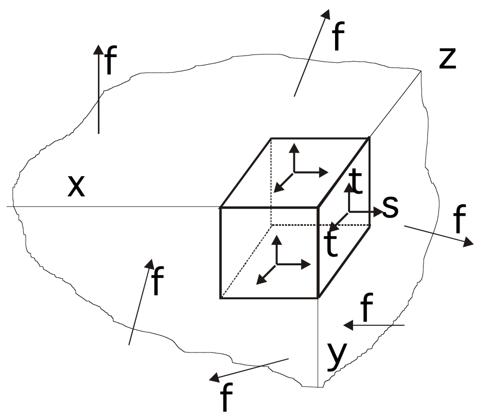


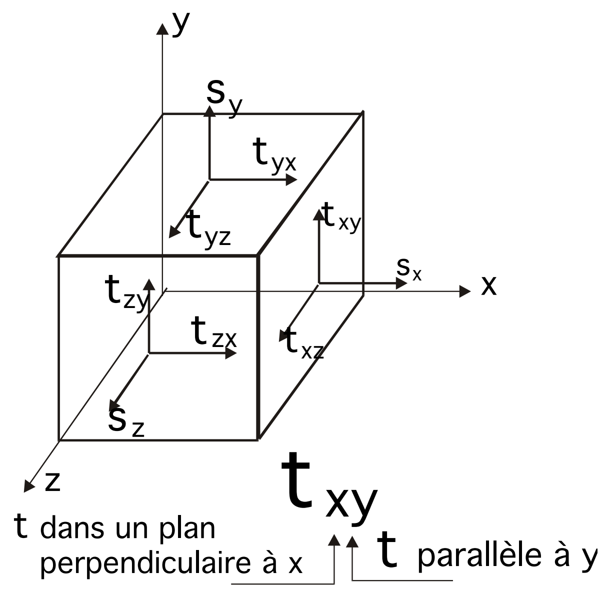
1.2 DÉFINITION ET COMPOSANTES DES CONTRAINTES

La contrainte peut se définir comme l'intensité des forces internes données par f_x, f_y, f_z divisé par l'unité de surface sur laquelle chacune de ces forces agies. Une contrainte produite par l'action d'une force perpendiculaire à la surface à l'étude est désignée comme normale et symbolisée par σ. Une contrainte produite par l'action d'une force parallèle à la surface à l'étude est désignée comme tangentielle et symbolisée par τ. Sur un point dans l'espace, 6 contraintes différentes sont répertoriées sur un corps en équilibre:

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Contraintes dans l'espace

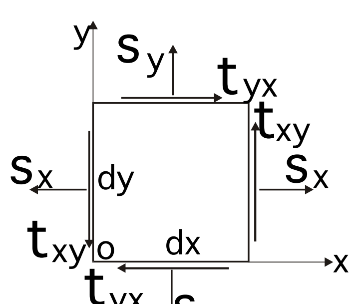


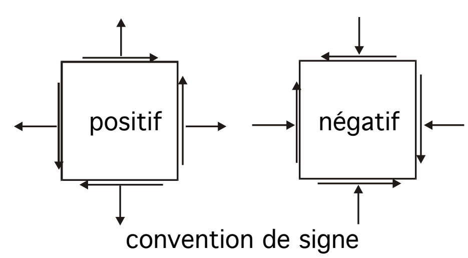


Dans le plan xy, les 3 contraintes différentes qui peuvent être identifiées à l'équilibre sont :

$$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Contraintes dans le plan xy

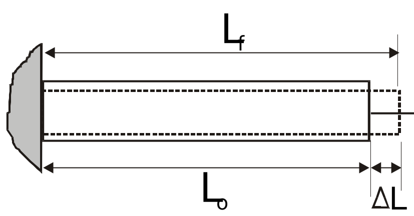


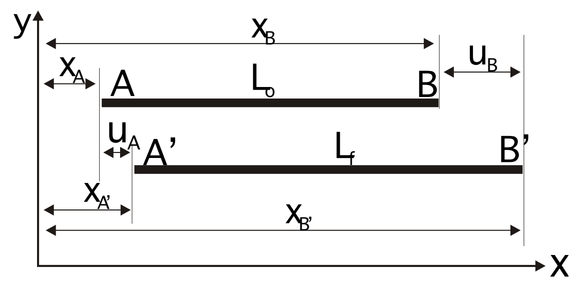


1.3 DÉFINITION ET COMPOSANTES DES DÉFORMATIONS

La *déformation linéaire* d'un matériau est donnée par le changement de dimension d'un matériau par rapport à sa taille originale. Elle est causée par un changement de température et/ou une contrainte normale et se rapporte donc toujours à une orientation ou un axe donné. Les déformations sont sans unités. Elles sont données par une valeur positive lors d'un allongement du matériau et par une valeur négative lors d'un rétrécissement de ce dernier.

Déformation linéaire (variation des longueurs)

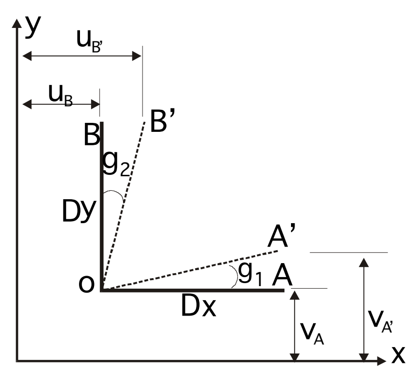




$$\varepsilon = \frac{L_f - L_o}{L_o} = \frac{\Delta L}{L_o} \qquad \varepsilon = \frac{u_B - u_A}{L_o}$$

La *déformation angulaire* ou la déformation de cisaillement d'un matériau est donnée par le changement d'angle d'un matériau par rapport à son orientation original. Elle est occasionnée par une contrainte tangentielle et se rapporte toujours à un plan donné. Les déformations angulaires sont sans unités. Elles sont données par une valeur positive lorsqu'il y a réduction de l'angle formé par les arêtes orientées suivant les axes positifs, et par une valeur négative lorsqu'il y a augmentation de l'angle.

Déformation angulaire (variation de l'angle droit)



Pour de petits angles, la déformation angulaire peut s'exprimer de la façon suivante :

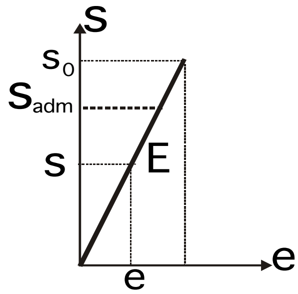
$$\gamma = (\gamma_1 + \gamma_2) = \tan\gamma_1 + \tan\gamma_2 = \frac{v_{A'} - v_A}{\Delta X} + \frac{u_{B'} - u_B}{\Delta Y}$$

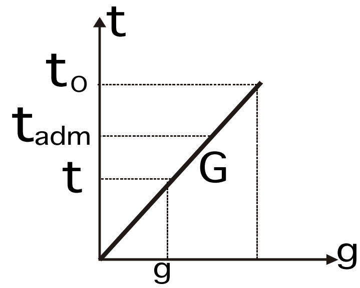
La déformation en un point dans le plan ou l'espace peut être représenté comme suit :

Plan xy : $\varepsilon_x,\ \varepsilon_y,\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{yx}$ Espace : $\varepsilon_x,\ \varepsilon_y,\ \varepsilon_z,\ \frac{1}{2}\gamma_{xy},\ \frac{1}{2}\gamma_{xz},\ \frac{1}{2}\gamma_{yz}$

1.4 LOI DE HOOKE GÉNÉRALISÉE

Selon la **loi de Hooke**, la déformation d'un matériau sera proportionnelle à la contrainte qui lui est appliquée. La constante de proportionnalité qui relie la contrainte normale à la déformation linéaire est le module de Young, E (appelé aussi module d'élasticité), et la constante de proportionnalité qui relie la contrainte tangentielle à la déformation angulaire est le module de Coulomb, G (appelé aussi module de cisaillement). Chaque matériau possède un module qui lui est propre et dont la grandeur est fonction de l'intensité des liaisons atomiques.





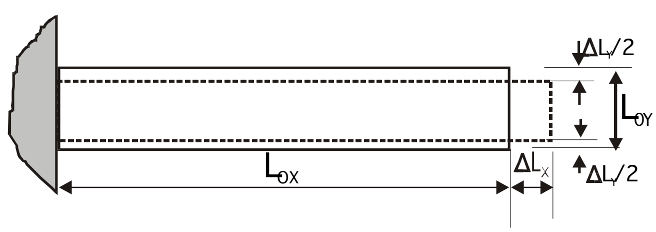
Tension, compression, flexion

$$\sigma = E\,\varepsilon \qquad E = \sigma/\varepsilon$$

torsion, cisaillement

$$\tau = G\gamma \qquad G = \tau/\gamma = E/2(1+\nu)$$

Sous tension, un matériau s'allongera dans l'axe correspondant à celui de la charge appliquée. Toutefois, cet allongement est souvent accompagné d'un rétrécissement dans les axes transversaux, bien qu'aucune contrainte ne soit appliquée selon ces axes. Le **coefficient de Poisson**, υ, aussi propre à chacun des matériaux, permet de relier les déformations les unes aux autres.



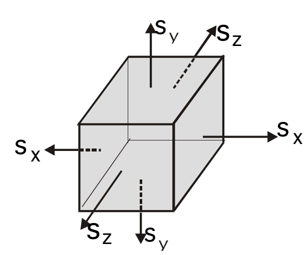
$$\varepsilon_X = \Delta L_X / L_{OX} \qquad \Rightarrow \quad \Delta L_X = \varepsilon_X\, L_{OX}$$

$$\varepsilon_Y = \Delta L_Y / L_{OY} = -\nu\,\varepsilon_X \qquad \Rightarrow \quad \Delta L_Y = -\nu\,\varepsilon_X L_{OY}$$

$$\varepsilon_Z = \Delta L_Z / L_{0Z} = -\nu\,\varepsilon_X \qquad \Rightarrow \quad \Delta L_Z = -\nu\,\varepsilon_X L_{OZ}$$

Pour un matériau soumis à plus d'une contrainte normale, les déformations linéaires sont évaluées en effectuant la sommation des effets des différentes contraintes :

	ε_X	ε_Y	ε_Z
σ_X	σ_X/E	$-\nu\sigma_X/E$	$-\nu\sigma_X/E$
σ_Y	$-\nu\sigma_Y/E$	σ_Y/E	$-\nu\sigma_Y/E$
σ_Z	$-\nu\sigma_Z/E$	$-\nu\sigma_Z/E$	σ_Z/E
$\sigma_X+\sigma_Y+\sigma_Z$	$\frac{1}{E}\left[\sigma_X-\nu\left(\sigma_Y+\sigma_Z\right)\right]$	$\frac{1}{E}\left[\sigma_Y-\nu\left(\sigma_X+\sigma_Z\right)\right]$	$\frac{1}{E}\left[\sigma_Z-\nu\left(\sigma_X+\sigma_Y\right)\right]$



Les déformations angulaires, contrairement aux déformations linéaires, sont le résultat d'une seule contrainte de cisaillement et sont données comme suit :

$$\gamma_{XY} = \tau_{XY}/G \qquad \gamma_{XZ} = \tau_{XZ}/G \qquad \gamma_{YZ} = \tau_{YZ}/G$$

Le module d'élasticité, le module de cisaillement et le coefficient de Poisson d'un matériau ne sont pas indépendants l'un de l'autre mais sont reliés par la relation suivante :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Ainsi, seule deux de ces valeurs doivent être déterminées expérimentalement pour un matériau donné. La troisième constante peut être évaluée algébriquement en utilisant la relation ci-dessus. Pour tous les matériaux, la grandeur du module de cisaillement ne dépassera pas 50% du module d'élasticité sans toutefois être inférieur à 33%.

Un autre facteur influençant grandement le niveau de déformation et/ou le niveau de contrainte dans un matériau est le changement de température. Une augmentation de température entraîne une vibration des atomes. Les atomes se comportent alors comme s'ils avaient un rayon atomique supérieur ce qui conduit à un changement de dimension du matériau exprimé par le **coefficient de dilatation thermique** :

$$\alpha = \frac{\Delta L}{L(\Delta T)}$$

En règle générale, les coefficients de dilatation thermique des matériaux sont inversement proportionnels à leur module élastique. Pour la majorité des matériaux, une variation de température uniforme produira des déformations identiques dans toutes les directions. Cependant, pour certains matériaux tels que les polymères renforcés de fibres ou tout autre corps anisotrope, le coefficient de dilatation thermique peut varier selon la direction de mesure. Le changement de volume d'un matériau non restreint par une quelconque limite n'entraînera pas de contrainte dans celui-ci. Toutefois, si le déplacement du matériau est restreint dans l'espace, le changement de volume causé par un changement de température résultera en des contraintes thermiques qui s'additionneront aux contraintes normales. Les déformations et les contraintes dans un corps isotrope soumis à des charges externes de même qu'à des changements de température sont données par les relations suivantes :

$$\varepsilon_X = \frac{1}{E}\left[\sigma_X - \nu\left(\sigma_Y + \sigma_Z\right)\right] + \alpha\,\Delta T$$

$$\varepsilon_Y = \frac{1}{E}\left[\sigma_Y - \nu\left(\sigma_X + \sigma_Z\right)\right] + \alpha\,\Delta T$$

$$\varepsilon_Z = \frac{1}{E}\left[\sigma_Z - \nu\left(\sigma_X + \sigma_Y\right)\right] + \alpha\,\Delta T$$

$$\sigma_X = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\varepsilon_X(1-\nu) + \nu\left(\varepsilon_Y + \varepsilon_Z\right)\right] - \frac{E\alpha\,\Delta T}{(1-2\nu)}$$

$$\sigma_Y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\varepsilon_Y(1-\nu) + \nu\left(\varepsilon_X + \varepsilon_Z\right)\right] - \frac{E\alpha\,\Delta T}{(1-2\nu)}$$

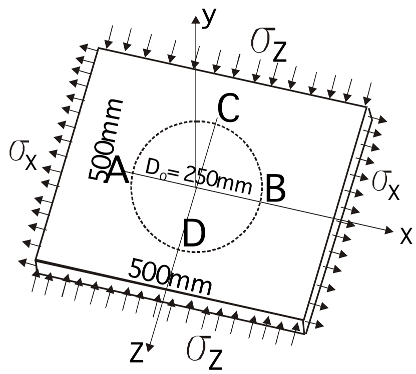
$$\sigma_Z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\varepsilon_Z(1-\nu) + \nu\left(\varepsilon_X + \varepsilon_Y\right)\right] - \frac{E\alpha\,\Delta T}{(1-2\nu)}$$

EXERCICE 3

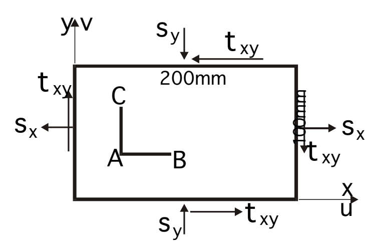
Déterminer les dimensions finales de la plaque et du cercle qui y est dessiné en vous servant des données suivantes et de la figure ci-contre :

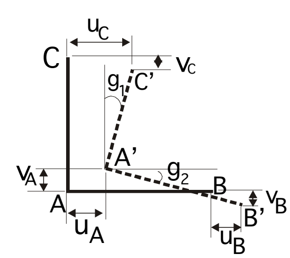
$$t = 25mm\,, E = 200GPa\,, \Delta T = -50^{O}\,, \alpha = 10^{-5}\,, \nu = 0{,}30,$$

$$\sigma_X = 140MPa\,,\ \sigma_Z = -80MPa\,, \sigma_Y = 0$$



EXERCICE 4





La plaque ci-contre de 10 mm d'épaisseur est soumise à l'état de contraintes suivant :

$\sigma_x = 200MPa\,, \sigma_y = -75MPa,\ \tau_{xy} = -100MPa,\ \Delta T = 25^{O}$

L'angle droit ABC, tel que AB et AC mesurent 50 mm, se déforme tel que :

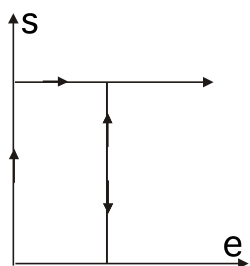
$u_A = 0{,}05mm\,,\ v_A = -0{,}05mm\,, v_B = -0{,}15mm\,.\ Avec : E = 200\,GPa\,,$

$G = 83\,GPa\,, \boxed{\nu = 0{,}2}\ et\ \alpha = 12\times 10^{-6}.\ Calculer : \varepsilon_x\,, \varepsilon_y\,, \gamma_{xy}\,, u_B\,, v_C\ et\ u_C.$

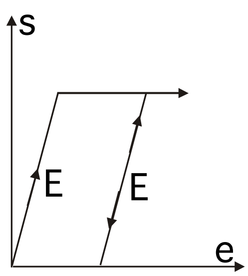
1.5 COURBE CONTRAINTE – DÉFORMATION

Lors d'études expérimentales permettant de déterminer les propriétés des matériaux, les courbes décrivant l'évolution de la déformation en fonction de la contrainte appliquée sont souvent tracées. Ces dernières permettent en outre de caractériser le matériau en identifiant la limite élastique, le module élastique, la résistance ultime, la consolidation, la ténacité, la ductilité, la zone de striction, l'allongement à la rupture, de même que l'énergie élastique libérée par le matériau et l'énergie inélastique absorbée par le matériau.

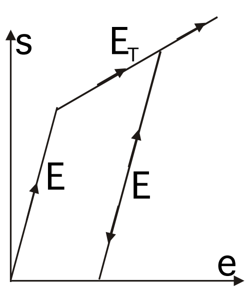
COURBES CONTRAINTE – DÉFORMATION IDÉALISÉES



rigide - parfaite-
ment plastique

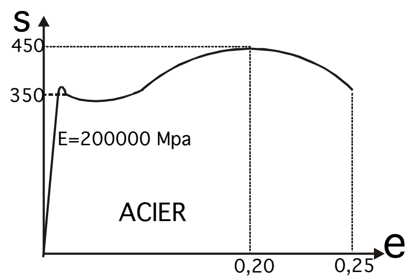


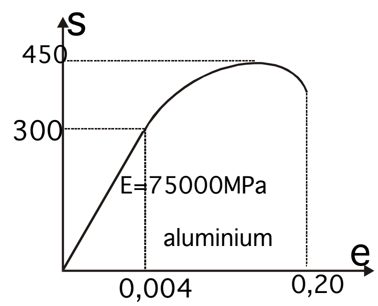
élastique - parfaite
ment plastique

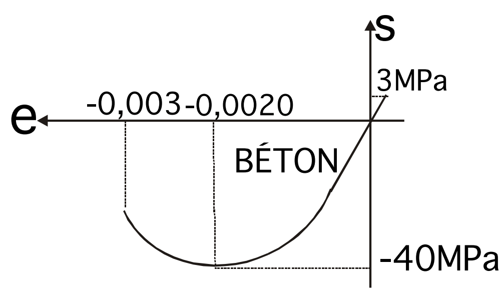


élastique avec
ecrouissage linéair

PROPRIÉTÉS TYPIQUES DE QUELQUES MATÉRIAUX







1.6 FACTEUR DE SÉCURITÉ

La limite élastique d'un matériau peut varier selon la direction de sollicitation (anisotropie) ou être la même peu importe la direction des efforts (isotropie). Dans l'établissement de procédures de design, on admet souvent que certaines contraintes ne doivent pas être dépassées. Ce principe largement répandu s'appelle la méthode de **calcul aux contraintes admissibles**. Ainsi, avec la résistance ou la limite élastique du matériau, s'associe souvent un **facteur de sécurité**. La valeur de ce facteur est non seulement fonction des risques encourus advenant une rupture mais aussi fonction du type de charges s'exerçant sur l'élément (morte, vive, vent, séisme, cyclique, etc.), de la probabilité de simultanéité des charges, de la variabilité des propriétés du matériau, de la durée prévue de l'ouvrage, du mode de rupture prévu (fragile ou ductile, grandes déformations ou faibles déformations, etc.), de l'exactitude des méthodes de calcul et de l'importance de la pièce ou de l'élément structural quant à la stabilité de l'ensemble de l'ouvrage. Les valeurs typiques du facteur de sécurité varient entre 1,6 et 2 pour des montages mécaniques et entre 2 et 3 pour les constructions du génie civil.

$$\sigma_{due\,aux\,charges} \leq \sigma_{adm} = \sigma_o / FS \qquad \tau_{due\,aux\,charges} \leq \tau_{adm} = \tau_o / FS$$

Le béton, l'acier et le bois sont les matériaux les plus largement répandus dans l'industrie de la construction. Le béton et le bois sont des matériaux offrant une large gamme de possibilité mais dont les propriétés sont très variables pour une même coulée ou encore pour une même essence d'arbre en provenance d'une même forêt. Un facteur de sécurité ou *coefficient de tenue* plus imposant leur est donc attribué. L'acier est cependant beaucoup plus prévisible que le béton ou le bois. L'acier le plus souvent rencontré dans le secteur de la construction possède les propriétés suivantes:

$$\sigma_o = 350MPa, \quad \nu = 0,30, \quad E = 200\,000MPa, \quad G = 77\,000MPa$$

À titre d'exemple, la résistance et le module d'élasticité de certaines catégories de matériaux sont présentés ci-dessous.

MATÉRIAUX	$\sigma_O\,(MPa)$	$E\,(MPa)$
Fibres de carbone	2000 à 3000	150 000 à 200 000
Fibres de verre	1000 à 2500	50 000
Acier trempé	700 à 1000	200 000
Titane	500	110 000
Acier de construction	350	200 000
Duraluminium (avion)	350	75 000
Aluminium	70	70 000
Cuivre	55	110 000
Béton (compression)	-20 à –100	30 000
Bois de construction	10 à 20	10 000
Béton (tension)	2 à 5	30 000

D'autres propriétés peuvent être retrouvées à l'annexe B de *Mechanics of materials* de Beer & Johnston.

1.7 RÉFÉRENCES

Mechanics of materials (Beer and Johnston)

	Sections	page
1.8	Stress under general loading	20
1.9	Ultimate and allowable stress	24
2.2	Normal strain	40
2.3	Stress – strain diagram	42
2.5	Hooke's law	47
2.6	Elastic – plastic behaviour	48
2.8	Deformations of members under axial loading	51
2.10	Problems involving temperature changes	64
2.11	Poisson's ratio	74
2.12	Generalized Hooke's law	75
2.14	Shear strain	79